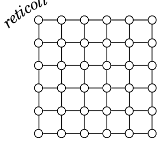
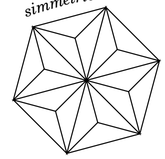


ESEMPI DI MATEMATICA



$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Corso di laurea in matematica | Università di Ferrara | Salone dello Studente ◇ Aprile 2001

Indice

1 Cluster analysis
La statistica matematica
2 L'algoritmo di Casteljeau
3 La professione del matematico
4 La genetica delle popolazioni
L'analisi matematica del genoma
Sicurezza dei dati
5 I metodi matematici della chimica
Reti neurali
La scoperta di farmaci
Geomatematica
6 La dinamica dei fluidi
La matematica e le malattie tropicali
La matematica degli ingegneri
La matematica in azienda
Linguaggi di documentazione

Cluster analysis

Il campo della statistica detto cluster analysis si occupa della costruzione di raggruppamenti (cluster significa grappolo, gruppetto) da un insieme di dati. Possiamo per esempio applicare la cluster analysis a quindici comuni, di cui abbiamo quattro dati: numeri degli abitanti, altezza sul mare, distanza dal mare, superficie del territorio comunale. Per avere numeri di grandezza confrontabile, indichiamo gli abitanti in migliaia, l'altezza in metri, la distanza dal mare in chilometri, la superficie in chilometri quadrati.

	ab./1000	*alt./m*	*d-mare/km*	*sup./kmq*
Belluno	36	383	75	148
Bologna	385	54	70	141
Bolzano	97	262	140	53
Ferrara	135	9	45	405
Firenze	380	50	75	103
Genova	654	19	2	236
Milano	1304	122	108	182
Padova	213	12	25	93
Parma	168	55	90	261
Pisa	94	4	10	188
Ravenna	138	4	8	660
Torino	920	239	105	131
Trento	104	194	110	158
Venezia	296	1	0	458
Vicenza	108	39	55	81

Si nota che il comune di Ferrara ha un territorio molto grande, corrispondente a un quadrato di 20 km di lato, praticamente uguale a quello di Vienna (415 km^2), di poco inferiore a quello di Venezia e più del doppio di quello di Milano. Infatti sono pochi i comuni italiani più grandi di Ferrara: Roma 1506 km^2, Ravenna 660 km^2, Foggia 506 km^2, poi Grosseto, L'Aquila, Venezia, Perugia, Altamura, Caltanisetta, Viterbo, non molto più grandi di Ferrara, e forse qualche altro comune che ci è sfuggito.

Applicando uno degli algoritmi della cluster analysis ai dati della tabella troviamo il seguente raggruppamento:

1. *gruppo: Ferrara Ravenna Venezia*
2. *gruppo: Milano Torino*
3. *gruppo: Bologna Firenze Genova*
4. *gruppo: Belluno Bolzano Padova Parma Pisa Trento Vicenza*

Il risultato è piuttosto convincente; si potrebbe anche impostare il numero dei gruppi diversamente per ottenere ad esempio un raggruppamento più fine con sei gruppi oppure invece un raggruppamento con soli tre gruppi.

Elenchiamo alcuni campi di applicazione dell'analisi cluster: classificazione di specie in botanica e zoologia o di aree agricole o biogeografiche, classificazione di specie virali o batteriche, definizione di gruppi di persone con comportamento (istruzione, attitudini, ambizioni, livello di vita, professione) simile in studi sociologici o psicologici, creazione di gruppi di dati omogenei nell'elaborazione dei dati (per banche dati o grandi biblioteche), elaborazione di immagini (ad esempio messa in evidenza di formazioni patologiche in radiografie mediche), individuazione di gruppi di pazienti con forme diverse di una malattia o riguardo alla risposta a un tipo di trattamento, classificazione di malattie in base a sintomi e test di laboratorio, studi linguistici, raggruppamento di regioni (province, comuni) relativamente a caratteristiche economiche (o livello generale di vita o qualità dei servizi sanitari), reperti archeologici o paleontologici o mineralogici o antropologici, dati criminalistici, confronto tra molecole organiche, indagini di mercato, classificazione di strumenti e posti di lavoro o di prodotti in una grande azienda, divisione dei componenti di un computer in gruppi per poterli disporre in modo ottimale.

La statistica matematica

Per fare bene il suo lavoro, lo statistico che lavora in un'azienda, nell'amministrazione pubblica o nella ricerca clinica, deve comprendere i compiti che gli vengono posti e deve essere in grado di interagire con i committenti. Nonostante ciò la statistica è di sua natura una disciplina matematica che si basa sul calcolo delle probabilità, una teoria astratta e difficile, e richiede conoscenze tecniche in altri campi della matematica come analisi reale e complessa, analisi armonica, calcolo combinatorio (ad esempio per la pianificazione di esperimenti). Nella cluster analysis sarà compito dello statistico scegliere la rappresentazione dei dati e le misure per la somiglianza o diversità di individui e gruppi.

