6. Funzioni di matrici ed esponenziale matriciale

Situazione 6.1. Sia $A \in \mathbb{C}_n^n$ e sia $\sigma(A)$ lo spettro di A, cioè l'insieme dei suoi autovalori.

Come sempre, per un anello commutativo K denotiamo con K_m^n l'insieme delle matrici ad n righe ed m colonne con coefficienti in K. δ sia la matrice identitica in K_n^n.

Definizione 6.2. Per un polinomio $f = a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r \in \mathbb{C}[x]$ definiamo $f(A) := \sum_{k=0}^{r} a_k A^k$. Naturalmente $A^0 := \delta$.

Osservazione 6.3. Sia $\varphi = \dfrac{f}{g}$ con f, g $\in \mathbb{C}[x]$ una funzione razionale per cui $g(\lambda) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$.

Allora la matrice $\varphi(A) := (g(A))^{-1} f(A)$ risulta ben definita.

Dimostrazione. La matrice $\varphi(A)$ è ben definita in quanto sono ben definite $f(A)$ e $g(A)$, secondo la definizione precedente, ed è possibile invertire $g(A)$ in quanto si è supposto $g(\lambda) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$.

Osservazione 6.4. Siano Ω un dominio di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Γ sia una curva di Jordan in Ω che contiene $\sigma(A)$ al suo interno. Allora si può definire

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z\delta - A)^{-1} \, dz$$

Si può dimostrare che questa matrice è ben definita e non dipende da Γ. Per i coefficienti essa significa

$$(f(A))_k^j := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)((z\delta - A)^{-1})_k^j \, dz$$

per ogni j,k.

Se z_0 è un punto di Ω in cui f è rappresentata dalla serie di potenze $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, si può dimostrare che $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - z_0\delta)^k$.

Definizione 6.5. L'esponenziale

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

è definito per ogni $A \in \mathbb{C}_n^n$.

Nel teorema 6.6 riportiamo alcuni utili enunciati sulle proprietà dell'esponenziale di una matrice.

Teorema 6.6.

(1) Per ogni $T \in GL(n, \mathbb{C})$ si ha $e^{T^{-1}AT} = T^{-1} e^A T$.
(2) Sia $B \in \mathbb{C}_n^n$ e $AB = BA$. Allora $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$*, quindi* e^A *è sempre una matrice invertibile.*

(4) *Se* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sono gli autovalori di* A*, allora* $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$ *sono gli autovalori di* e^A*. La moltiplicità degli autovalori di* A *è maggiore o uguale a quella di* e^A*, in quanto può accadere che* $\lambda_j \neq \lambda_k$*, ma* $e^{\lambda_j} = e^{\lambda_k}$*.*

(5) $\det(e^A) = e^{trA}$.

Dimostrazione. Huppert, pagg. 269-283, Arnold, pagg. 115 sgg., Amann, pagg. 167-183.

Nota 6.7. L'equazione differenziale $\dot{x} = Ax$ (in cui si cerca una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$) per ogni dato iniziale $x(0) = x_0$ ammette un'unica soluzione $x = \bigcirc_t e^{tA} x_0$.

Ciò implica l'enunciato analogo per l'equazione differenziale matriciale $\dot{X} = AX$, in cui si cerca una funzione $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n_n$. Per ogni k infatti, questa corrisponde a un'equazione $\dot{X}_k = AX_k$ con soluzione $X_k = \bigcirc_t e^{tA} X_k(0)$ e ciò significa proprio che $X = \bigcirc_t e^{tA} X(0)$.
In particolare, l'unica soluzione del problema

$$\dot{X} = AX \quad \text{con} \quad X(0) = \delta \quad \text{è} \quad X = e^{tA}.$$

Definizione 6.8. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ ed $m \in \mathbb{N}+1$ definiamo le *caselle di Jordan* $J_m(\lambda) \in \mathbb{C}^m_m$ nel modo seguente:

$$J_1(\lambda) := (\lambda)$$

$$J_2(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_3(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Se poniamo $N_m := J_m(0)$, abbiamo $J_m(\lambda) = \lambda\delta + N_m$.

Osservazione 6.9. $N \in \mathbb{C}^n_n$ sia una matrice nilpotente, cioè tale che esiste $r \in \mathbb{N}$ con $N^r = 0$. Allora la matrice $\delta - N$ è invertibile e si ha

$$(\delta - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{r-1} N^k.$$

Dimostrazione. [36]

Proposizione 6.10. *Siano* $z, \lambda \in \mathbb{C}$ *ed* $m \geq 1$*. Se* $z \neq \lambda$*, allora*

$$(z\delta - J_m(\lambda))^{-1} = ((z-\lambda)\delta - N_m)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N_m^k}{(z-\lambda)^{k+1}}.$$

Dimostrazione. [37]

Proposizione 6.11. *Siano $\lambda \in \mathbb{C}$ ed Ω un dominio di $\mathbb{C}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. $f : \Omega \Rightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione analitica e Γ una curva di Jordan in Ω che contiene λ al suo interno. Allora*

$$f(J_m(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} N_m^k =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\lambda)}{(m-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. [38]

Definizione 6.12. Siano $M_1, \dots, M_s$ matrici quadratiche, non necessariamente della stessa dimensione. Allora con $M_1 \bigoplus \dots \bigoplus M_s$ denotiamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & M_s \end{pmatrix}$$

Diciamo allora che M è *somma diretta* delle matrici M_j.

Teorema 6.13 Teorema della forma normale di Jordan. *Esiste $T \in GL(n, \mathbb{C})$ tale che $A = T^{-1}MT$, dove M è somma diretta di caselle di Jordan.*

Dimostrazione. MANCA?

Osservazione 6.14. Sia f come nella osservazione 6.4 e $T \in GL(n, \mathbb{C})$, allora $f(T^{-1}AT) = f(A)$.

Perciò in principio si può usare la proposizione 6.11 per calcolare $f(A)$, ma la forma normale di Jordan presenta difficoltà algoritmiche e numeriche.

Dimostrazione. [39]