8. Matrici che soddisfano una equazione quadratica

Situazione 8.1. Sia $A \in \mathbb{C}^n_n$. Quando non è indicato diversamente, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definizione 8.2. Diciamo che A soddisfa un'equazione quadratica, se esiste un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ di grado ≤ 2 tale che $f(A) = 0$.

Possiamo assumere che f abbia una delle seguenti forme:

$$f = x - \lambda$$
$$f = (x - \lambda)^2$$
$$f = (x - \lambda)(x - \mu)$$

con $\lambda \neq \mu$.

Osservazione 8.3.

(1) Sia $A - \lambda\delta = 0$. Allora $A = \lambda\delta$ e $x - \lambda$ è il polinomio minimale di A. In questo caso $e^{tA} = e^{\lambda t}\delta$.
(2) Sia $(A - \lambda\delta)(A - \mu\delta) = 0$, ma $A - \lambda\delta \neq 0$ e $A - \mu\delta \neq 0$. Allora $(x - \lambda)(x - \mu)$ è il polinomio minimale di A.

Lemma 8.4. *Con $Q := A - \lambda\delta$ sia $Q^2 = 0$. Allora $AQ = \lambda Q$.*

Dimostrazione. Abbiamo $0 = Q^2 = (A - \lambda\delta)Q = AQ - \lambda Q$.

Proposizione 8.5. *Sia $(A - \lambda\delta)^2 = 0$. Allora*

$$e^{At} = e^{\lambda t}(\delta + t(A - \lambda\delta)).$$

Dimostrazione. Siano $Q := A - \lambda\delta$ e $X := e^{\lambda t}(\delta + tQ)$. È sufficiente dimostrare che $X(0) = \delta$ e che X soddisfa l'equazione differenziale $\dot{X} = AX$.

(1) $X(0) = \delta$.
(2) $\dot{X} = \lambda e^{\lambda t}(\delta + tQ) + e^{\lambda t}Q = e^{\lambda t}[\lambda\delta + \lambda tQ + Q] = e^{\lambda t}(A + \lambda tQ)$
$AX = e^{\lambda t}(A + tAQ) \overset{8.4}{=} e^{\lambda t}(A + \lambda tQ)$.

Si noti che l'enunciato è banalmente vero anche quando $A - \lambda\delta = 0$.

Un'altra dimostrazione verrà data nella proposizione 9.2.

Osservazione 8.6. Sia $(A - \lambda\delta)^2 = 0$, ma $A \neq \lambda\delta$. Allora $(x - \lambda)^2$ è evidentemente il polinomio minimale di A, e siccome le radici di $\mathcal{M}_A$ coincidono con le radici di $\mathcal{P}_A$, necessariamente $\mathcal{P}_A = (x - \lambda)^n$.

Nota 8.7. Il polinomio caratteristico di una matrice 2×2
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è $x^2 - (a + d)x + ad - bc$.

Dal teorema 7.20 segue che la matrice soddisfa l'equazione $(A - \lambda\delta)^2 = 0$ se e solo se λ è radice doppia del polinomio caratteristico.

Per la proposizione 8.5 abbiamo in questo caso

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} te^{\lambda t}.$$

Si noti che $\mathcal{P}_A$ possiede una radice doppia se e solo se il discriminante $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$ si annulla. In tal caso $\lambda = \dfrac{a+d}{2}$.

Esempio 8.8. Sia $A = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Allora $\mathcal{P}_A = x^2 - 16x + 64 = (x-8)^2$.

Inoltre $A \neq 8\delta$. Per la proposizione 8.5 abbiamo:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{8t} + \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} te^{8t} = e^{8t} \begin{pmatrix} 1+6t & 9t \\ -4t & 1-6t \end{pmatrix}$$

Esempio 8.9. Sia $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Allora

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + te^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & bte^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Esempio 8.10. Siano $A = \begin{pmatrix} 21 & 5 & 2 \\ -72 & -17 & -8 \\ 18 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ e $Q := A - 3\delta = \begin{pmatrix} 18 & 5 & 2 \\ -72 & -20 & -8 \\ 18 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Allora $Q^2 = 0$ e dalla proposizione 8.5 abbiamo

$$e^{tA} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{3t} \begin{pmatrix} 18 & 5 & 2 \\ -72 & -20 & -8 \\ 18 & 5 & 2 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+18t & 5t & 2t \\ -72t & 1-20t & -8t \\ 18t & 5t & 1+2t \end{pmatrix}$$

Lemma 8.11. *Sia* $(A - \lambda\delta)(A - \mu\delta) = 0$ *con* $\lambda \neq \mu$.

Se poniamo $P := \dfrac{A - \mu\delta}{\lambda - \mu}$ *e* $Q := \dfrac{A - \lambda\delta}{\mu - \lambda}$*, allora* $AP = \lambda P$ *e* $AQ = \mu Q$.