Ci sono tanti campi di applicazione della statistica in medicina, bioinformatica, farmacologia, matematica finanziaria, linguistica, demografia, che uno studente che intraprende questa professione dopo aver acquisito una solida formazione matematica può sperare in un'attività interessante e gratificante. L'abitudine ai dati e alla loro interpretazione formerà le sue capacità di giudicare situazioni complesse in modo razionale oltre a fornirgli un ricco patrimonio di informazioni, quindi potrà anche aspirare a una carriera amministrativa o manageriale.

Nel suo lavoro giornaliero potrà, nei contatti con ricercatori clinici o amministratori o con l'opinione pubblica utilizzare le proprie conoscenze teoriche per chiarire il significato di risultati di test clinici o di rilievi statistici o per proporre nuovi esperimenti o indagini.

Grafica al calcolatore – curve di Bézier cubiche e algoritmo di Casteljeau

Come fanno i computer e le stampanti a disegnare una curva?

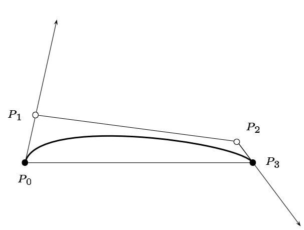
Una delle tecniche più usate è l'algoritmo di Casteljeau, utilizzato in molti pacchetti di CAD e facilmente programmabile. La semplicità di questo algoritmo (solo addizioni e divisioni per due) da un lato e la fondatezza matematica dall'altro ne fanno uno degli strumenti preferiti della grafica al calcolatore.

L'algoritmo di Casteljeau si applica direttamente a curve piane con una rappresentazione parametrica polinomiale di terzo grado

$$P(t) = \begin{pmatrix} a + bt + ct^2 + dt^3 \\ a' + b't + c't^2 + d't^3 \end{pmatrix}$$

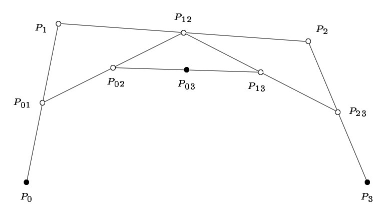
per $t_0 \leq t \leq t_1$ (con $t_0 < t_1$). In ogni punto una tale curva ha un ben definito vettore tangente $\dot{P}(t)$ (che può essere nullo). Siano $P_0 := P(t_0)$, $P_3 := P(t_1)$, V_0 il vettore tangente in P_0 e V_3 il vettore tangente in P_3 ($:=$ significa *uguale per definizione*).

Introduciamo adesso i *punti di controllo* $P_1 := P_0 + \frac{t_1 - t_0}{3} V_0$ e $P_2 := P_0 - \frac{t_1 - t_0}{3} V_3$. Per poter parlare delle rette tangenti in P_0 e P_1 assumiamo che V_0 e V_3 siano entrambi diversi dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – in pratica sarà sempre così, anche se non è automatico, come mostra l'esempio $P(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Allora P_1 si trova sulla retta tangente in P_0 alla curva e il vettore $P_1 - P_0$ punta nella stessa direzione come il vettore tangente alla curva in P_0, cioè V_0, mentre P_2 si trova sulla retta tangente in P_3 e mostra nella direzione opposta a quella del vettore tangente in P_3, cioè V_3.



La curva è piuttosto piatta e ciò si accorda col fatto che, come si potrebbe dimostrare facilmente, essa è tutta contenuta nell'inviluppo convesso dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e P_3, come si vede anche nel disegno, in cui le frecce sono i vettori tangenti.

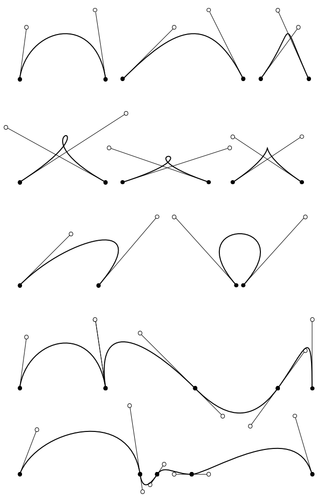
Da questi punti possiamo disegnare la curva nel modo seguente: Siano P_{01}, P_{12} e P_{23} i punti di dimezzamento dei segmenti P_0P_1, P_1P_2 e P_1P_3. Disegniamo poi due altri punti P_{02} e P_{13} dimezzando $P_{01}P_{12}$ e $P_{12}P_{23}$. Se adesso dimezziamo un'ultima volta anche il segmento $P_{02}P_{13}$, otteniamo un punto P_{03} che, come si può dimostrare, è un punto della curva; infatti $P_{03} = P(\frac{t_0+t_1}{2})$.



Adesso è importante che non solo il punto ottenuto P_{03} appartiene alla curva, ma, come con la matematica si dimostra, P_{01} e P_{02} sono i punti di controllo del pezzo di curva tra P_0 e P_{03}, e che similmente P_{13} e P_{23} sono i punti di controllo del tratto tra P_{03} e P_3. Possiamo quindi ripetere la procedura separatamente per le due metà, ottenendo altri due punti della curva, e così via. Quando le distanze sono inferiori a una certa risoluzione prefissata, l'algoritmo viene terminato. È in questo modo che le curve vengono disegnate nel *PostScript*, un famoso linguaggio di programmazione per stampanti.

