# ZERI DI POLINOMI



## Polinomi

Un *polinomio* a coefficienti complessi è una successione finita $f = (a_0, \ldots, a_n)$ di numeri complessi tale che:

(1) $n$ è un numero naturale.

(2) Se $n \geq 1$, allora $a_n \neq 0$.

Con un'indeterminata $x$ si scrive allora anche

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Il *grado* di $f$ è definito così:

(a) Se $n \geq 1$, allora il grado di $f$ è $n$.

(b) Se $n = 0$ ed $a_n \neq 0$, il grado di $f$ è 0.

(c) Se $n = 0$ ed $a_n = 0$, il grado di $f$ è $-\infty$.

I polinomi di grado $\leq 0$ si dicono *costanti*.

---

L'addizione e la moltiplicazione di polinomi sono definiti come se $x$ fosse un numero. Ad esempio

$$\begin{aligned}&(3 + 5x + 6x^2)(2 + 3x + x^4)\\ &\quad = 6 + 9x + 3x^4 + 10x + 15x^2 + 5x^5 + 12x^2 + 18x^3 + 6x^6\\ &\quad = 6 + 19x + 27x^2 + 18x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 6x^6\end{aligned}$$

Si può anche usare questo schema:

| | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 0 | 0 | 3 |
| 5 | 10 | 15 | 0 | 0 | 5 |
| 6 | 12 | 18 | 0 | 0 | 6 |

I coefficienti del prodotto sono le somme delle diagonali del rettangolo interno.

Il grado è definito in modo tale che il grado di $fg$ sia uguale alla somma dei gradi di $f$ e $g$.

---

In particolare sono definiti prodotti della forma

$$(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

per $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Ad esempio

$$\begin{aligned}f &:= (x-2)(x-3)(x+1) = (x-2)(x^2 + x - 3x - 3)\\ &= (x-2)(x^2 - 2x - 3) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2x^2 + 4x + 6\\ &= x^3 - 4x^2 + x + 6\end{aligned}$$

È chiaro che qui $f(2) = f(3) = f(-1) = 0$.

---

Si usano le seguenti notazioni:

$\mathbb{R}$ := insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$ := insieme dei numeri complessi.
$\mathbb{R}[x]$ := insieme dei polinomi a coefficienti reali.
$\mathbb{C}[x]$ := insieme dei polinomi a coefficienti complessi.

---

## Zeri di un polinomio

Per $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$ possiamo calcolare il numero $f(\alpha)$ che si ottiene sostituendo $x$ con $\alpha$:

$$f(\alpha) := a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n$$

Uno *zero* (o una *radice*) di $f$ è un numero complesso $\alpha$ per il quale $f(\alpha) = 0$.

*Vedremo adesso che ogni polinomio non costante possiede uno zero.* Attenzione: Se $f \in \mathbb{R}[x]$, non è invece detto che $f$ abbia radici *reali*!

Ad esempio $f = x^2 + 1$ non possiede radici reali.

Questa è stata proprio la ragione per l'introduzione dei numeri complessi: Infatti $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$, quindi $x^2 + 1$ possiede gli zeri $i$ e $-i$. In algebra si dimostra (non è difficile) che questo polinomio non possiede altri zeri (prop. 1.1).

**Proposizione 1.1.** *Sia $f \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n$ ed $f \neq 0$ (quindi $n \geq 0$). Allora $f$ non possiede più di $n$ radici distinte.*

<u>Dimostrazione.</u> Corso di Algebra.

**Nota 1.2 (schema di Ruffini).** Sia dato un polinomio

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Per $\alpha \in \mathbb{C}$ vogliamo calcolare $f(\alpha)$.
Sia ad esempio $f = 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 8x + 17$. Poniamo

$$\begin{aligned}b_0 &= 3\\ b_1 &= b_0\alpha + 5 &&= 3\alpha + 5\\ b_2 &= b_1\alpha + 6 &&= 3\alpha^2 + 5\alpha + 6\\ b_3 &= b_2\alpha + 8 &&= 3\alpha^3 + 5\alpha^2 + 6\alpha + 8\\ b_4 &= b_3\alpha + 17 &&= 3\alpha^4 + 5\alpha^3 + 6\alpha^2 + 8\alpha + 17\end{aligned}$$

e vediamo che $b_4 = f(\alpha)$. Lo stesso si può fare nel caso generale:

$$\begin{aligned}b_0 &= a_0\\ b_1 &= b_0\alpha + a_1\\ &\ldots\\ b_k &= b_{k-1}\alpha + a_k\\ &\ldots\\ b_n &= b_{n-1}\alpha + a_n\end{aligned}$$

con $b_n = f(\alpha)$, come dimostriamo adesso. Consideriamo il polinomio

$$g := b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}.$$

Allora, usando che $\alpha b_k = b_{k+1} - a_{k+1}$ per $k = 0, \ldots, n-1$, abbiamo

