III. TRIGONOMETRIA PIANA

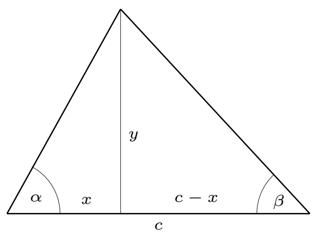
Trigonometria oggi

Dai piani di studio, soprattutto nell'università, la trigonometria è sparita da molto tempo. Ma questa disciplina, una delle più antiche della matematica, è ancora oggi una delle più importanti.

Mentre almeno gli elementi della trigonometria piana vengono insegnati nelle scuole, la trigonometria sferica è ormai conosciuta pochissimo anche tra i matematici di professione. Eppure le applicazioni sono tantissime: nautica, cartografia, geodesia e geoinformatica, astronomia, cristallografia, classificazione dei movimenti nello spazio, cinematica e quindi robotica e costruzione di macchine, grafica al calcolatore.

Problemi di geodesia piana

Sia dato, come nella figura, un triangolo con base di lunghezza nota c e in cui anche gli angoli α e β siano noti e tali che $0 < \alpha, \beta < 90°$.
Vogliamo calcolare x ed y.



Per le nostre ipotesi $\tan\alpha$ e $\tan\beta$ sono numeri ben definiti e > 0 (cfr. pag. 10). Inoltre abbiamo

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\tan\beta = \frac{y}{c-x}$$

Queste equazioni possono essere riscritte come sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$x\tan\alpha - y = 0$$
$$x\tan\beta + y = c\tan\beta$$

Il determinante $\begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ \tan\beta & 1 \end{vmatrix}$ di questo sistema è uguale a

$$\tan\alpha + \tan\beta$$

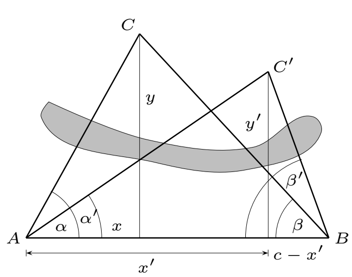
e quindi > 0. Possiamo perciò applicare la regola di Cramer e otteniamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ c\tan\beta & 1 \end{vmatrix}}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{c\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

mentre per y possiamo, se calcoliamo prima x, usare direttamente la relazione $y = x\tan\alpha$.

Esercizio. Prendendo il centimetro come unità di misura e con l'uso di un goniometro verificare le formule con le distanze nella figura.

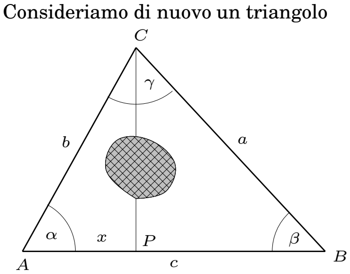
Con questo metodo possiamo risolvere due compiti elementari ma frequenti di geodesia piana.



Assumiamo di conoscere la distanza tra i punti A e B e, mediante un teodolite, di essere in grado di misurare gli angoli α, β, α' e β'. Vorremmo conoscere la distanza tra i punti C e C', ai quali però non possiamo accedere direttamente, ad esempio perché da essi ci separa un fiume che non riusciamo ad attraversare o perché si trovano in mezzo a una palude. Se le distanze sono molto grandi (maggiori di 50 km), dovremo appellarci alla trigonometria sferica, per distanze sufficientemente piccole invece possiamo utilizzare la tecnica vista sopra che ci permette di calcolare x, y, x' e y', da cui la distanza tra C e C' si ottiene come

$$|C - C'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

Consideriamo di nuovo un triangolo



Stavolta assumiamo di trovarci nel punto C e di voler determinare la proiezione P di C sulla retta tra i punti A e B che ci sono visibili, mentre un ostacolo visivo ci impedisce di determinare P in modo più diretto. Mirando ad A e B da C misuriamo le distanze a e b e l'angolo γ, da cui con il teorema del coseno calcoliamo prima c e poi α e β. Da $x = \dfrac{c\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$ troviamo facilmente P.

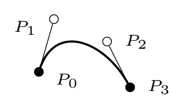
Grafica al calcolatore e geometria

La geometria viene utilizzata in molti campi della tecnologia moderna: nella tomografia computerizzata, nella pianificazione di edifici, nella creazione di animazioni per film e pubblicità, nell'analisi dei movimenti di robot e satelliti.

La grafica al calcolatore e le discipline affini come la geometria computazionale e l'elaborazione delle immagini si basano sulla matematica. È importante separare gli algoritmi dalla loro realizzazione mediante un linguaggio di programmazione. È importante separare la rappresentazione matematica delle figure nello spazio dalle immagini che creiamo sullo schermo di un calcolatore.

