MATEMATICA PURA E MATEMATICA APPLICATA

Che cos'è la matematica?

Dividiamo questa domanda in due sottodomande, cercando di indicare prima i costituenti elementari della matematica, poi come la matematica deve essere usata.

I componenti elementari del ragionamento matematico sono enunciati della forma

ipotesi implica tesi

In questo senso la matematica non conosce affermazioni assolute, ma soltanto proposizioni che si compongono ogni volta di un preciso elenco delle ipotesi che vengono fatte, e poi di una altrettanto precisa specificazione dell'enunciato che secondo quella proposizione ne consegue. A questo punto non è detto che la proposizione sia valida, bisogna ancora *dimostrarla*, e ciò significa, nella matematica, dimostrare che la tesi segue dalle ipotesi unite agli assiomi e ai risultati già ottenuti precedentemente e alle regole logiche che possiamo applicare. Gli *assiomi* sono enunciati che vengono messi all'inizio di una teoria, senza dimostrazione; ogni altro enunciato deve essere invece dimostrato.

È importante che bisogna sempre dimostrare una proposizione - che è *sempre* della forma *ipotesi implica tesi*! - nella sua interezza, cioè che si tratta di dimostrare la validità dell'implicazione e non la validità della tesi. L'enunciato

A implica B

può essere vero, anche se B non e vero. Ad esempio in logica si impara che, se l'ipotesi A è falsa, allora la proposizione *A implica B* è sempre vera. Quindi l'affermazione

se 3 è uguale a 4, allora mi chiamo Piero

è sempre vera, indipendentemente da come mi chiamo io. Nella pratica matematica ciò significa che da una premessa errata si può, con un po' di pazienza, dedurre qualunque cosa.

La validità si riferisce quindi sempre a tutta la proposizione *A implica B*.

Mentre il matematico puro cerca soprattutto di arricchire l'edificio delle teorie matematiche con nuovi concetti o con dimostrazioni, talvolta assai difficili, di teoremi, il matematico applicato deve anche saper usare la matematica. Nelle scienze naturali e sociali, le quali pongono problemi molto complessi, uno dei compiti più importanti è spesso la separazione degli elementi essenziali di un fenomeno dagli aspetti marginali. In queste scienze le informazioni disponibili sono quasi sempre incomplete, cosicché possiamo ogni volta descrivere soltanto una piccola parte della realtà. Anche quando disponiamo di conoscenze dettagliate, queste si presentano in grande quantità, sono complesse e multiformi e richiedono concetti ordinatori per poterle interpretare. Ciò significa che bisogna *estrarre* e *semplificare*.

Un modello matematico di un fenomeno ha soprattutto lo scopo di permettere di comprendere meglio quel fenomeno, quindi di metterne in evidenza cause e effetti e comportamenti quantitativi, di individuarne i tratti essenziali e i meccanismi fondamentali. In un certo senso la matematica consiste di tautologie, e nel modello matematico si tenta di evidenziare le tautologie contenute nel fenomeno studiato. La teoria cerca di comprendere i processi e legami funzionali di un campo del sapere.

La mente umana pensa in modelli. Anche quando non facciamo matematica della natura, cerchiamo di comprendere la natura mediante immagini semplificate. La teoria inizia già nell'istante in cui cominciamo a porci la domanda quali siano gli aspetti essenziali di un oggetto o di un fenomeno. La matematica non è dunque altro che un modo sistematico e controllato di eseguire questi processi di astrazione e semplificazione costantemente attivi nel nostro intelletto.

Il modello matematico, una volta concepito, se sviluppato correttamente, si mostra poi di una esattezza naturale che spesso impressiona l'utente finale che è tentato di adottare gli enunciati matematici come se essi corrispondessero precisamente ai fenomeni modellati. Ma ciò non è affatto vero: La precisione del modello matematico è soltanto una precisione interna, tautologica, e la semplificazione, quindi verità approssimata e parziale, che sta all'inizio del modello, si conserva, e più avanza lo sviluppo matematico, maggiore è il pericolo che iterando più volte l'errore, questo sia cresciuto in misura tale da richiedere un'interpretazione estremamente prudente dei risultati matematici. Proprio le teorie più avanzate, più belle quindi per il matematico puro, sono spesso quelle più lontane dalla realtà. Questo automatismo della matematica può essere però anche fonte di nuovi punti di vista e svelare connessioni nascoste.

Un modello matematico è perciò solo un ausilio per la riflessione, per controllare il contenuto e la consistenza logica di un pensiero o di una ricerca. In altre parole, modelli sono strumenti intellettuali e non si possono da essi aspettare descrizioni perfette della realtà. Essi non forniscono risposte complete, ma indicano piuttosto quali siano le domande che bisogna porre.

L'astrattezza intrinseca della matematica comporta da un lato che essa rimanga sempre diversa dalla realtà, offre però dall'altro lato la possibilità di *generalizzare* i risultati ottenuti nelle ricerche in un particolare campo applicativo o anche uno strumento della matematica pura a problemi apparentemente completamente diversi, se questi hanno proprietà formali in comune con il primo campo.