Cosa succede se aggiungiamo un altro pezzo di curva definito nello stesso modo, diciamo dai punti $Q_0 = P_3$, Q_1, Q_2 e Q_3, alla prima curva?

Se P_2, $P_3 = Q_0$ e Q_1 si trovano sulla stessa retta, allora questa sarà la comune retta tangente delle due curve nel punto di congiunzione; una curva (cubica) di Bézier è una curva che si ottiene in questo modo da più pezzi; Bézier (1910-1999) era un ingegnere della Renault (Casteljeau lavorava alla Citroen). Come si vede dalle figure, un passaggio liscio da un pezzo all'altro lo si avrà solo nel caso che P_2 e Q_1 si trovano su lati opposti del punto di congiunzione, altrimenti si avrà una cuspide. Ecco alcuni esempi di curve di Bézier:



Con un po' di esperienza si impara come scegliere i punti di controllo per ottenere curve della forma desiderata. Quando parlavamo all'inizio di fondatezza matematica intendevamo che tutte le costruzioni si basano sulla matematica. In qualsiasi modo in cui, ad esempio lavorando con un programma di CAD, scegliamo i punti di base P_0 e P_3 e i punti di controllo P_1 e P_2, otteremo sempre una ben determinata curva cubica:

<u>Teorema:</u> Siano dati quattro punti P_0, V_0, P_3, V_3 del piano reale e due numeri reali t_0 e t_1 con $t_0 < t_1$. Allora esiste un'unica curva a rappresentazione parametrica polinomiale di (al massimo) terzo grado,

$$P(t) = \begin{pmatrix} a + bt + ct^2 + dt^3 \\ a' + b't + c't^2 + d't^3 \end{pmatrix}$$

tale che $P(t_0) = P_0$, $P(t_1) = P_3$, $\dot{P}(t_0) = V_0$ e $\dot{P}(t_1) = V_3$.

Ciò che abbiamo fatto finora richiede solo le conoscenze di uno studente di matematica al primo semestre. Ma per disegnare curve ancora più adatte a compiti specifici o superficie, per eseguire costruzioni complesse (intersezioni di curve e superficie ad esempio nella costruzione di macchine), per gli effetti di luce e di ombra, per gli algoritmi di visibilità e la rappresentazione di oggetti tridimensionali e in movimento, è necessario un solido bagaglio di tecniche matematiche (geometria elementare, algebra lineare e multilineare, geometria differenziale, analisi numerica). Più ricco è questo bagaglio, più facile sarà per il matematico tradurre i concetti matematici in algoritmi e programmi per il calcolatore.

Il profilo professionale del matematico

Il laureato in matematica non viene iscritto in un ordine professionale e otticamente e formalmente la professione del **matematico** sembra poco definita. Ma, nonostante le mancanze dei piani di studi (a cui lo studente può in una certa misura rimediare con lo studio personale, soprattutto se le istituzioni universitarie forniscono mezzi e attenzione alle iniziative personali degli studenti), la matematica è oggi una delle discipline scientifiche più utilizzate.

Il matematico è allo stesso tempo uno specialista e un generalista. È uno **specialista** del ragionamento preciso, che sa individuare per il suo allenamento spesso molto velocemente le conclusioni errate e sa concepire modelli formali per i componenti di un sistema ingegneristico o un fenomeno naturale o economico. È un **generalista** perché le leggi formali e astratte hanno una validità universale e sono quindi applicabili in campi apparentemente molto distinti. Gli stessi algoritmi di ottimizzazione che sono utili nella pianificazione delle risorse di un'impresa vengono usati in bioinformatica per confrontare le successioni del DNA, ad esempio per ricostruire l'evoluzione degli organismi o per scoprire geni in batteri o parassiti, che codificano per enzimi necessari a quell'agente infettivo ma non all'uomo. Individuato un tale gene, si possono creare farmaci che impediscono al batterio o parassita di utilizzare quell'enzima, ma sono innocui all'uomo. Quindi la matematica di oggi è anche **interdisciplinare**. Farebbe bene lo studente di matematica a dedicare un po' di tempo anche a queste materie al di fuori del proprio corso di studio (biologia o economia ad esempio), per avere più motivazione durante lo studio e un allenamento anticipato alle applicazioni.

Spesso i laureati di matematica pensano che oltre alla carriera scolastica l'unico sbocco professionale sia il lavoro in una software house. La richiesta di informatici oggi è molto alta e sicuramente l'abitudine alla precisione del matematico fa in modo che sia un abile programmatore. Fanno bene quindi le software house a cercare i loro collaboratori tra i laureati di matematica, che in questa attività possono essere più bravi dei laureati di altre discipline. Anche nell'informatica però ci sono altre professioni, più ingegneristiche, dove un matematico può collaborare in un team, come nell'elaborazione dei segnali, nella sicurezza dei dati (solo i metodi matematici possono dare affidabilità alle tecniche di crittografia), nell'invenzione di nuovi linguaggi di programmazione, nella programmazione logica, nello sviluppo di basi di dati). Ma sono tanti i campi di applicazione della matematica.