Il matematico è molto avvantaggiato in questo. Già semplici nozioni di trigonometria e di geometria (traslazioni, rotazioni, riflessioni, coordinate baricentriche, i vari tipi di proiezioni) e algebra lineare possono rendere facili o immediate costruzioni e formule di trasformazione (e quindi gli algoritmi che da esse derivano) che senza questi strumenti matematici risulterebbero difficoltose o non verrebbero nemmeno scoperte.

La geometria proiettiva, apparentemente una vecchia teoria astratta e filosofica, diventa di sorpresa una tecnica molto utile per trasformare compiti di proiezione in semplici calcoli con coordinate omogenee.

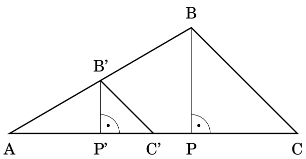


I concetti dell'analisi e della geometria differenziale portano all'introduzione e allo studio delle curve e superficie di Bézier, largamente utilizzate nei programmi di disegno al calcolatore (CAD, computer aided design).

Molte figure possono essere descritte mediante equazioni algebriche; per questa ragione la geometria algebrica assume notevole importanza nella grafica al calcolatore moderna. Curve e superficie possono essere date in forme parametrica oppure mediante un sistema di equazioni; le basi di Gröbner forniscono uno strumento per passare da una rappresentazione all'altra.

La topologia generale, una disciplina tra la geometria, l'analisi e l'algebra, è la base della morfologia matematica, mentre la topologia algebrica e la geometria algebrica reale possiedono applicazioni naturali in robotica.

Il triangolo



In questa figura i segmenti BC e $B'C'$ sono paralleli. Nella geometria elementare si dimostra che le *proporzioni* del triangolo più piccolo $AB'C'$ sono uguali alle proporzioni del triangolo grande ABC. Cio significa che, se $\overline{AB}$ denota la lunghezza del segmento AB, allora

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

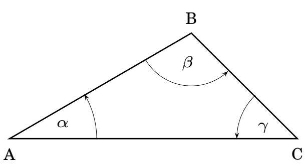
Se il valore comune di queste tre frazioni viene denotato con λ, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \overline{AB'} &= \lambda \cdot \overline{AB} \\ \overline{AC'} &= \lambda \cdot \overline{AC} \\ \overline{B'C'} &= \lambda \cdot \overline{BC} \end{aligned}$$

Una relazione analoga vale anche per le altezze:

$$\overline{B'P'} = \lambda \cdot \overline{BP}$$

Dati tre punti A, B, C denotiamo con $\sphericalangle(AC, AB)$ l'angolo α tra i segmenti AC e AB:



Evidentemente $0 < \alpha < 180°$.

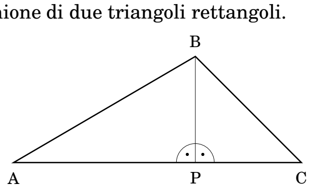
Con β e γ indichiamo gli altri due angoli come nella figura; spesso serve solo la grandezza assoluta degli angoli, allora si lasciano via le punte di freccia.

Nella prima figura il triangolo piccolo e il triangolo grande hanno gli stessi angoli, cioè

$$\begin{aligned} \sphericalangle(AC, AB) &= \sphericalangle(AC', AB') \\ \sphericalangle(BA, BC) &= \sphericalangle(B'A, B'C') \\ \sphericalangle(CB, CA) &= \sphericalangle(C'B', C'A) \end{aligned}$$

Si può dimostrare ed è chiaro intuitivamente che, dati due triangoli con gli stessi angoli, essi possono essere sovrapposti in maniera tale che si ottenga una figura simile alla nostra.

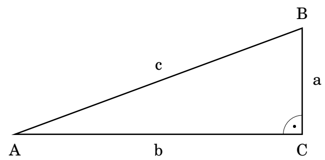
Ogni triangolo può essere considerato (talvolta anche in più modi - quando?) come unione di due triangoli rettangoli.



Le formule per i triangoli rettangoli sono particolarmente semplici; conviene quindi studiare separatamente i triangoli APB e PBC.

Il triangolo rettangolo

Il triangolo ABC sia rettangolo, ad esempio $\sphericalangle(CA, CB) = 90°$.



Il lato più lungo è quello opposto all'angolo retto, cioè AB, e si chiama *ipotenusa*, i due altri lati sono più brevi e sono detti *cateti*.

La somma dei tre angoli α, β, γ di un triangolo è sempre uguale a $180°$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Ciò implica che un triangolo può avere al massimo un angolo retto (se ce ne fossero due, il terzo dovrebbe essere zero e non avremmo più un triangolo).