„I risultati della matematica solo raramente sono applicati direttamente: in realtà solo le definizioni risultano veramente utili.“ (David Sharp, citato in Rota, pag. 159)

„Neither the chemist nor the mathematician is generally the optimal person to construct a mathematical model, as the model by its very nature lies at the interface between theory and observation. To build the model, an iterative process of refinement is required ... It is exactly this need for iterative model construction that may motivate the collaboration of mathematicians and chemists, against the self-referential and conservative tendencies of each discipline ...“ (Stillinger, pag. 17)

Indice

Come e su che cosa si lavora

- ✻ In genere lavoro in un team con ingegneri, biologi o bancari. Lavoro autonomo o in team nella programmazione.
- ✻ Possibilità di posizioni anche superiori in azienda (industria farmaceutica, ramo attuariale-statistico).
- ✻ *Il matematico deve essere in grado di comprendere e analizzare i problemi che si pongono nella prassi aziendale, di tradurli nel linguaggio formale della matematica e di risolverli, spesso con l'aiuto di tecniche e mezzi informatici.*
- ✻ Matematica aziendale (ottimizzazione, statistica, teoria dei grafi). Il matematico può lavorare nei reparti di ricerca operativa in grandi ditte, nello sviluppo di software aziendale, nel controllo della produzione, nel servizio statistico, nelle banche, nelle assicurazioni, nella pubblica amministrazione.
- ✻ Matematica finanziaria e attuariale (calcolo delle probabilità, statistica, serie temporali, previsione dei valori di borsa, calcolo dei rischi e delle tariffe). Processi stocastici e serie temporali oltre che in matematica finanziaria hanno molte altre applicazioni.
- ✻ Matematica industriale (equazioni differenziali, fisica matematica, ma anche statistica, serie temporali, ottimizzazione e controllo automatico, analisi numerica).
- ✻ Elaborazione delle immagini (applicazioni nell'industria, nella medicina, nella robotica). Geometria (discreta e differenziale) computazionale, grafica al calcolatore).
- ✻ Informatica teorica: algebra, strutture ordinate, funzioni booleane (metodi classici di semplificazione, diagrammi di decisione, proprietà matematiche-strutturali), linguaggi formali, automi. Algoritmi. Analisi formale dei concetti.
- ✻ Bioinformatica (confronto di sequenze, studio dell'espressione genica, reti metaboliche). Statistica multivariata di dati clinici di grandi dimensioni.

Il profilo professionale del matematico

Il laureato in matematica non viene iscritto in un ordine professionale e otticamente e formalmente la professione del ***matematico*** *sembra poco definita. Ma, nonostante le mancanze dei piani di studi (a cui lo studente può in una certa misura rimediare con lo studio personale, soprattutto se le istituzioni universitarie forniscono mezzi e attenzione alle iniziative personali degli studenti), la matematica è oggi una delle discipline scientifiche più utilizzate.*

Il matematico è allo stesso tempo uno specialista e un generalista. È uno ***specialista*** *del ragionamento preciso, che sa individuare per il suo allenamento spesso molto velocemente le conclusioni errate e sa concepire modelli formali per i componenti di un sistema ingegneristico o un fenomeno naturale o economico. È un* ***generalista*** *perché le leggi formali e astratte hanno una validità universale e sono quindi applicabili in campi apparentemente molto distinti. Gli stessi algoritmi di ottimizzazione che sono utili nella pianificazione delle risorse di un'impresa vengono usati in bioinformatica per confrontare le successioni del DNA, ad esempio per ricostruire l'evoluzione degli organismi o per scoprire geni in batteri o parassiti che codificano per enzimi necessari a quell'agente infettivo ma non all'uomo. Individuato un tale gene, si possono creare farmaci che impediscono al batterio o parassita di utilizzare quell'enzima, ma sono innocui all'uomo. Quindi la matematica di oggi è anche* ***interdisciplinare****. Farebbe bene lo studente di matematica a dedicare un po' di tempo anche a queste materie al di fuori del proprio corso di studio (biologia o economia ad esempio), per avere più motivazione durante lo studio e un allenamento anticipato alle applicazioni.*

Spesso i laureati di matematica pensano che oltre alla carriera scolastica l'unico sbocco professionale sia il lavoro in una software house. La richiesta di informatici oggi è molto alta e sicuramente l'abitudine alla precisione del matematico fa in modo che sia un abile programmatore. Fanno bene quindi le software house a cercare i loro collaboratori tra i laureati di matematica, che in questa attività possono essere più bravi dei laureati di altre discipline. Anche nell'informatica però ci sono altre professioni, più ingegneristiche, dove un matematico può collaborare in un team, come nell'elaborazione dei segnali, nella sicurezza dei dati (solo i metodi matematici possono dare affidabilità alle tecniche di crittografia), nell'invenzione di nuovi linguaggi di programmazione, nella programmazione logica, nello sviluppo di basi di dati). Ma sono tanti i campi di applicazione della matematica.