Nella **matematica tecnica e industriale** il matematico tipicamente lavorerà in un team con ingegneri o fisici nell'analisi di sistemi, nella simulazione (ad esempio nella costruzione di macchine), nell'ottimizzazione lineare e non lineare, nel calcolo numerico di grandi sistemi). Metodi di analisi armonica numerica e della topologia generale vengono impiegati nell'elaborazione delle immagini (di cui il controllo di qualità di prodotti industriali è solo una delle molte applicazioni).

Molti metodi dell'**informatica** appartengono alla matematica pura: Teoria dei grafi per la descrizione di algoritmi, calcolo combinatorio e teoria dei numeri per la crittografia e lo studio dei codici, logica matematica e algebra universale per lo sviluppo di linguaggi di programmazione e di basi di dati, computer algebra e corpi finiti nella trasmissione di segnali, statistica e teoria dell'informazione nella linguistica computazionale, con importanti applicazioni ai sistemi di comprensione della voce da parte di sistemi informatici e alla traduzione automatica di linguaggi naturali. L'allenamento del matematico è di grande aiuto nell'invenzione di nuovi linguaggi. Un linguaggio molto diffuso tra gli amministratori di sistema (ma anche tra gli operatori di borsa americani, che lo usano per estrarre informazioni dai notiziari), il **Perl**, è allo stesso tempo un linguaggio ad altissimo livello che contiene la programmazione funzionale. Un matematico lo può usare in modo diverso e molto efficiente. La **programmazione logica** viene oggi usata non solo per i sistemi esperti, ma fornisce anche un nuovo approccio a molti problemi classici dell'ottimizzazione, soprattutto aziendale (constraint logic programming). Lo sviluppo di metalinguaggi o di linguaggi markup (ad esempio basati sulle specifiche SGML/XML o inventati ad hoc) può essere un'interessante attività per un matematico.

In **economia** e **finanza** il matematico può lavorare nell'ottimizzazione (ricerca operativa - utilizzo ottimale di risorse e investimenti), nella pianificazione di processi produttivi, nel calcolo di contratti finanziari ottimali o dei premi di assicurazioni). In questi campi le tecniche matematiche utilizzate sono molto sofisticate (sia i metodi di ottimizzazione che le teorie stocastiche per la matematica finanziaria).

La **statistica matematica** è un campo applicativo con forti necessità di fondamenti teorici (teoria della misura, calcolo delle probabilità). Oltre che in molti rami dell'economia (statistica nel marketing, processi stocastici e serie temporali nelle previsioni economiche) la statistica è importante in campo biomedico (sanità pubblica, epidemiologia, ricerca clinica).

Sempre più attuali diventano i modelli matematici in **biologia** e **medicina**. Elaborazione delle immagini; modelli matematici per il cervello, il fegato, i reni, il sistema cardiocircolatorio; descrizione di processi ecologici o infettivi mediante sistemi dinamici; modelli di evoluzione; pianificazione di misure contro insetti e gastropodi o agenti infettivi da essi trasmessi (malaria, bilharziosi). La decifrazione sempre più completa del genoma umano (ma quasi altrettanto importante è quella di altri organismi, ad esempio di batteri o virus, o di organismi modello come il moscerino Drosophila su cui studiare processi più semplificati e standardizzati della biologia molecolare e della sua codifica) richiede nuove tecniche per la raccolta e l'interpretazione delle nuove informazioni (confronto di genomi, previsione delle funzioni degli enzimi da essi espressi, ad esempio mediante algoritmi combinatorico-statistici oppure programmazione logica).

Estremamente interessanti sono in **chimica** la modellistica molecolare e il disegno ottimale di farmaci (drug discovery), dove il matematico può collaborare in molti modi (grafica al calcolatore, ottimizzazione genetica per scoprire nuovi farmaci, sviluppo di linguaggi markup per la chimica).

Nella **ricerca matematica** si lavora in molti campi, spesso di base per le applicazioni o le interazioni interdisciplinari: Geometria differenziale e teoria dei gruppi nella fisica teorica (teoria della relatività e teoria delle particelle), equazioni differenziali parziali (quasi tutti i campi della fisica matematica, meccanica dei fluidi, chimica quantistica, semiconduttori), teoria dei numeri (un campo antico con molti problemi irrisolti, con applicazioni in crittografia, ottimizzazione, generazione di numeri casuali), topologia generale, analisi armonica, analisi funzionale.

Conclusione. C'è una certa tendenza di voler attirare studenti cercando di trasmettere solo le parti più elementari, in modo discorsivo e fenomenologico e con esami facili, sottovalutando gli studenti. Ma il laureato in matematica trae la sua qualifica dal suo allenamento ad alto livello. La strada da intraprendere è quindi quella di far vedere le molte possibilità di fare matematica, di offrire una preparazione che si distingue dagli altri corsi di laurea, fornendo corsi e attrezzature adeguati, per poter attrarre gli studenti più ambiziosi e potergli proporre onestamente e senza trucchi questo percorso formativo.