Teorema 9.1 (teorema di Pitagora). *Dato un triangolo rettangolo e posto $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ e $c := \overline{AB}$ come nella figura, si ha*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Il teorema di Pitagora (dimostrato a pagina 10) implica che l'ipotenusa è veramente più lunga di ciascuno dei due cateti (perché $a, b > 0$). La relazione $c^2 = a^2 + b^2$ può essere anche usata per il calcolo di uno dei lati di un triangolo rettangolo dagli altri due:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Triple pitagoree

Una tripla pitagorea è una tripla (a, b, c) di numeri naturali positivi tali che $a^2 + b^2 = c^2$. La tripla pitagorea si chiama *primitiva*, se a, b e c sono relativamente primi tra di loro. Diamo una tavola delle prime triple pitagoree primitive in ordine crescente di c.

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37
9	40	41
28	45	53
11	60	61
33	56	65
16	63	65

Gli arabi possedevano già nel 972 tavole simili.

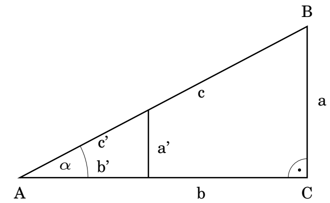
Come abbiamo già osservato, per $n > 2$ non esistono invece soluzioni dell'equazione

$$a^n + b^n = c^n$$

con a, b, c interi > 0. La dimostrazione di questo teorema (detto *ultimo teorema di Fermat*) è stata molto difficile; Andrew Wiles ha utilizzato strumenti molto avanzati della geometria algebrica. Pierre de Fermat (circa 1607-1665) sostenne di conoscere una dimostrazione, ma non è mai stata trovata e si dubita molto che sia esistita.

Le funzioni trigonometriche

Consideriamo la seguente figura,



in cui a, b, c sono come prima i lati del triangolo rettangolo più grande e a', b' e c' sono i lati del triangolo più piccolo, che è ancora rettangolo. Le proporzioni nella figura dipendono solo dall'angolo α, si ha cioè

$$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$$

e da ciò anche

$$\begin{aligned} \frac{a'}{c'} &= \frac{a}{c} \\ \frac{b'}{a'} &= \frac{b}{a} \\ \frac{c'}{b'} &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Questi rapporti sono perciò funzioni dell'angolo α che vengono dette funzioni trigonometriche e denotate come segue:

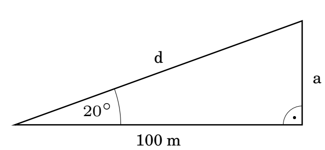
$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &:= \frac{a} {c} \ \ldots \text{ seno di } \alpha \\ \cos\alpha &:= \frac{b}{c} \ \ldots \text{ coseno di } \alpha \\ \tan\alpha &:= \frac{a}{b} \ \ldots \text{ tangente di } \alpha \\ \cot\alpha &:= \frac{b}{a} \ \ldots \text{ cotangente di } \alpha \end{aligned}}$$

Dalle definizioni seguono le relazioni

$$\begin{aligned} a &= c\sin\alpha = b\tan\alpha \\ b &= c\cos\alpha = a\cot\alpha \\ c &= \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

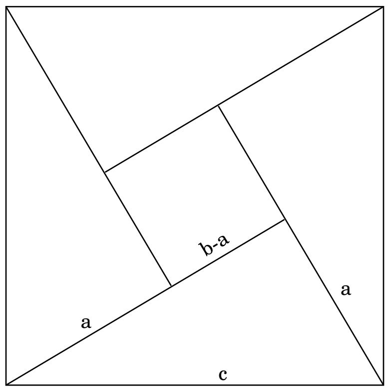
Esercizio 9.2. Calcolare $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\tan 45°$, $\cot 45°$.

Esercizio 9.3. I valori delle funzioni trigonometriche si trovano in tabelle oppure possono essere calcolati con la calcolatrice tascabile oppure con una semplice istruzione in quasi tutti i linguaggi di programmazione. Ricavare in uno di questi modi i necessari valori per calcolare la distanza d e l'altezza a nella seguente figura:



La dimostrazione indiana

In una fonte indiana del dodicesimo secolo si trova il seguente disegno, con una sola parola in sanscrito: *guarda!*



Da esso si deduce immediatamente il teorema di Pitagora:

Il nostro triangolo rettangolo abbia i lati a, b, c con $a < b < c$. Allora l'area del quadrato grande è uguale a quella del quadrato piccolo più quattro volte l'area del triangolo, quindi

$$c^2 = (b-a)^2 + 4\frac{ab}{2}$$

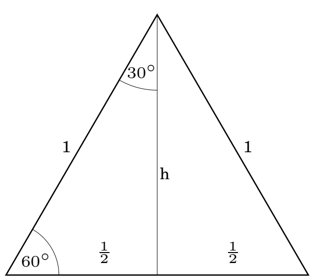
cioè

$$c^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab = b^2 + a^2$$

Esercizio: Disegnare la figura nel caso che $a = b$ e convincersi che la dimostrazione rimane ancora valida.