Nella ***matematica tecnica e industriale*** *il matematico tipicamente lavorerà in un team con ingegneri o fisici nell'analisi di sistemi, nella simulazione (ad esempio nella costruzione di macchine), nell'ottimizzazione lineare e non lineare, nel calcolo numerico di grandi sistemi). Metodi di analisi armonica numerica e della topologia generale vengono impiegati nell'elaborazione delle immagini (di cui il controllo di qualità di prodotti industriali è solo una delle molte applicazioni).*

*Molti metodi dell'****informatica*** *appartengono alla matematica pura: Teoria dei grafi per la descrizione di algoritmi, calcolo combinatorio e teoria dei numeri per la crittografia e lo studio dei codici, logica matematica e algebra universale per lo sviluppo di linguaggi di programmazione e di basi di dati, computer algebra e corpi finiti nella trasmissione di segnali, statistica e teoria dell'informazione nella linguistica computazionale, con importanti applicazioni ai sistemi di comprensione della voce da parte di sistemi informatici e alla traduzione automatica di linguaggi naturali. L'allenamento del matematico è di grande aiuto nell'invenzione di nuovi linguaggi. Un linguaggio molto diffuso tra gli amministratori di sistema (ma anche tra gli operatori di borsa americani, che lo usano per estrarre informazioni dai notiziari), il* ***Perl****, è allo stesso tempo un linguaggio ad altissimo livello che contiene la programmazione funzionale. Un matematico lo può usare in modo diverso e molto efficiente. La* ***programmazione logica*** *viene oggi usata non solo per i sistemi esperti, ma fornisce anche un nuovo approccio a molti problemi classici dell'ottimizzazione, soprattutto aziendale (constraint logic programming). Lo sviluppo di metalinguaggi o di linguaggi markup (ad esempio basati sulle specifiche SGML/XML o inventati ad hoc) può essere un'interessante attività per un matematico.*

In ***economia*** *e* ***finanza*** *il matematico può lavorare nell'ottimizzazione (ricerca operativa - utilizzo ottimale di risorse e investimenti), nella pianificazione di processi produttivi, nel calcolo di contratti finanziari ottimali o dei premi di assicurazioni. In questi campi le tecniche matematiche utilizzate sono molto sofisticate (sia i metodi di ottimizzazione che le teorie stocastiche per la matematica finanziaria).*

La ***statistica matematica*** *è un campo applicativo con forti necessità di fondamenti teorici (teoria della misura, calcolo delle probabilità). Oltre che in molti rami dell'economia (statistica nel marketing, processi stocastici e serie temporali nelle previsioni economiche) la statistica è importante in campo biomedico (sanità pubblica, epidemiologia, ricerca clinica).*

Sempre più attuali diventano i modelli matematici in ***biologia*** *e* ***medicina****. Elaborazione delle immagini; modelli matematici per il cervello, il fegato, i reni, il sistema cardiocircolatorio; descrizione di processi ecologici o infettivi mediante sistemi dinamici; modelli di evoluzione; pianificazione di misure contro insetti e gastropodi o agenti infettivi da essi trasmessi (malaria, bilharziosi). La decifrazione sempre più completa del genoma umano (ma quasi altrettanto importante è quella di altri organismi, ad esempio di batteri o virus, o di organismi modello come il moscerino Drosophila su cui studiare processi più semplificati e standardizzati della biologia molecolare e della sua codifica) richiede nuove tecniche per la raccolta e l'interpretazione delle nuove informazioni (confronto di genomi, previsione delle funzioni degli enzimi da essi espressi, ad esempio mediante algoritmi combinatorico-statistici oppure programmazione logica).*

Estremamente interessanti sono in ***chimica*** *la modellistica molecolare e il disegno ottimale di farmaci (drug discovery), dove il matematico può collaborare in molti modi (grafica al calcolatore, ottimizzazione genetica per scoprire nuovi farmaci, sviluppo di linguaggi markup per la chimica).*

Nella ***ricerca matematica*** *si lavora in molti campi, spesso di base per le applicazioni o le interazioni interdisciplinari: Geometria differenziale e teoria dei gruppi nella fisica teorica (teoria della relatività e teoria delle particelle), equazioni differenziali parziali (quasi tutti i campi della fisica matematica, meccanica dei fluidi, chimica quantistica, semiconduttori), teoria dei numeri (un campo antico con molti problemi irrisolti, con applicazioni in crittografia, ottimizzazione, generazione di numeri casuali), topologia generale, analisi armonica, analisi funzionale.*

Conclusione. *C'è una certa tendenza di voler attirare studenti cercando di trasmettere solo le parti più elementari, in modo discorsivo e fenomenologico e con esami facili, sottovalutando gli studenti. Ma il laureato in matematica trae la sua qualifica dal suo allenamento ad alto livello. La strada da intraprendere è quindi quella di far vedere le molte possibilità di fare matematica, di offrire una preparazione che si distingue dagli altri corsi di laurea, fornendo corsi e attrezzature adeguati, per poter attrarre gli studenti più ambiziosi e potergli proporre onestamente e senza trucchi questo percorso formativo.*

La Nuova Ferrara 7 agosto 2000

Geometria applicata

La geometria viene utilizzata in molti campi della tecnologia moderna: nella tomografia computerizzata, nella pianificazione di edifici, nella creazione di animazioni per film e pubblicità, nell'analisi dei movimenti di robot e satelliti.