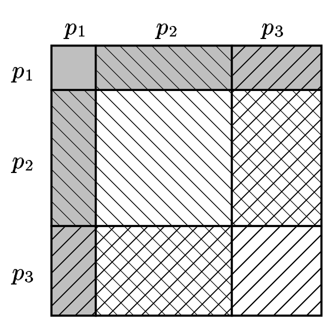
La Nuova Ferrara 7 agosto 2000

La genetica delle popolazioni

Una volta limitata allo studio dell'evoluzione fenotipica, oggi la genetica delle popolazioni è uno strumento importante anche nella comprensione a livello molecolare della storia della vita e delle relazioni tra le varie classi di organismi viventi. Studia quantitativamente le modificazioni e gli scambi dell'informazione genetica, la nascita di nuove specie, le interazioni tra specie e le interazioni di popolazioni con l'ambiente.

In genetica una popolazione denota un gruppo di individui che possono scambiarsi materiale genetico. Assumiamo che in una tale popolazione gli organismi siano diploidi rispetto a una caratterista che si presenta nelle forme (*alleli*) $a_1,...,a_n$ con le frequenze $p_1, \ldots, p_n$; ciò implica $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Eseguiamo un turno di accoppiamenti casuali; otterremo degli individui con coppie di alleli a_ia_j e frequenze (ideali, cioè probabilistiche) p_i^2 per a_ia_i e $2p_ip_j$ per a_ia_j se $i \neq j$ (perché le coppie a_ia_j e a_ja_i sono identiche).

Quali sono le frequenze degli alleli dopo questo turno di accoppiamenti? La frequenza dell'allele a_1 è (o meglio dovrebbe probabilisticamente essere) uguale a $p_1' = p_1^2 + p_1p_2 + \cdots + p_1p_n = p_1(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = p_1$. Nello stesso modo vediamo che $p_k' = p_k$ per ogni k, quindi le frequenze degli alleli dopo l'accoppiamento non sono cambiate e in un secondo turno di accoppiamenti avremo le stesse frequenze di prima anche per le coppie di alleli e così via – le frequenze non cambiano più! Questa situazione, l'*equilibrio di Hardy-Weinberg*, può essere rappresentata in modo intuitivo e convincente con un *quadrato di Punnett*:



Ogni lato di questo quadrato ha lunghezza uno, le probabilità degli alleli sono riportate in proporzione; la frequenza della coppia a_ia_j è allora uguale all'area dei rettangoli d'incrocio (due per $i \neq j$, uno per $i = j$) delle righe e colonne corrispondenti.

Il quadrato di Punnett è molto pratico, perché in esso si vedono facilmente alcune relazioni importanti in genetica. Assumiamo per esempio che l'allele a_1 esprima la caratteristica di avere occhi grigi e che sia dominante sugli altri due, cioè che anche i portatori di a_1a_2 e a_1a_3 abbiano occhi grigi, mentre a_3 (occhi verdi) sia dominante su a_2 (occhi castani). Allora si vede bene dal quadrato che (sotto queste assunzioni immaginarie) il numero delle persone con occhi grigi (tutte le aree colorate in grigio) è superiore a quello delle persone con occhi castani (solo il quadrato centrale che corrisponde agli omozigoti a_2a_2), nonostante che la probabilità dell'allele a_2 sia molto maggiore di quella di a_1. Infatti, prendendo le misure sul quadrato, si trova facilmente:

occhi grigi	31%
occhi castani	25%
occhi verdi	44%

In popolazioni naturali le condizioni ideali necessarie perché valga l'equilibrio di Hardy-Weinberg spesso non sono soddisfatte (popolazioni molto piccole, sovrapposizione delle generazioni, migrazioni, mutazioni, selezione naturali, morte di individui ecc.); la genetica delle popolazioni richiede allora metodi matematici più elaborati: le *algebre genetiche* forniscono una teoria algebrica delle leggi di Mendel (di cui il quadrato di Punnett è la rappresentazione grafica) e delle sue generalizzazioni e permettono di descrivere condizioni complesse (che però non possono comprendere mutazioni) in maniera trasparente e algoritmica, mentre la teoria dei *processi stocastici*, una disciplina molto difficile della matematica che studia l'evoluzione di situazioni probabilistiche nel tempo, e altri metodi probabilistici e statistici forniscono stime per lo sviluppo futuro o la storia di popolazioni sottoposte a mutazioni genetiche casuali o indotte dall'ambiente.

Ci sono ancora molte cose da fare per i matematici, sia nella definizione e scelta dei concetti di base e degli strumenti più adatti che nel lavoro pratico, in questo affascinante e sempre più attuale campo della scienza.

L'analisi matematica del genoma

La bioinformatica è una disciplina prevalentemente matematica che fornisce algoritmi e tecniche statistiche e combinatorie per il confronto di sequenze di nucleotidi (DNA) e di aminoacidi, per la predizione della struttura spaziale di proteine dalla successione degli aminoacidi (ad esempio tramite programmazione logica o considerazioni statistiche), per la costruzione di alberi filogenetici, per la valutazione di probabili effetti biochimici o farmacologici di molecole.