Il triangolo isolatero

Consideriamo adesso un triangolo isolatero di lato 1. In esso anche gli angoli devono essere tutti uguali, quindi, dovendo essere la somma degli angoli $180°$, ogni angolo è uguale a $60°$.

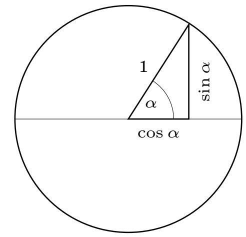


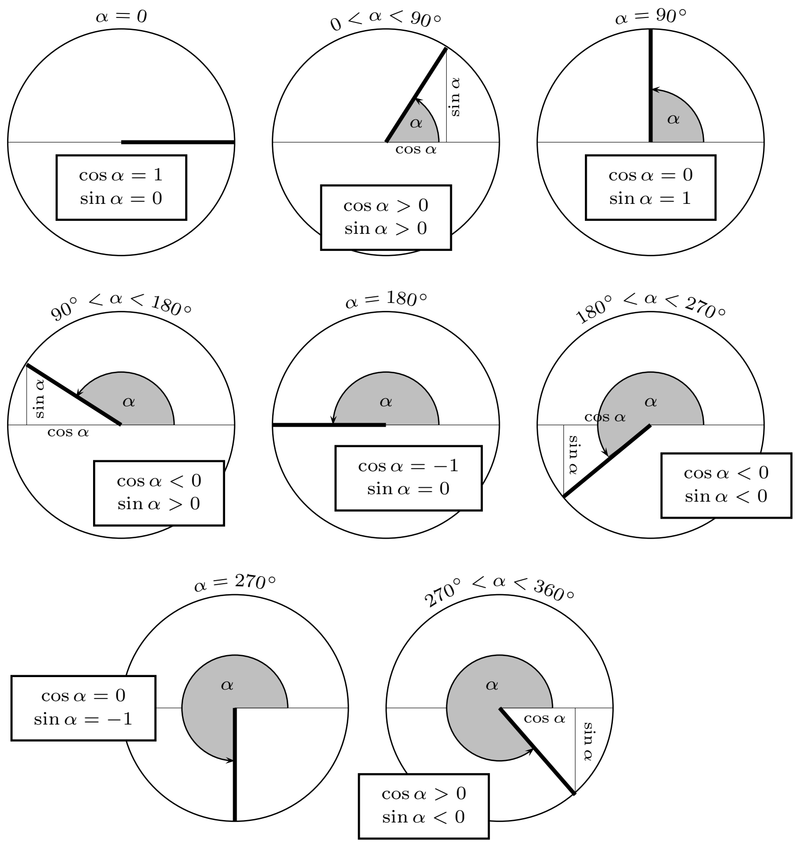
Dalla figura otteniamo

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 60° = \cos 30° &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30° = \cos 60° &= \frac{1}{2} \\ \tan 60° = 2h &= \sqrt{3} \\ \tan 30° = \frac{1}{2h} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Angoli sul cerchio

Siccome le lunghezze assolute non sono importanti, possiamo assumere che l'ipotenusa del triangolo rettangolo considerato sia di lunghezza 1 e studiare le funzioni trigonometriche sulla circonferenza di raggio 1. Questo ci permette inoltre di estendere la definizione delle funzioni trigonometriche a valori arbitrari di α, non necessariamente sottoposti, come finora, alla condizione $0 < \alpha < 90°$. Definiamo prima $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ per ogni α con $0 \le \alpha \le 360°$ come nelle seguenti figure:





Definiamo poi ogni volta

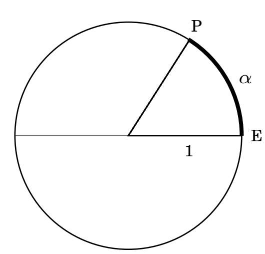
$$\boxed{\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

quando $\cos\alpha \neq 0$ risp. $\sin\alpha \neq 0$. Si vede subito che questa definizione coincide con quella data a pag. 9, quando $0 < \alpha < 90°$.

Quindi $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ quando entrambi i valori sono definiti.