La matematica è di grande aiuto nella grafica al calcolatore; conoscere le operazioni fondamentali della geometria (traslazioni, rotazioni, riflessioni, coordinate baricentriche, i vari tipi di proiezioni) permette di creare facilmente programmi di grafica con caratteristiche che talvolta mancano anche nei programmi di grandi produttori quando non sono stati sviluppati da matematici.

A livello più avanzato la geometria studia le varie rappresentazioni di curve, superficie e varietà geometriche di dimensione superiore, mediante rappresentazioni parametriche oppure sistemi di equazioni.

Si impara allora come passare da una rappresentazione parametrica a un sistema di equazioni che descrive la stessa varietà e viceversa; si studiano le funzioni che trasformano una varietà in un'altra.

La statistica matematica

Per fare bene il suo lavoro, lo statistico che lavora in un'azienda, nell'amministrazione pubblica o nella ricerca clinica, deve comprendere i compiti che gli vengono posti e deve essere in grado di interagire con i committenti. Nonostante ciò la statistica è di sua natura una disciplina matematica che si basa sul calcolo delle probabilità, una teoria astratta e difficile, e richiede conoscenze tecniche in altri campi della matematica come analisi reale e complessa, analisi armonica, calcolo combinatorio (ad esempio per la pianificazione di esperimenti). Nell'analisi delle componenti principali e nella ricerca di raggruppamenti sarà compito dello statistico scegliere la rappresentazione dei dati e le misure per la somiglianza o diversità di individui e gruppi.

Nella statistica multivariata in particolare probabilmente molte tecniche sono ancora da scoprire e i metodi più efficienti si baseranno forse su metodi geometrici avanzati, ad esempio della geometria algebrica reale e della teoria delle rappresentazioni di gruppi.

Ci sono tanti campi di applicazione della statistica in medicina, bioinformatica, farmacologia, matematica finanziaria, linguistica, demografia, che uno studente che intraprende questa professione dopo aver acquisito una solida formazione matematica può sperare in un'attività interessante e gratificante.

L'abitudine ai dati e alla loro interpretazione formerà le sue capacità di giudicare situazioni complesse in modo razionale oltre a fornirgli un ricco patrimonio di informazioni, quindi potrà anche aspirare a una carriera amministrativa o manageriale.

Nel suo lavoro giornaliero potrà, nei contatti con ricercatori clinici o amministratori o con l'opinione pubblica utilizzare le proprie conoscenze teoriche per chiarire il significato di risultati di test clinici o di rilievi statistici o per proporre nuovi esperimenti o indagini.

La matematica degli ingegneri

Problemi ingegneristici hanno quasi sempre una forte componente matematica: dalla teoria dei materiali all'elaborazione dei segnali, dall'interpretazione di misurazioni al controllo di qualità, da modelli per il corpo umano e i suoi movimenti (ad esempio nell'industria automobilistica, ma anche nell'industria tessile - in sartoria!) all'analisi strutturale di edifici e ponti, dai modelli matematici per i processi fisici e chimici in un altoforno all'ottimizzazione dell'illuminazione in impianti industriali, dallo studio dell'erosione nel letto di un fiume ai problemi inversi della geofisica (importanti per esempio anche nell'analisi strutturale di monumenti e edifici), dappertutto si utilizza la matematica.

Potremmo elencare tanti altri campi di applicazione: la geometria dei movimenti (cinematica) in robotica e nella costruzione di macchine, teoria dei sistemi e controllo ottimale nell'automazione, modellazione di reazioni chimiche nella chimica industriale, ottimizzazione strutturale di componenti di macchine o della composizione di punte per trapani da dentista, microstruttura di metalli, costruzione di autoveicoli, treni ed aerei, ottimizzazione di orari ferroviari, pianificazione urbanistica, telecomunicazioni.

Matematica e chimica

Il ruolo della matematica in chimica è in rapida crescita, essa viene applicata ad esempio nel disegno razionale di farmaci, nella selezione e sintesi di nuovi materiali, come guida nella ricerca di nuovi catalizzatori, nello sviluppo di algoritmi per la dinamica molecolare, nella risoluzione di problemi di ottimizzazione di conformazioni, per la comprensione del ripiegamento delle proteine, nello studio del trasporto di sostanze attraverso le membrane esterne ed interne della cellula (fondamentale per la farmacologia), nell'analisi del complicato avvolgimento delle molecole di DNA, nello studio della struttura di cristalli e quasicristalli, nella chimica quantistica.

La geometria e la topologia possono contribuire alla comprensione della struttura tridimensionale delle molecole, la teoria dei grafi permette non solo la visualizzazione dei legami chimici, ma può essere applicata alla rappresentazione di reazioni chimiche oppure nell'organizzazione di banche dati di molecole o della letteratura chimica; il calcolo combinatorio e la teoria dei gruppi intervengono nella chimica combinatoria, una tecnica sempre più utilizzata dall'industria farmaceutica. Il matematico può lavorare nello sviluppo di algoritmi per la trasformazione di Fourier per le applicazioni nella spettroscopia molecolare oppure nella chimica quantistica computazionale.