La disponibilità completa del genoma dell'uomo e di molte altre specie aprirà probabilmente una nuova era della biochimica e della farmacologia; è significativo che uno dei personaggi più di spicco nel grande progetto per lo studio del genoma umano è Eric Lander, anni fa un matematico noto nel calcolo combinatorio. Soprattutto negli Stati Uniti molti matematici lavorano ormai in bioinformatica.

Sicurezza dei dati

Nell'economia elettronica trattative, vendite e pagamenti si effettuano via rete, ma quante volte senza preoccuparsi delle notizie che si sono fornite: numeri di carte di credito, coordinate bancarie, numeri PIN, generalità e recapiti che circolano liberamente con poca o nessuna precauzione.

In campo amministrativo, giuridico e medico dove sempre più informazioni personali vengono raccolti in grandi banche dati la situazione è altrettanto preoccupante: cartelle cliniche circolano liberamente con dati molto personali passando per le mani di segretarie o addetti ad uffici pubblici oppure vengono archiviati su calcolatori ai quali il personale di servizio può accedere liberamente.

Le offerte di prodotti crittografici commerciali sono numerose e non sempre è facile giudicarne la validità (nella sicurezza dei dati un solo difetto può rendere invalido un prodotto).

Le tecnologie di sicurezza che si basano sulla crittografia a chiave pubblica, sulle firme digitali e sull'uso di certificati sono i meccanismi fondamentali per realizzare un sistema di trasmissione e di compilazione sicuro. Gli algoritmi crittografici ritenuti più sicuri si fondono su parti talvolta avanzate della matematica (teoria dei numeri, geometria algebrica, calcolo combinatorio, calcolo delle probabilità), spesso essenziali per la costruzione degli algoritmi e la verifica della loro validità.

I metodi matematici della chimica

Il ruolo della matematica in chimica è in rapida crescita, essa viene applicata ad esempio nel disegno razionale di farmaci, nella selezione e sintesi di nuovi materiali, come guida nella ricerca di nuovi catalizzatori, nello sviluppo di algoritmi per la dinamica molecolare, nella risoluzione di problemi di ottimizzazione di conformazioni, per la comprensione del ripiegamento delle proteine, nello studio del trasporto di sostanze attraverso le membrane esterne ed interne della cellula (fondamentale per la farmacologia), nell'analisi del complicato avvolgimento delle molecole di DNA, nello studio della struttura di cristalli e quasicristalli, nel confronto tra i modelli della chimica quantistica e i modelli approssimati.

La geometria e la topologia possono contribuire alla comprensione della struttura tridimensionale delle molecole, la teoria dei grafi permette non solo la visualizzazione dei legami chimici, ma può essere applicata alla rappresentazione di reazioni chimiche oppure nell'organizzazione di banche dati di molecole o della letteratura chimica; il calcolo combinatorio e la teoria dei gruppi intervengono nella chimica combinatoria, una tecnica sempre più utilizzata dall'industria farmaceutica. Il matematico può lavorare nello sviluppo di algoritmi per la trasformazione di Fourier per le applicazioni nella spettroscopia molecolare oppure nella chimica quantistica computazionale.

Equazioni differenziali parziali, analisi armonica, processi stocastici, statistica, analisi numerica, teoria combinatoria dei gruppi finiti, teoria dei grafi, quasiordini, teoria dei numeri (generazione di numeri casuali), geometria computazionale e grafica al calcolatore nella modellistica molecolare (computer aided molecular design e computer aided drug design): sono poche le discipline matematiche che non hanno interessanti applicazioni in chimica.

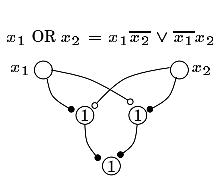
Reti neurali

Lo studio delle reti artificiali di neuroni è nato dal desiderio di scoprire i meccanismi operativi della mente umana, per simulare processi cognitivi dei quali non si conoscono le modalità di funzionamento o che comunque non possono essere studiati facilmente su un cervello vivente. È indubbio il fascino che esercita la possibilità di sondare fenomeni quali il pensiero, la memoria, il linguaggio, l'adattamento all'ambiente, l'apprendimento, la capacità di generalizzare e di auto-organizzarsi, che sono caratteristici delle specie viventi e che da lungo tempo sono oggetto di studio per filosofi, psicologi, biologi. L'ingegnere e l'economista considerano le reti neurali come minuscoli cervelli artificiali che possono essere applicati con successo in problemi di ottimizzazione, nell'approssimazione di funzioni (ad esempio di serie temporali nell'analisi dei mercati), in cibernetica e robotica.

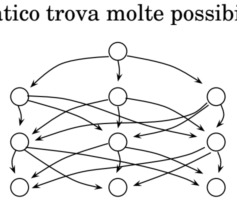
Che le reti neurali possono nel migliore dei casi solo costituire un modello semplificato del cervello umano, ma neanche lontanamente raggiungere le sue prestazioni, segue da una semplice considerazione quantitativa: una rete neurale consiste tipicamente di alcune decine di neuroni con altrettante poche connessioni, il cervello umano di circa 100 miliardi di neuroni, ognuno dei quali viene raggiunto da ad esempio 15000 connessioni (altamente ottimizzate dall'evoluzione) con altri neuroni, implicando una marcata contemporanità dell'elaborazione in moltissimi punti e una rappresentazione associativa delle conoscenze non realizzabili dalle tecnologie attuali.