Se α è infine un numero reale qualsiasi (non necessariamente compreso tra 0 e $360°$), esiste sempre un numero intero n tale che $\alpha = n \cdot 360° + \alpha_0$ con $0 \le \alpha_0 < 360°$ e possiamo definire $\cos\alpha := \cos\alpha_0$, $\sin\alpha := \sin\alpha_0$, $\tan\alpha := \tan\alpha_0$, $\cot\alpha := \cot\alpha_0$.

In matematica si identifica l'angolo con la lunghezza dell'arco descritto sulla circonferenza tra i punti E e P della figura a lato, aggiungendo però multipli del perimetro della circonferenza se l'angolo è immaginato ottenuto dopo essere girato più volte attorno al centro. Se il centro del cerchio è l'origine $(0,0)$ del piano, possiamo assumere che $E = (1,0)$. Siccome il perimetro della circonferenza di raggio 1 è 2π, si ha $360° = 2\pi$.



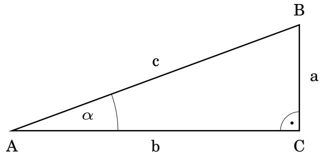
È chiaro che un angolo di $g°$ è uguale a $\dfrac{g}{360}2\pi$,

in altre parole $g° = \dfrac{2\pi g}{360}$, e viceversa $\alpha = \alpha\dfrac{360°}{2\pi}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

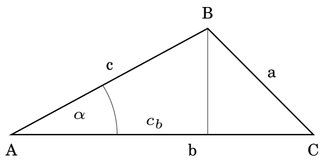
Infatti $1 = \dfrac{360°}{2\pi} \sim 57.29577951°$.

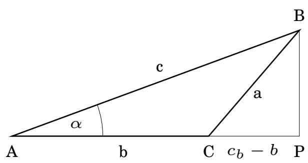
Il teorema del coseno

Dato un triangolo con i vertici A, B, C poniamo ancora $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ e $c := \overline{AB}$. Denotiamo inoltre con c_b la lunghezza della proiezione di AB su AC misurando a partire da A. In modo analogo sono definite le grandezze c_a, b_a ecc. Se l'angolo α è ottuso, c_b sarà negativo. Sono possibili quattro situazioni:

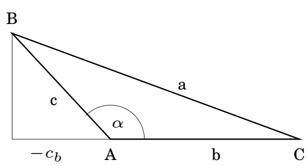


In questo caso $c_b = b$.





Si osservi che qui c_b è la lunghezza di tutto il segmento AP.



Teorema 11.1. *In tutti i casi, quindi in ogni triangolo, vale la relazione*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc_b$$

Per simmetria vale anche

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab_a$$

Dimostrazione. Quando $c_b = b$, la formula diventa $a^2 = c^2 - b^2$ e segue direttamente dal teorema di Pitagora.

Nei rimanenti tre casi calcoliamo l'altezza del triangolo con il teorema di Pitagora in due modi.
Nella seconda figura abbiamo

$$c^2 - c_b^2 = a^2 - (b - c_b)^2$$

cioè

$$c^2 - \underline{c_b^2} = a^2 - b^2 + 2bc_b - \underline{c_b^2}$$

per cui

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bc_b$$

Similmente nella terza figura

$$c^2 - c_b^2 = a^2 - (c_b - b)^2$$

la stessa equazione di prima.

Nella quarta figura infine abbiamo

$$c^2 - (-c_b)^2 = a^2 - (b - c_b)^2$$

che è ancora la stessa equazione.

Teorema 11.2 (teorema di Pitagora inverso). *Un triangolo è rettangolo con l'ipotenusa c se e solo se*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dimostrazione. Dalla figura in alto a destra a pag. 9 si vede che il triangolo è rettangolo con ipotenusa c se e solo se $b_a = 0$ (oppure, equivalentemente, $a_b = 0$). L'enunciato segue dal teorema precedente.

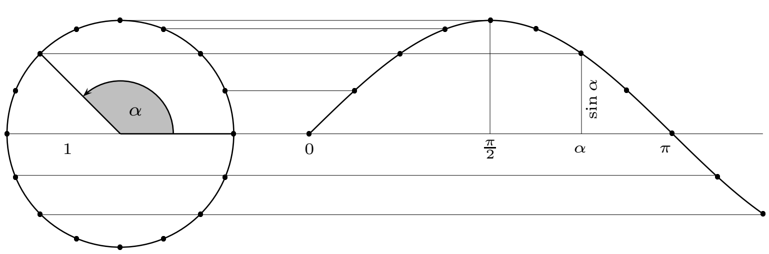
Teorema 11.3 (teorema del coseno).