Equazioni differenziali parziali, analisi armonica, processi stocastici, statistica, analisi numerica, teoria combinatoria dei gruppi finiti, teoria dei grafi, quasiordini, teoria dei numeri (generazione di numeri casuali), geometria computazionale e grafica al calcolatore nella modellistica molecolare (computer aided molecular design e computer aided drug design): sono poche le discipline matematiche che non hanno interessanti applicazioni in chimica.

La dinamica dei fluidi

Uno dei campi più classici e allo stesso tempo più attuali della fisica matematica è la dinamica dei fluidi e dei gas. Essa richiede un ricco bagaglio di tecniche matematiche, soprattutto dall'analisi (equazioni differenziali parziali) e dalla geometria differenziale (calcolo tensoriale), oltre a solide conoscenze in meccanica dei continui e termodinamica (densità e viscosità e altre caratteristiche di un fluido o di un gas dipendono dalla temperatura e viceversa – un gas si scalda se viene compresso). È una disciplina molto vasta con tantissime applicazioni: costruzione di macchine (iniettori, turbine, ventilatori, pompe), ale di aerei, eliche di aerei e di navi, ruote a vento, modelli per nuovi materiali, flussi in medi porosi, raffreddamento di vetri, produzione di fibre plastiche, serbatoi di olio, ottimizzazione del caffè espresso, studio della formazione di vortici e turbolenze, combustione, detonazioni, modelli per il movimento di animali (pesci, serpenti, uccelli), modelli aerodinamici per la meteorologia (circolazioni e turbolenze atmosferiche, moto dei venti attorno a grandi catene di montagne, uragani, convezione termica nell'atmosfera) e l'agricoltura (moto dell'aria in piantagioni o foreste), aerodinamica di edifici, pianificazione di esperimenti aerodinamici e idrodinamici (costruzione di canali aerodinamici), previsione delle interazioni con l'aria di treni ad alta velocità, stima delle esposizioni al vento di un ponte. In medicina la fluidodinamica del sangue è un campo importante ma ancora piuttosto difficile (prevenzione di aneurismi e patologie circolatorie).

Geomatematica

Questo è un campo nuovo, molto bello e difficile della matematica. Funzioni speciali della geofisica matematica, funzioni armoniche sulla sfera, operatori pseudodifferenziali della geodesia matematica, metodi di approssimazione multivariata, splines, wavelets, metodi degli elementi finiti nella geodesia, determinazione del campo gravitazionale della Terra, analisi delle deformazioni della superficie terrestre, effetti della rifrazione atmosferica, determinazione del campo magnetico della Terra mediante l'analisi di dati trasmessi da satelliti, sono solo alcuni dei temi di questa interessante disciplina.

Malattie tropicali

È tipico per la natura viva che essa pone dei problemi che difficilmente possono essere perfettamente modellati con i metodi matematici classici sviluppati in genere per la fisica o l'ingegneria. Ciò da un lato vale naturalmente anche per le malattie tropicali come malaria, bilharziosi, filariosi, leishmaniosi, dall'altro lato queste malattie colpiscono ogni anno centinaia di milioni di persone, sono trascurate dalle ditte farmaceutiche (i pazienti non possono pagare) e richiedono quindi interventi ecologici o politici molto impegnativi. Alla pianificazione di questi interventi anche i modelli matematici possono contribuire e sicuramente la medicina tropicale è attraente per il suo fascino e per il lato umano.

La notazione matematica

Matematica e linguaggi di programmazione hanno in comune la quasi perfetta precisione e allo stesso tempo la grande complessità degli enunciati. È necessario quindi definire attentamente gli oggetti con cui si vuole lavorare e le operazioni che si vogliono effettuare. Spesso questi oggetti e queste operazioni vengono utilizzati più volte nello stesso ragionamento o in una teoria. È quindi necessario introdurre abbreviazioni e, siccome talvolta le stesse operazioni possono essere effettuate su oggetti diversi, variabili. Ci limitiamo qui ad alcuni dei più comuni concetti insiemistici.

L'*insieme* che consiste degli elementi $a_1, \dots, a_n$ è denotato con $\{a_1, \dots, a_n\}$. $\{x \mid P(x)\}$ è l'insieme di tutti gli x che godono della proprietà P o che comunque possono essere descritti dall'espressione $P(x)$. Se x è elemento di un insieme X, allora si scrive $x \in X$. Il simbolo $:=$ significa *uguale per definizione*. Alcuni insiemi di numeri:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

Gli elementi di $\mathbb{N}$ si chiamano *numeri naturali*, quelli di $\mathbb{Z}$ *numeri interi*, gli elementi di $\mathbb{Q}$ *numeri razionali*. L'insieme dei *numeri reali* viene definito nei corsi di analisi ed è denotato con $\mathbb{R}$.

Molto importante e versatile è il concetto di *prodotto cartesiano* di insiemi: dati due insiemi X ed Y, con $X \times Y$ si denota l'insieme delle coppie (ordinate) di elementi che si possono formare prendendo come prima componente un elemento di X e come seconda un elemento di Y:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Si possono anche formare prodotti cartesiani di più di due fattori, in particolare si può formare l'insieme $X^n := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ volte}}$.