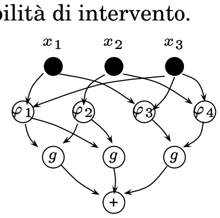
Nelle applicazioni tecniche oltre che per le capacità di apprendimento le reti neurali si distinguono soprattutto per la loro tolleranza a piccoli danni, a dati non perfettamente affidabili.

Matematicamente possono essere considerate come reti di funzioni, in altre parole come rappresentazioni grafiche di funzioni composte complicate. Nell'assiomatica delle reti neurali e nell'analisi matematica del loro funzionamento il matematico trova molte possibilità di intervento.



rete di McCulloch-Pitts


rete a più strati



$y = f(x_1, x_2, x_3)$

La scoperta di farmaci

È poco noto che il numero dei bersagli molecolari dei farmaci attualmente prodotti è piuttosto piccolo (circa 500) e che lo sviluppo di una nuova sostanza farmaceutica consuma somme ingenti (600 miliardi di lire per una nuova molecola). Oltre ai bersagli classici (recettori sulle membrane cellulari, enzimi e recettori ormonali) in futuro avranno sempre più importanza i bersagli legati al genoma e ciò implicherà, secondo le previsioni, un probabile aumento dei bersagli a molte migliaia in pochi anni.

È forse sorprendente che in un recente testo farmacologico si trovi il seguente brano che abbiamo tradotto: *"I matematici negli ultimi decenni hanno aggiunto i principi dell'evoluzione al loro strumentario. Utilizzando replicazioni, mutazioni e incroci essi hanno sviluppato algoritmi genetici. Chi ha mai potuto ammirare come un tale algoritmo risolve i più complessi problemi di ottimizzazione in tempo incredibilmente breve, non avrà più dubbi che anche l'evoluzione delle specie biologiche si è svolta in modo analogo."*

Nell'applicazione di questi metodi il matematico può intervenire in vari modi: nello sviluppo e nel controllo degli algoritmi (generazione di numeri casuali per la ricerca di conformazioni ottimali in uno spazio multidimensionale di conformazioni, grafica al calcolatore), nella codifica dei dati, nell'organizzazione delle informazioni.

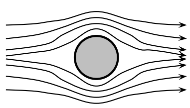
Il futuro dell'industria farmaceutica sarà fortemente influenzato dai progressi nella comprensione dettagliata delle informazioni contenute nel genoma e della struttura e funzione delle molecole biologiche per i processi normali e patologici della vita, e quindi anche una sempre migliore comprensione molecolare delle malattie che permetterà una progettazione razionale e mirata di molecole farmaceutiche. Nuove tecniche permettono di fornire in tempi brevi numerosi composti da sottoporre a test e da classificare; il matematico, nel suo ruolo di semplificatore della complessità, può nella ricerca sviluppare nuovi metodi di classificazione o nuovi test statistici, oppure collaborare in un team con chimici e farmacologi.

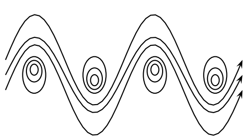
Geomatematica

Questo è un campo nuovo, molto bello e difficile della matematica. Funzioni speciali della geofisica matematica, funzioni armoniche sulla sfera, operatori pseudodifferenziali della geodesia matematica, metodi di approssimazione multivariata, splines, wavelets, metodi degli elementi finiti nella geodesia, determinazione del campo gravitazionale della Terra, analisi delle deformazioni della superficie terrestre, effetti della rifrazione atmosferica, determinazione del campo magnetico della Terra mediante l'analisi di dati trasmessi da satelliti, sono solo alcuni dei temi di questa interessante disciplina.

La dinamica dei fluidi

Uno dei campi più classici e allo stesso tempo più attuali della fisica matematica è la dinamica dei fluidi e dei gas. Essa richiede un ricco bagaglio di tecniche matematiche, soprattutto dall'analisi (equazioni differenziali parziali) e dalla geometria differenziale (calcolo tensoriale), oltre a solide conoscenze in meccanica dei continui e termodinamica (densità e viscosità e altre caratteristiche di un fluido o di un gas dipendono dalla temperatura e viceversa – un gas si scalda se viene compresso). È una disciplina molto vasta con tantissime applicazioni: costruzione di macchine (iniettori, turbine, ventilatori, pompe), ale di aerei, eliche di aerei e di navi, ruote a vento, modelli per nuovi materiali, flussi in medi porosi, raffreddamento di vetri, produzione di fibre plastiche, serbatoi di olio, ottimizzazione del caffè espresso, studio della formazione di vortici e turbolenze, combustione, detonazioni, modelli per il movimento di animali (pesci, serpenti, uccelli), modelli aerodinamici per la meteorologia (circolazioni e turbolenze atmosferiche, moto dei venti attorno a grandi catene di montagne, uragani, convezione termica nell'atmosfera) e l'agricoltura (moto dell'aria in piantagioni o foreste), aerodinamica di edifici, pianificazione di esperimenti aerodinamici e idrodinamici (costruzione di canali aerodinamici), previsione delle interazioni con l'aria di treni ad alta velocità, stima delle esposizioni al vento di un ponte. In medicina la fluidodinamica del sangue è un campo importante ma ancora piuttosto difficile (prevenzione di aneurismi e patologie circolatorie).