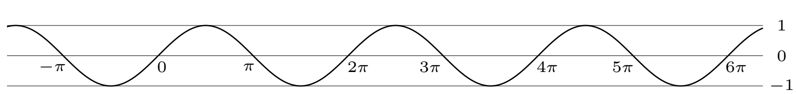
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Dimostrazione. $c_b = c\cos\alpha$ in tutti e quattro i casi del precedente teorema (cfr. le definizioni degli angoli sul cerchio a pagina 10).

Il grafico della funzione seno

Facendo percorrere α l'asse reale e riportando $\sin\alpha$ come ordinata, otteniamo il grafico della funzione seno.





Come si vede dalla figura e come sarà dimostrato rigorosamente nel corso di Analisi, la funzione seno è iniettiva sull'intervallo chiuso $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e assume su questo intervallo tutti i valori possibili per il seno, cioè tutti i valori tra -1 e 1. Possiamo quindi definire una funzione biiettiva $\underset{\alpha}{\bigcirc}\sin\alpha : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$. L'inversa di questa funzione viene denotata con $\arcsin$. In modo analogo si definiscono l'inversa $\arccos$ della funzione biiettiva $\underset{\alpha}{\bigcirc}\cos\alpha : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ e l'inversa $\arctan$ della funzione biiettiva $\underset{\alpha}{\bigcirc}\tan\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-\infty, \infty)$.

La periodicità di seno e coseno

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin\alpha$$

per ogni numero reale α, come segue dalle definizioni date a pagina 10. Invece di 360° possiamo anche scrivere 2π, quindi

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

per ogni numero reale α. Le funzioni $\sin$ e $\cos$ sono quindi funzioni periodiche con periodo 2π.

Altre proprietà di seno e coseno

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

per ogni numero reale α, come si vede dai disegni a pagina 10. Il coseno è quindi una funzione *pari*, il seno una funzione *dispari*.

Teorema 11.4 (teorema di addizione).

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Dimostrazione. Corsi di Analisi.

Esercizio 11.5. Dimostrare le formule

$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

Teorema 11.6. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Dimostrazione. Ciò segue direttamente dalle definizioni geometriche.

Mentre queste proprietà algebriche delle funzioni trigonometriche rimangono valide anche per un argomento α complesso, ciò non è più vero per le disuguaglianze $|\sin\alpha| \leq 1$ e $|\cos\alpha| \leq 1$. Infatti, se dall'analisi complessa anticipiamo le formule

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

valide per ogni numero complesso z, vediamo che ad esempio $\cos ai = \dfrac{e^{-a} + e^{a}}{2}$, quindi per a reale e tendente ad infinito (in questo caso e^{-a} tende a 0) $\cos ai$ si comporta come $\dfrac{e^a}{2}$ e tende quindi fortemente ad infinito.

arcsin, arccos e arctan

Queste funzioni, definite a sinistra, sono determinate dalle seguenti relazioni:

$$\arcsin x = \alpha \iff \sin\alpha = x$$

per $-1 \leq x \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$\arccos x = \alpha \iff \cos\alpha = x$$

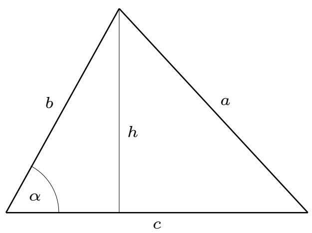
per $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$

$$\arctan x = \alpha \iff \tan\alpha = x$$

per $-\infty < x < \infty$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

L'area di un triangolo

Consideriamo un triangolo come nella figura:



Come mostrano le illustrazioni a pagina 10, l'altezza h è sempre uguale ad $h = b|\sin\alpha|$, anche quando α non è compreso tra 0 e $90°$. D'altra parte l'area del triangolo è uguale a $ch/2$, cosicché otteniamo la formula fondamentale per l'area di un triangolo:

$$\text{area} = \frac{1}{2}bc|\sin\alpha|$$

Proposizione 12.1. *Con le stesse notazioni l'area di un triangolo può essere calcolata anche con le formule*

$$\begin{aligned}\text{area} &= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}\\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $s := \dfrac{a+b+c}{2}$.

La seconda formula è spesso citata come formula di Erone.

Dimostrazione. Dalla formula fondamentale abbiamo prima

$$4\,\text{area}^2 = b^2c^2\sin^2\alpha = b^2c^2(1-\cos^2\alpha)$$

(1) Per il teorema del coseno

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

cosicché

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{e} \quad \cos^2\alpha = \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

quindi

$$4\,\text{area}^2 = b^2c^2 - \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)^2$$

da cui

$$\begin{aligned}16\,\text{area}^2 &= 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\\ &= 4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2a^2b^2+2c^2a^2\\ &= 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-(a^4+b^4+c^4)\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la prima formula.