$\mathbb{R}^2$ è quindi il piano reale, $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale. In statistica una tabella di n righe ed m colonne di numeri può essere considerata come una collezione di n punti nello spazio $\mathbb{R}^m$.

Quando un insieme X è contenuto in un insieme Y (ciò significa, per definizione, che ogni elemento di X è anche elemento di Y), allora si scrive $X \subset Y$. Così abbiamo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Due insiemi si chiamano *uguali* se hanno gli stessi elementi. Ciò si può formulare anche così:

$$X = Y \text{ se e solo se } X \subset Y \text{ e } Y \subset X.$$

L'*unione* $A \cup B$ di due insiemi A e B è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, mentre l'*intersezione* $A \cap B$ è l'insieme dei loro elementi comuni, ciò degli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Come in aritmetica è utile avere un numero 0, così nell'insiemistica si introduce un insieme *vuoto* apparentemente artificiale definito dalla proprietà di non avere alcun elemento. Esso viene denotato con $\emptyset$ ed è sottoinsieme di ogni altro insieme: $\emptyset \subset X$ per ogni insieme X (infatti ogni elemento di $\emptyset$, cioè nessuno, appartiene a X).

$\Longleftrightarrow$ è un'abbreviazione per *se e solo se*.

Le funzioni

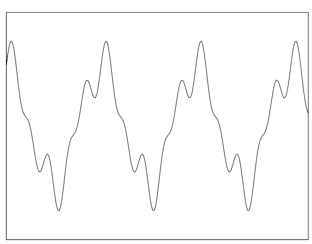
Il concetto singolo più importante della matematica è certamente quello di funzione. Mediante funzioni possiamo trasformare informazioni da una forma all'altra, possiamo semplificare informazioni complesse o immergere informazioni in contesti più generali. Una funzione del tempo può essere studiata per scoprire proprietà di periodicità, funzioni complicate possono essere decomposte in funzioni più semplici. Se per esempio sappiamo che il prodotto di due funzioni *continue* è ancora continuo e se accettiamo per certo che la funzione che manda un numero reale in se stesso è continua, possiamo immediatamente concludere che la funzione che manda un numero reale x in x^2 è anch'essa continua.

Il concetto di funzione in matematica è molto generale. Una *funzione* (o *applicazione*) è definita da tre componenti: un insieme X su cui la funzione è definita (il *dominio* della funzione), un insieme Y (il *codominio*) di valori possibili (ogni valore della funzione deve essere un elemento di Y, ma non necessariamente ogni elemento di Y è valore della funzione), e un sottoinsieme $G \subset X \times Y$ (il *grafico* della funzione) che deve avere la proprietà che per ogni $x \in X$ esiste esattamente un $y \in Y$ tale che $(x, y) \in G$.

La tripla $f := (X, Y, G)$ si chiama allora una funzione da X in Y e si scrive anche $f : X \longrightarrow Y$ oppure $X \xrightarrow{f} Y$. Per ogni $x \in X$ con $f(x)$ si denota quell'unico $y \in Y$ per cui $(x, y) \in G$.

Se f può essere espressa mediante una formula, per f si scrive anche $f = \underset{x}{\bigcirc} f(x)$, ad esempio $\underset{x}{\bigcirc} \sin(x^2 + 1) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nell'analisi di una variabile reale si studiano funzioni definite su un intervallo di $\mathbb{R}$ a valori reali. Il grafo di queste funzioni è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e può quindi essere rappresentato nel piano.



$\underset{x}{\bigcirc} \sin 3x + \sin 5x + 4 \cos x$

Funzioni booleane

Denotiamo con Y^X l'insieme di tutte le funzioni $X \longrightarrow Y$.

Per un insieme finito X sia $|X|$ il numero degli elementi di X. Si può dimostrare che, se X ed Y sono finiti, anche Y^X è finito e che $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

In particolare $|\{0, 1\}^X| = 2^{|X|}$, sempre nell'ipotesi che X sia finito. Si vede anche facilmente che $|\{0, 1\}^n| = 2^n$ per ogni numero naturale n.

Una *funzione booleana* di n variabili è, per definizione, una funzione

$$\{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

Questo concetto è fondamentale nella matematica discreta e nell'informatica teorica.

L'insieme delle funzioni booleane di n variabili è uguale a $\{0, 1\}^{\{0,1\}^n}$, per cui esistono 2^{2^n} funzioni booleane di n variabili. Questo numero cresce vertiginosamente:

n	2^{2^n}
0	$2^1 = 2$
1	$2^2 = 4$
2	$2^4 = 16$
3	$2^8 = 256$
4	$2^{16} = 65536$
5	$2^{32} = 4294676296$
6	2^{64}
7	2^{128}

Si vede che ogni volta che si aumenta n di uno, il numero delle funzioni booleane diventa il quadrato di quello precedente. Esistono quindi moltissime funzioni booleane, già per 5 variabili sono più di 4 miliardi, e per 6 variabili diventano 18 miliardi di miliardi.