$$\begin{aligned}\alpha g &= \alpha b_0 x^{n-1} + \alpha b_1 x^{n-2} + \cdots + \alpha b_{n-1}\\ &= (b_1 - a_1)x^{n-1} + (b_2 - a_2)x^{n-2} + \ldots\\ &\quad + (b_{n-1} - a_{n-1})x + b_n - a_n\\ &= (b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n)\\ &\quad - (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n)\\ &= x(g - b_0 x^{n-1}) + b_n - (f - a_0 x^n)\\ &= xg - b_0 x^n + b_n - f + a_0 x^n\\ &= xg + b_n - f\end{aligned}$$

quindi

$$\boxed{f = (x - \alpha)g + b_n}$$

e ciò implica $f(\alpha) = b_n$.

$b_0, \ldots, b_{n-1}$ sono perciò i coefficienti del quoziente nella divisione con resto di $f$ per $x - \alpha$, mentre $b_n$ è il resto, uguale a $f(\alpha)$.

Questo algoritmo è detto *schema di Ruffini* ed è molto più veloce del calcolo separato delle potenze di $\alpha$ (tranne nel caso che il polinomio consista di una sola o di pochissime potenze).

**Proposizione 1.3.** *Siano $f \in \mathbb{C}[x]$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora $f(\alpha) = 0$ se e solo se esiste un polinomio $g \in \mathbb{C}[x]$ tale che $f = (x - \alpha)g$.*

*Se allora $f \neq 0$ ed $f$ è di grado $n$, allora $f$ non è costante e $g$ è univocamente determinato e di grado $n - 1$.*

<u>Dimostrazione.</u> Ciò segue direttamente dallo schema di Ruffini.

---

Siano $f \in \mathbb{C}[x]$ ed $f \neq 0$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$, $m$ un numero naturale.

Diciamo che $\alpha$ è uno zero di *molteplicità* $m$ di $f$, se $f = (x - \alpha)^m g$ per qualche polinomio $g$, ma $f$ non è della forma $f = (x - \alpha)^{m+1} h$ per un polinomio $h$.

Quindi $f(\alpha) = 0 \iff m \geq 1$. La molteplicità $m$ è univocamente determinata.

## Il teorema fondamentale dell'algebra

**Teorema 2.1 (teorema di Rouché).** *$F$ ed $h$ siano due polinomi a coefficienti complessi e $C$ una circonferenza (cioè il bordo di un cerchio) nel piano tale che*

$$|F(z)| > |h(z)|$$

*per ogni $z \in C$.*

*La disuguaglianza è quindi richiesta solo sul bordo del cerchio, non al suo interno. Allora i polinomi $f := F + h$ ed $F$ possiedono all'interno del cerchio lo stesso numero di radici, se queste vengono contate con le loro molteplicità.*

*In particolare: Se $F$ possiede una radice all'interno del cerchio, allora anche $f$ ne possiede una.*

*$f$ è considerata una perturbazione di $F$ tramite $h$.*

Dimostrazione. Corso di Analisi complessa.

**Teorema 2.2 (teorema fondamentale dell'algebra).** *Sia*

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$$

*di grado $n \geq 1$ (cioè non costante).*

*Allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione. Usiamo il teorema di Rouché.

Consideriamo $f$ come perturbazione di $F := a_nx^n$ (ricordiamo che $a_n \neq 0$) mediante $h := a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|F(z)| = |a_nz^n| = |a_n||z|^n$ ed è chiaro che per $|z|$ sufficientemente grande $F(z)$ domina tutte le potenze inferiori e anche $h(z)$; perciò esiste certamente un raggio $R > 0$ tale che per ogni $z$ che appartiene alla circonferenza di raggio $R$ (cioè tale che $|z| = R$) si abbia $|F(z)| > |h(z)|$.

Per il teorema di Rouché il nostro polinomio $f$ all'interno del cerchio $|z| < R$ possiede lo stesso numero di radici come $F$. Ma $F = a_nz^n$ in questo cerchio possiede la radice $0$ di molteplicità $n$.

Perciò anche $f$ possiede all'interno dello stesso cerchio $n$ radici (non necessariamente distinte, così come non sono distinte le radici di $F$) e quindi almeno una radice perché per ipotesi $n \geq 1$.

**Corollario 2.3.** *Sia $f \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$. Allora esistono numeri complessi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ univocamente determinati (a parte l'ordine in cui sono elencati), tali che*

$$f = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

*dove $a_n$ è il coefficiente di $x^n$ in $f$. Inoltre:*

*(1) $f$ non possiede altre radici.*

*(2) La molteplicità di $\alpha_i$ è uguale al numero di volte che $\alpha_i$ appare in questo prodotto.*

Dimostrazione. Facile dal teorema 2.2 e dalla prop. 1.3.