(2) Possiamo però anche scrivere, usando più volte la formula $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$,

$$\begin{aligned}4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2 &= (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)\\ &= ((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)\\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

cosicché

$$16\,\text{area}^2 = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$$

Posto, come nell'enunciato, $a+b+c=2s$, abbiamo però

$$b+c-a = 2s-2a = 2(s-a)$$

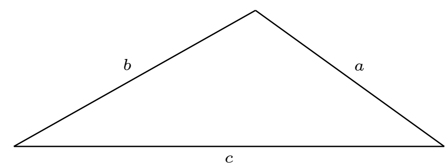
e nello stesso modo

$$a+b-c = 2(s-c) \quad \text{e} \quad a+c-b = 2(s-b)$$

cosicché $16\,\text{area}^2 = 2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)$ e quindi

$$\text{area}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Esempio 12.2. Misurando con la riga (in mm) i lati del triangolo



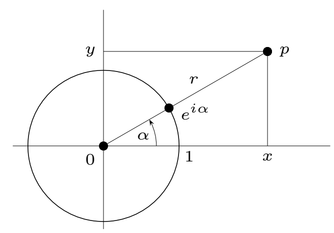
abbiamo $a=30, b=37, c=57, s=62$, per cui

$$\text{area} = \sqrt{62\cdot 32\cdot 25\cdot 5} = \sqrt{248000} \simeq 498$$

l'area è quindi con buona approssimazione uguale a 4.98 cm^2.

Coordinate polari nel piano

Sia $p=(x,y)$ un punto del piano reale.



Si vede che, se $p \neq (0,0)$, allora $\boxed{\begin{aligned}x &= r\cos\alpha\\ y &= r\sin\alpha\end{aligned}}$ (*)

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$, mentre l'angolo α è univocamente determinato se chiediamo $0 \le \alpha < 2\pi$.

Nel caso $p=(0,0)$ la rappresentazione (*) rimane valida con $r=0$ e qualsiasi α, la biettività della (*) viene quindi meno nel punto $p=(0,0)$.

Scriviamo adesso $e^{i\alpha} := (\cos\alpha, \sin\alpha)$ come abbiamo già fatto nel disegno; allora la relazione (*) può anche essere scritta nella forma

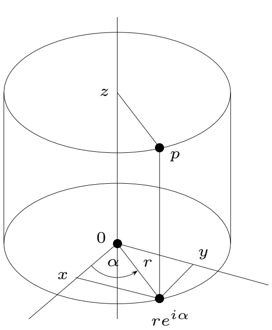
$$p = re^{i\alpha}$$

Questo prodotto di r con $e^{i\alpha}$ può essere interpretato come prodotto dello scalare reale r con il vettore $e^{i\alpha}$ di $\mathbb{R}^2$ ed è allo stesso tempo il prodotto dei numeri complessi r ed $e^{i\alpha}$ come si dimostra nei corsi di Analisi.

Coordinate cilindriche nello spazio

Dalla figura si vede che un punto $p=(x,y,z)$ dello spazio può essere rappresentato nella forma

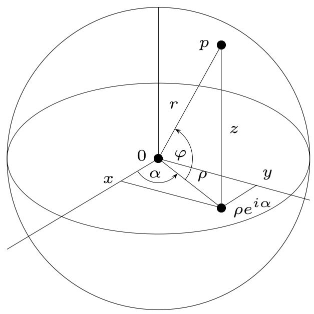
$$\boxed{\begin{aligned}x &= r\cos\alpha\\ y &= r\sin\alpha\\ z &= z\end{aligned}}$$



La rappresentazione è univoca per quei punti per cui $(x,y)\neq(0,0)$, quindi per tutti i punti che non si trovano sull'asse z.

Coordinate polari (o sferiche) nello spazio

Un punto $p = (x, y, z)$ dello spazio tridimensionale può anche essere rappresentato come nella figura seguente:



Avendo $\rho = r\cos\varphi$, si vede che

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\alpha\cos\varphi \\ y &= r\sin\alpha\cos\varphi \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$

con

$$r \geq 0$$
$$0 \leq \alpha < 2\pi$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Questa rappresentazione è quella che si usa nelle coordinate geografiche di un punto della terra o della sfera celeste:

$\alpha =$ longitudine, $\varphi =$ latitudine.