Vita è codifica

Gli ingegneri studiano funzioni booleane con 30 o anche 100 variabili. Di queste ultime ne esistono $2^{2^{100}}$, un numero che la matematica ci permette di scrivere, mentre non siamo in nessun modo in grado di elencare o anche solo lontanamente immaginare tutte queste funzioni, perché, se pensiamo che $N := 2^{100}$ è probabilmente superiore al numero di oggetti nell'universo, di quelle funzioni ne esistono addirittura 2^N. Il mondo delle funzioni booleane è quindi di una incredibile ricchezza, è un mondo di strumenti intellettuali a cui possiamo attingere per descrivere praticamente tutti gli oggetti, fenomeni e leggi del mondo reale. Per questo la teoria delle funzioni booleane è un mondo di ricerca intensissimo, non solo da parte degli ingegneri che cercano di studiare e semplificare i circuiti digitali, ma anche ad esempio, in modo sempre crescente, nella medicina, dove si cerca di descrivere i meccanismi biochimici e patologici con modelli booleani.

D'altra parte la vita stessa ne è un esempio. Abbiamo l'impressione che un organismo è tanto più vitale quanto più è ramificato. Troviamo strutture ramificate negli alberi, nell'organizzazione del sistema vasocircolatorio, dei polmoni e del sistema nervoso. Persino quando in un oggetto inanimato o su un pianeta lontano scopriamo sistemi ramificati questo ci dà una sensazione di vita anche quando forse è solo una somiglianza, un ricordo o una struttura potenziale.

Quindi la ramificazione organizzata è una delle basi della vita. Anche un programma in un linguaggio di programmazione comincia ad acquistare vita solo quando ci sono ramificazioni, espresse da istruzioni `if ... else`. La vita sul nostro pianeta è organizzata da un codice, il codice genetico, e, in maniera più nascosta e molto più complessa, da sistemi booleani che descrivono le regole della vita o del particolare organismo che in un certo modo è definito da quelle regole. Senza questa codifica la vita non avrebbe quella forza interna, quella pertinacia e quella capacità di rigenerarsi e di ottimizzarsi che la fa apparire superiore al mondo puramente fisico, e nemmeno quella capacità interattiva che sta alla base ad esempio dei fenomeni sociali.

Quindi la vita è codifica.

Grafica al calcolatore

La grafica al calcolatore e le discipline affini come la geometria computazionale e l'elaborazione delle immagini si basano sulla matematica. È importante separare gli algoritmi dalla loro realizzazione mediante un linguaggio di programmazione. È importante separare la rappresentazione matematica delle figure nello spazio dalle immagini che creiamo sullo schermo di un calcolatore.

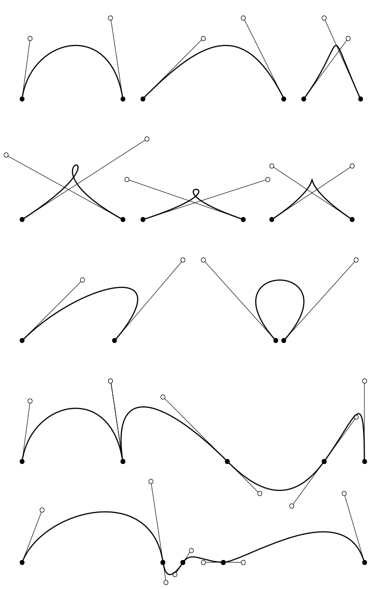
Il matematico è molto avvantaggiato in questo. Già semplici nozioni di trigonometria e di geometria affine e algebra lineare possono rendere facili o immediate costruzioni e formule di trasformazione (e quindi gli algoritmi che da esse derivano) che senza questi strumenti matematici risulterebbero difficoltose o non verrebbero nemmeno scoperte.

La geometria proiettiva, apparentemente una vecchia teoria astratta e filosofica, diventa di sorpresa una tecnica molto utile per trasformare compiti di proiezione in semplici calcoli. I concetti dell'analisi e della geometria differenziale portano all'introduzione e allo studio delle curve e superficie di Bézier (Pierre Bézier, 1910-1999, ingegnere della Renault), largamente utilizzate nei programmi di disegno al calcolatore (CAD, computer aided design).

Molte figure possono essere descritte mediante equazioni algebriche; per questa ragione la geometria algebrica assume notevole importanza nella grafica al calcolatore moderna. Curve e superficie possono essere date in forme parametrica oppure mediante un sistema di equazioni; le basi di Gröbner forniscono uno strumento per passare da una rappresentazione all'altra.

La topologia generale, una disciplina tra la geometria, l'analisi e l'algebra, è la base della morfologia matematica, mentre la topologia algebrica e la geometria algebrica reale possiedono applicazioni naturali in robotica.