flusso attorno a un cilindro


vortici di Kármán

La matematica e le malattie tropicali

È tipico per la natura viva che essa pone dei problemi che difficilmente possono essere perfettamente modellati con i metodi matematici classici sviluppati in genere per la fisica o l'ingegneria. Ciò da un lato vale naturalmente anche per le malattie tropicali come malaria, bilharziosi, filariosi, leishmaniosi, dall'altro lato queste malattie colpiscono ogni anno centinaia di milioni di persone, sono trascurate dalle ditte farmaceutiche (i pazienti non possono pagare) e richiedono quindi interventi ecologici o politici molto impegnativi. Alla pianificazione di questi interventi anche i modelli matematici possono contribuire benché non sempre i matematici vadano nella giusta direzione. La medicina tropicale è attraente per il suo fascino e per il lato umano; per il matematico rappresenta un'avventura da intraprendere solo a livello di ricerca in uno dei relativamente pochi gruppi affermati.

La matematica degli ingegneri

Problemi ingegneristici hanno quasi sempre una forte componente matematica: dalla teoria dei materiali all'elaborazione dei segnali, dall'interpretazione di misurazioni al controllo di qualità, da modelli per il corpo umano e i suoi movimenti (ad esempio nell'industria automobilistica, ma anche nell'industria tessile - in sartoria!) all'analisi strutturale di edifici e ponti, dai modelli matematici per i processi fisici e chimici in un altoforno all'ottimizzazione dell'illuminazione in impianti industriali, dallo studio dell'erosione nel letto di un fiume ai problemi inversi della geofisica (importanti per esempio anche nell'analisi strutturale di monumenti e edifici), dappertutto si utilizza la matematica.

Potremmo elencare tanti altri campi di applicazione: la geometria dei movimenti (cinematica) in robotica e nella costruzione di macchine, teoria dei sistemi e controllo ottimale nell'automazione, modellazione di reazioni chimiche nella chimica industriale, ottimizzazione strutturale di componenti di macchine o della composizione di punte per trapani da dentista, microstruttura di metalli, costruzione di autoveicoli, treni ed aerei, ottimizzazione di orari ferroviari, pianificazione urbanistica, telecomunicazioni. Il matematico nel team o come responsabile dell'organizzazione di un servizio può essere prezioso.

La matematica in azienda

La matematica aziendale comprende da un lato la ricerca operativa, cioè l'ottimizzazione delle risorse di un'azienda o di un ente, una disciplina che si è evoluta dall'ottimizzazione lineare a metodi sempre più avanzati (geometria dei numeri, topologia algebrica, programmazione logica) dell'ottimizzazione quadratica, convessa, dinamica, intera, e dall'altro, soprattutto in campo bancario, la moderna sofisticata matematica finanziaria che deriva dalla matematica attuariale, ma utilizza strumenti matematici molto complicati.

Sempre attuale rimane in economia la teoria dei giochi e delle trattative. Processi stocastici e serie temporali oltre che in matematica finanziaria hanno molte altre applicazioni in economia: osservazioni del carico elettrico della rete ENEL, cambiamenti demografici, andamento di mercati e borse.

Il matematico può lavorare nei reparti di ricerca operativa in grandi ditte, nello sviluppo di software aziendale, nel controllo della produzione, nel servizio statistico, nel campo attuariale, nelle banche, nella pubblica amministrazione.

Linguaggi di documentazione

Potrebbe sembrare che i linguaggi di markup o di documentazione, di cui i più noti sono l'SGML (Standard Generalized Markup Language) e l'XML (extensible markup language) e di cui l'HTML delle pagine web costituisce la versione più diffusa e più povera, abbiano poco da fare con la professione del matematico, il quale però, con la sua educazione formale, atta a intravedere le linee essenziali di un compito, e con il suo allenamento a comprendere o inventare modelli formali, può essero tra i più idonei a svolgere un lavoro nel campo della documentazione. La riduzione di grandi quantità di dati alla schematicità di un modello è per sua natura il mestiere del matematico che potrà esplicare la sua abilità nella strutturazione dell'informazione, ad esempio nello sviluppo di grammatiche formali adatte a un problema o semplicemente per la sua visione generale delle problematiche organizzative.

È un'attività molto interessante che comprende la specifica dei prodotti di un'azienda che richiede spesso una documentazione di decine o centinaia di migliaia di pagine (quattro milioni di pagine per un aereo), che più volte all'anno deve essere aggiornata e distribuita ai centri di assistenza e/o ai clienti e venditori, la gestione delle notizie in agenzie di stampa e degli articoli pubblicati in grandi quotidiani, l'archiviazione di documenti in modo conforme a norme di legge, la gestione di cartelle cliniche, la redazione di manuali e dizionari.