<u>Dimostrazione.</u> A soddisfa l'equazione $A^2 = (\lambda+\mu)A - \lambda\mu\delta$. Perciò

$$AP = \frac{1}{\lambda-\mu}(A^2 - \mu A) = \frac{1}{\lambda-\mu}[(\lambda+\mu)A - \lambda\mu\delta - \mu A] = \lambda\frac{A-\mu\delta}{\lambda-\mu} = \lambda P,$$

e nello stesso modo (per simmetria) $AQ = \mu Q$.

Proposizione 8.12. *Sia* $(A - \lambda\delta)(A - \mu\delta) = 0$ *con* $\lambda \neq \mu$. *Allora*

$$e^{tA} = \frac{A-\mu\delta}{\lambda-\mu} e^{\lambda t} + \frac{A-\lambda\delta}{\mu-\lambda} e^{\mu t}$$

<u>Dimostrazione.</u> Con $P := \dfrac{A-\mu\delta}{\lambda-\mu}$ e $Q := \dfrac{A-\lambda\delta}{\mu-\lambda}$, poniamo $X := Pe^{\lambda t} + Qe^{\mu t}$. Di nuovo è sufficiente dimostrare che $X(0) = \delta$ e che X soddisfa l'equazione differenziale $\dot{X} = AX$.

(1) $X(0) = P + Q = \dfrac{1}{\lambda-\mu}(A - \mu\delta - A + \lambda\delta) = \delta$.

(2) $\dot{X} = \lambda P e^{\lambda t} + \mu Q e^{\mu t}$, mentre $AX = APe^{\lambda t} + AQe^{\mu t} X$.
Per il lemma 8.11 abbiamo $AP = \lambda P$ e $AQ = \mu Q$ e ciò implica che veramente $\dot{X} = AX$.

Nota 8.13. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sia una matrice quadratica con gli autovalori λ e μ. Se $\lambda \neq \mu$, dalla proposizione 8.12 abbiamo

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{pmatrix} e^{\lambda t} + \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} e^{\mu t}.$$

Esempio 8.14. Sia $A = \begin{pmatrix} 33 & 124 \\ -8 & -30 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Dalla nota 8.13 otteniamo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 32 & 124 \\ -8 & -31 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 31 & 124 \\ -8 & -32 \end{pmatrix} e^{t}$$

Esempio 8.15. Sia $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq \mu$. Allora

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} \lambda - \mu & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} e^{\mu t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{b}{\lambda - \mu}(e^{\lambda t} - e^{\mu t}) \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

Esempio 8.16. Siano $b \in \mathbb{C}$ e $A := \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$.

<u>Dimostrazione.</u> Si vede direttamente che la formula è vera per $b = 0$. Sia $b \neq 0$. Il polinomio caratteristico di A è $x^2 + b^2$ e gli autovalori di A sono ib e $-ib$. Applicando la nota 8.13 con $\lambda = ib$ e $\mu = -ib$ abbiamo

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{2bi} \left[\begin{pmatrix} ib & b \\ -b & ib \end{pmatrix} e^{ibt} + \begin{pmatrix} ib & -b \\ b & ib \end{pmatrix} e^{-ibt} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} e^{ibt} + \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} e^{-ibt} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} ie^{ibt} + ie^{-ibt} & e^{ibt} - e^{-ibt} \\ -e^{ibt} + e^{-ibt} & ie^{ibt} + ie^{-ibt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esempio 8.17. Siano $b \in \mathbb{C}$ e $A := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh bt & \sinh bt \\ \sinh bt & \cosh bt \end{pmatrix}$.

<u>Dimostrazione.</u> Si vede direttamente che la formula è vera per $b = 0$. Sia $b \neq 0$. Il polinomio caratteristico di A è $x^2 - b^2$ e gli autovalori di A sono b e $-b$. Applicando la nota 8.13 con $\lambda = b$ e $\mu = -b$ abbiamo

$$e^{tA} = \frac{1}{2b}\left[\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} e^{bt} - \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} e^{-bt}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{bt} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{-bt}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{bt}+e^{-bt} & e^{bt}-e^{-bt} \\ e^{bt}-e^{-bt} & e^{bt}+e^{-bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh bt & \sinh bt \\ \sinh bt & \cosh bt \end{pmatrix}$$

Osservazione 8.18.

(1) Il polinomio minimale di A è della forma $(x-\lambda)(x-\mu)$ con $\lambda \neq \mu$ se e solo se la forma normale di Jordan di A è una matrice diagonale con gli autovalori λ e μ.

(2) Il polinomio minimale di A è della forma $(x-\lambda)^2$ se e solo se nella forma normale di Jordan gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a λ e appare almeno una casella di Jordan di dimensione 2 e nessuna casella di Jordan di dimensione superiore.