Alcuni esempi di curve di Bézier cubiche:



Visualizzazione di dati statistici

Partiamo dalla seguente tabella di quindici comuni italiani, di cui abbiamo quattro dati: numero degli abitanti, altezza sul mare, distanza dal mare, superficie del territorio comunale. Per avere numeri di grandezza confrontabili, indichiamo gli abitanti in migliaia, l'altezza in metri, la distanza dal mare in chilometri, la superficie in chilometri quadrati.

comune	ab.	alt.	mare	sup.
Belluno	35	383	75	148
Bologna	380	54	70	141
Bolzano	97	262	140	53
Ferrara	132	9	45	405
Firenze	375	50	75	103
Genova	632	19	2	236
Milano	1302	122	108	182
Padova	210	12	25	93
Parma	170	55	90	261
Pisa	92	4	10	188
Ravenna	140	4	8	660
Torino	901	239	105	131
Trento	106	194	110	158
Venezia	275	1	0	458
Vicenza	110	39	55	81

In statistica conviene spesso trasformare i valori contenuti in un vettore v di dati numerici in valori compresi tra 0 e 1. Ciò può essere ottenuto con l'operazione

$$\bigcirc_x \frac{x-m}{M-m}$$

applicata agli elementi di v, dove m è il minimo in v, M il massimo.

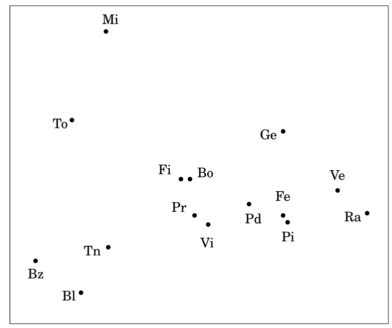
Se applichiamo questa trasformazione a ciascuna delle quattro colonne numeriche della matrice X dei 15 comuni, otteniamo, dopo arrotondamento,

$$\begin{pmatrix}
0.00 & 1.00 & 0.54 & 0.16 \\
0.27 & 0.14 & 0.50 & 0.14 \\
0.05 & 0.68 & 1.00 & 0.00 \\
0.08 & 0.02 & 0.32 & 0.58 \\
0.27 & 0.13 & 0.54 & 0.08 \\
0.47 & 0.05 & 0.01 & 0.30 \\
1.00 & 0.32 & 0.77 & 0.21 \\
0.14 & 0.03 & 0.18 & 0.07 \\
0.11 & 0.14 & 0.64 & 0.34 \\
0.04 & 0.01 & 0.07 & 0.22 \\
0.08 & 0.01 & 0.06 & 1.00 \\
0.68 & 0.62 & 0.75 & 0.13 \\
0.06 & 0.51 & 0.79 & 0.17 \\
0.19 & 0.00 & 0.00 & 0.67 \\
0.06 & 0.10 & 0.39 & 0.05
\end{pmatrix}$$

Questa tecnica è utile molto spesso tranne nei casi in cui, per la presenza di uno o più valori eccezionali in una colonna, la colonna trasformata diventa troppo concentrata su una piccola porzione dell'intervallo $[0, 1]$.

Dopo aver standardizzato in questo modo i nostri dati, possiamo provare a visualizzare i dati (in questo caso 4-dimensionali) in 2-dimensioni, cioè nel piano cartesiano. La ricerca di proiezioni ottimali da uno spazio ad alta dimensione sul piano è uno dei temi più importanti ed effettivamente più dificili della statistica esploratoria; in inglese essa è denominata *projection pursuit*.

Uno dei metodi più importanti è la ricerca delle profondità massimali (conosciuta in statistica come *analisi delle componenti principali*). Essa consiste in una rotazione dei punti dati (ad esempio dei 15 punti 4-dimensionali che corrispondono ai nostri comuni) in modo tale che il piano che viene a coincidere con il piano di proiezione sia quello in cui i dati possiedono estensione (in senso statistico) massima. Allora possiamo sperare che la proiezione 2-dimensionali conservi una buona parte delle informazioni contenute nei dati originali. Per i quindici comuni otteniamo in questo modo, con la standardizzazione descritta prima, una proiezione piuttosto soddisfacente:



Basi di dati

La struttura complessa e sorprendente degli spazi ad alta dimensione crea difficoltà non solo in statistica, ma ad esempio anche negli *algoritmi di ricerca* in grandi insiemi di dati (basi di dati in medicina, nell'industria, in geografia, in biologia molecolare) che spesso vengono rappresentati (mediante tecniche sofisticate di trasformazione) come punti di qualche $\mathbb{R}^m$ ad alta e talvolta altissima dimensione. Gli algoritmi di ricerca classici spesso utilizzano concetti di *somiglianza* basati ad esempio sulla vicinanza nella metrica euclidea che però in questi spazi ad alta dimensione perde gran parte del suo significato. Superare questa difficiltà è uno dei compiti più attuali e più interessanti studiati dalla teoria delle basi di dati.

felix.unife.it

Seguendo la voce *Studenti*, su questo sito (che porta il nome *Mathematical BBS* con cui è nato nel 1993) si trovano appunti di corsi e connessioni ai siti del dipartimento e dell'università.

Bibliografia

G. Farin: Curves and surfaces for computer aided geometric design.
Academic Press 1993.

G. Rota: Pensieri discreti. Garzanti 1993.

F. Stillinger (ed.): Mathematical challenges from theoretical and computational chemistry. National Academy Press 1995.