## Il linguaggio di programmazione R

Il linguaggio di programmazione R possiede la funzione `polyroot` per il calcolo delle radici di un polinomio. I coefficienti devono essere elencati iniziando con il coefficiente più basso e vengono compresi mediante l'operatore di concatenazione `c`. Per

$$f = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 10$$

usiamo ad esempio

```
f=c(10,7,-2,5,3)
radici=polyroot(f)
for (alfa in radici) print(alfa)
```

ottenendo l'output

```
[1] 0.704353+1.084357i
[1] -0.9287587+0i
[1] 0.704353-1.084357i
[1] -2.146614+0i
```

Per l'installazione di R collegarsi a `cran.stat.unipd.it` e seguire *Windows ⟶ base*.

Per appunti su R collegarsi a `felix.unife.it` e seguire *Studenti ⟶ Corsi ⟶ 2009/10 Programmazione*.

## Localizzazione degli zeri

Un polinomio si dice *normato*, se è di grado $n \geq 1$ e se il coefficiente di $x^n$ è uguale ad $1$.

Attenzione: Formuliamo tutte le seguenti proposizioni per polinomi normati. Se il polinomio dato non lo è, bisogna dividere tutti i coefficienti per il coefficiente della potenza più alta.

Nel seguito siano quindi sempre

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \quad \text{ed} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

**Proposizione 2.4.** *Sia $A := \max(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Sia $f(\alpha) = 0$. Allora $|\alpha| < 1 + A$.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che $A \neq 0$ e che $|\alpha| > 1$, perché altrimenti l'enunciato è banale.

Da $\alpha^n = -(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1})$ usando la disuguaglianza triangolare si ottiene $|\alpha^n| \leq A(1 + |\alpha| + \ldots + |\alpha^{n-1}|)$, cosicché per $\rho := |\alpha|$ si ha $\rho^n \leq A\dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1} < A\dfrac{\rho^n}{\rho - 1}$, usando che $A \neq 0$ e $\rho > 1$, per cui otteniamo $1 < \dfrac{A}{\rho - 1}$ e $\rho - 1 < A$ e quindi $\rho < 1 + A$.

**Proposizione 2.5.** *Sia $E$ il massimo dei valori assoluti dei seguenti numeri:*

$$\begin{array}{l} a_{n-1}a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3} \\ \ldots \\ a_{n-1}a_1 - a_0 \\ a_{n-1}a_0 \end{array}$$

*Sia $f(\alpha) = 0$. Allora $|\alpha| \leq \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4E}}{2}$.*

**Esercizio 2.6.** Applicare la prop. 2.5 al polinomio

$$f = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 10$$

e controllare il risultato con R; cfr. esempio 2.10.

Se i coefficienti di $f$ sono reali, il *numero dei cambi di segno* nella successione $(a_0, \ldots, a_{n-1}, 1)$ si determina così: Si tolgono tutti gli zeri, poi si conta quante volte passando da un coefficiente a quello successivo cambia il segno. Denotiamo nel seguito questo numero con $S$.

**Proposizione 2.7 (regola di Descartes).** *Sia $f \in \mathbb{R}[x]$. Allora il numero (tenendo conto delle molteplicità) delle radici positive di $f$ è uguale ad $S$ oppure più piccolo di un multiplo di $2$.*

**Corollario 2.8.** *I coefficienti $a_0, \ldots, a_{n-1}$ siano tutti $\leq 0$, ma non tutti uguali a $0$.*

*Allora $f$ possiede esattamente una radice positiva; questa radice è semplice.*

Dimostrazione. Infatti in questo caso $S = 1$. Per la regola di Descartes il numero delle radici positive deve essere uguale a uno dei numeri $1, -1, -3, -5, \ldots$ e quindi necessariamente uguale a $1$.

**Proposizione 2.9 (Eneström/Kakeya).** *I coefficienti di $f$ siano tutti positivi. Sia $f(\alpha) = 0$. Poniamo*

$$U := \min(a_0/a_1, a_1/a_2, \ldots, a_{n-2}/a_{n-1}, a_{n-1})$$
$$V := \max(a_0/a_1, a_1/a_2, \ldots, a_{n-2}/a_{n-1}, a_{n-1})$$

*Allora $U \leq |\alpha| \leq V$.*

**Esempio 2.10.** Sia $f := 3 + 2x + 5x^2 + 4x^3 + 3x^4 + x^5$. Allora

$$U = \min(3/2, 2/5, 5/4, 4/3, 3) = 0.4$$
$$V = \max(3/2, 2/5, 5/4, 4/3, 3) = 3$$

Per il teorema di Eneström/Kakeya ogni radice $\alpha$ di $f$ soddisfa la disuguaglianza $0.4 \leq |\alpha| \leq 3$. Infatti con

```
f=c(3,2,5,4,3,1)
for (x in polyroot(f)) print(abs(x))
```

in R otteniamo i valori assoluti

$0.873403 \quad 1.349562 \quad 0.873403 \quad 1.349562 \quad 2.159266$