Anche in questo caso la corrispondenza non è biiettiva, perché non solo per $p = (0, 0, 0)$ la rappresentazione è valida per $r = 0$ e valori arbitrari di α e φ, ma anche per ogni altro punto $\neq (0, 0, 0)$ dell'asse z bisogna porre $\varphi = 90^\circ$ e quindi $\cos\varphi = 0$ e $\sin\varphi = 1$ se $z > 0$ oppure $\varphi = -90^\circ$ e quindi $\cos\varphi = 0$ e $\sin\varphi = -1$ se $z < 0$, e allora ogni α va bene. Quindi su tutta l'asse z le coordinate polari non sono univocamente determinate.

Spesso al posto di φ si usa $\theta := 90^\circ - \varphi$, quindi

$$\cos\varphi = \sin\theta \;\text{ e }\; \sin\varphi = \cos\theta$$

Molte funzioni della matematica e della fisica presentano *simmetrie*. A una funzione $f = f(x, y, z)$ definita su $\mathbb{R}^3$ (per semplicità, ma spesso bisognerà studiare bene il più adatto dominio di definizione) possiamo associare la funzione $g = g(r, \alpha, \varphi)$ definita da

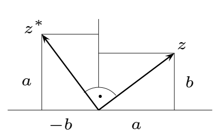
$$g(r, \alpha, \varphi) := f(r\cos\alpha\cos\varphi, r\sin\alpha\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

che in caso di simmetrie può avere una forma analitica molto più semplice della f.

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ad esempio diventa così $g(r, \alpha, \varphi) = r^2$, una funzione di una sola variabile notevolmente più semplice. Altre volte una funzione dipende solo dalla direzione e quindi non da r; in questo caso g è una funzione di sole due variabili e anche questa è una importante semplificazione. Nello stesso modo si usano le coordinate cilindriche e le coordinate polari piane.

Il vettore magico

Per un vettore $z = (a, b)$ del piano il vettore $z^* := (-b, a)$ che si ottiene da z per rotazione di 90° in senso antiorario si chiama il *vettore magico* di z. Questo vettore è molto importante: riapparirà continuamente non solo nella geometria elementare del piano, ma anche in molti contesti della geometria complessa e della meccanica!



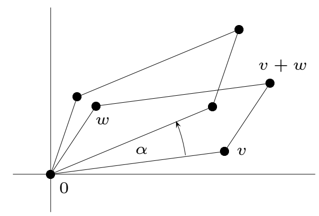
Rotazioni nel piano

Consideriamo l'applicazione f_α da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che consiste nel ruotare un punto $v = (v_1, v_2)$ per l'angolo fissato α in senso antiorario.

È chiaro che $f_\alpha(\lambda v) = \lambda f_\alpha(v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e dal disegno si vede che anche

$$f_\alpha(v + w) = f_\alpha(v) + f_\alpha(w)$$

per $v, w \in \mathbb{R}^2$. Una rotazione è quindi un'applicazione lineare.



Sia e_1, e_2 la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora $v = v_1e_1 + v_2e_2$, perciò $f_\alpha(v) = v_1f_\alpha(e_1) + v_2f_\alpha(e_2)$.

Ma $f_\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ e $f_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$f_\alpha(e_2)$ è il vettore magico di $f_\alpha(e_1)$!

Quindi

$$f_\alpha(v) = v_1\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha \\ v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Se per una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_2$

definiamo $Av = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}$,

vediamo che possiamo prendere

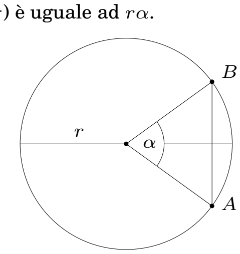
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Notiamo anche che le colonne di A sono proprio $f_\alpha(e_1)$ e $f_\alpha(e_2)$.

Esercizi per gli scritti

14. $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

15. Dalla figura si vede che la lunghezza c della corda (cioè del segmento di retta) tra A e B è uguale a $2r\sin(\alpha/2)$, mentre la distanza (cioè l'arco) d sul cerchio tra A e B (nell'ipotesi $0 \leq \alpha < \pi$) è uguale ad $r\alpha$.



La funzione cordale $\underset{x}{\bigcirc} 2\sin\frac{x}{2}$ è probabilmente la più antica funzione trigonometrica e venne tabulata già da Ipparco da Nikaia nel secondo secolo prima di Cristo (*tavola delle corde*).

Calcolare la differenza $d - c$, che corrisponde all'errore che si commette usando c al posto di d per misurare la distanza tra i punti A e B sulla sfera terrestre, che possiede un raggio medio r di 6371 km, per c = 1 km, 10 km, 50 km, 100 km, 500 km, 1000 km.

Attenzione: Se $\sin\beta = u$, come si calcola β?