9. Formule che utilizzano serie ipergeometriche

Situazione 9.1. $A \in \mathbb{C}_n^n$. Quando non indicato diversamente, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Proposizione 9.2. *Sia* $(A - \lambda\delta)^m = 0$ *per qualche* $m \geq 1$. *Allora*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda\delta)^k$$

Dimostrazione. Ricordando che $(A-\lambda\delta)^m = 0$ e quindi $(A-\lambda\delta)^k = 0$ per ogni $k \geq m$, si ha che:

$$e^{At} = e^{t\lambda\delta} e^{t(A-\lambda\delta)} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda\delta)^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda\delta)^k$$

Questa formula, che generalizza la proposizione 8.5, segue direttamente dallo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale. Infatti, siccome le matrici $t\lambda\delta$ e $t(A-\lambda\delta)$ commutano, dal teorema 6.6 (2) otteniamo l'enunciato.

Corollario 9.3. *Gli autovalori di* A *siano tutti uguali a* λ. *Allora*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda\delta)^k$$

Esempio 9.4. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ -5 & -19 & -6 \end{pmatrix}$. Allora $(A - 2\delta)^3 = 0$ e dalla proposizione 9.2 abbiamo

$$\begin{aligned}
(A-2\delta)^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -5 & -19 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -5 & -19 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -5 & -19 & -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dalla proposizione 9.2 abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{2t}(\delta + t(A-2\delta) + \frac{t^2}{2}(A-2\delta)^2) \\
&= e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -5 & -19 & -8 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \right] \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t+\frac{t^2}{2} & 5t+t^2 & 2t+\frac{t^2}{2} \\ 2t+\frac{t^2}{2} & 1+7t+t^2 & 3t+\frac{t^2}{2} \\ -5t-\frac{3t^2}{2} & -19t-3t^2 & 1-8t-\frac{3t^2}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esempio 9.5. Sia $A = \begin{pmatrix} \lambda & b & c \\ 0 & \lambda & f \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Allora

$$(A - \lambda\delta) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda\delta)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bf \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(A - \lambda\delta)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

per cui dalla proposizione 9.2 abbiamo

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & bf \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & tb & tc + \frac{t^2}{2} bf \\ 0 & 1 & tf \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definizione 9.6. I numeri complessi $\lambda_1, ..., \lambda_n$ siano tutti distinti.

Definiamo allora

$$L_k := \frac{(x - \lambda_1) \ldots (\widehat{x - \lambda_k}) \ldots (x - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\widehat{\lambda_k - \lambda_k}) \ldots (\lambda_k - \lambda_n)}$$

per $k = 1, ..., n$ (nel caso banale $n = 1$ abbiamo solo $L_1 = 1$).

Il simbolo $\widehat{\ }$ indica che un termine deve essere tralasciato. I polinomi L_k si chiamano *polinomi di Lagrange* determinati dai punti d'ascissa (talvolta detti nodi) $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Ogni polinomio L_k è di grado $n - 1$ e sostituendo x con λ_j vediamo che

$$L_k(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{per } j = k \\ 0 & \text{per } j \neq k \end{cases}$$

Osservazione 9.7. Nella situazione della definizione 9.6 siano dati numeri complessi $y_1, ..., y_n$. Allora esiste un unico polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ di grado $\leq n - 1$ che nei nodi λ_k assume i valori y_k. Si ha $f = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j$.

<u>Dimostrazione.</u> $\sum_{j=1}^{n} y_j L_j(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{n} y_j \delta_k^j = y_k$.

L'unicità segue dall'ipotesi che i λ_k siano tutti distinti.

Lemma 9.8. *Nella situazione della definizione 9.6 si ha*
$L_1 + \ldots + L_n = 1$.

Dimostrazione. Se nell'osservazione 9.7 poniamo $y_k = 1$ per ogni k, vediamo che $L_1 + \ldots + L_k$ è l'unico polinomio di grado $\leq n-1$ che nei nodi λ_k assume il valore 1. Ma questo polinomio è il polinomio costante 1.

Lemma 9.9. *Gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A siano tutti distinti. Formiamo i polinomi di Lagrange L_k come nella definizione 9.6. Allora $AL_k(A) = \lambda L_k(A)$ per $k = 1, ..., n$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Cayley Hamilton (teorema 7.22) e il lemma 7.2 abbiamo $(A - \lambda_1\delta) \cdots (A - \lambda_n\delta) = 0$.

Ancora per il lemma 7.2 si ha

$$(A - \lambda_k\delta)L_k(A) = \frac{(A - \lambda_k\delta)(A - \lambda_1\delta) \cdots (\widehat{A - \lambda_k\delta}) \cdots (A - \lambda_n\delta)}{(\lambda_1 - \lambda_k) \cdots (\widehat{\lambda_k - \lambda_k}) \cdots (\lambda_k - \lambda_n)} = 0$$

e quindi $\quad AL_k(A) = \lambda L_k(A)$.

Proposizione 9.10. *Gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ della matrice A siano tutti distinti. Formiamo i polinomi di Lagrange L_k come nella definizione 9.6. Allora*

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$$

Dimostrazione. Sia $X := \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$. Verifichiamo che $X(0) = \delta$ e che X soddisfa l'equazione differenziale $\dot{X} = AX$.

(1) $X(0) = \sum_{k=1}^{n} L_k(A) = \delta$.
Qui abbiamo usato di nuovo il lemma 7.2: Sia $f = L_1 + \cdots + L_n$. Dal lemma 9.8 sappiamo che $f = 1$; per il lemma 7.2 abbiamo perciò $\sum_{k=1}^{n} L_k(A) = f(A) = \delta$.

(2) $\dot{X} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{\lambda_k t} L_k(A) \quad ,$

$$AX = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} AL_k(A) \overset{9.9}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{\lambda_k t} L_k(A) = \dot{X}.$$

Definizione 9.11. Per $z \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$ definiamo la *potenza crescente*

$$z^{[n]} := \begin{cases} z(z+1)\cdots(z+n-1) & \text{per } n \geq 1 \\ 1 & \text{per } n = 0 \end{cases}$$

$z^{[n]}$ si chiama spesso anche il *fattoriale superiore*.

Si noti che $z^{[n]} \neq 0$ per ogni n, se $-z \notin \mathbb{N}$.

Definizione 9.12. Per $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{C}$ con $-\beta_j \notin \mathbb{N}$ per ogni j definiamo la *serie ipergeometrica*

$$F\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_s\\ \beta_1\dots\beta_t\end{pmatrix} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{[n]}\cdots\alpha_s^{[n]}}{\beta_1^{[n]}\cdots\beta_t^{[n]}} \in \mathbb{C}[[x]]$$

Posizioni vuote possono essere indicate con $\square$, ad esempio

$$F\begin{pmatrix}\alpha & \square\\ \beta & 1\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{[n]}}{\beta^{[n]}1^{[n]}}, \quad F\begin{pmatrix}\square\dots\square\\ \beta_1\dots\beta_t\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_1^{[n]}\cdots\beta_t^{[n]}}.$$

Per le proprietà combinatorie delle serie ipergeometriche rimandiamo a Graham/Knuth/Patashnik e Petkovšek/Wilf/Zeilberger, per le proprietà analitiche a Whittaker/Watson e Andrews/Askey/Roy.

Tralasciamo nel seguito considerazioni di convergenza, quasi sempre evidenti.

Nota 9.13. Siano $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t \in \mathbb{C}$ con $-\beta_j \notin \mathbb{N}$ per ogni j. Allora i cofficienti $a_k := \dfrac{\alpha_1^{[k]}\cdots\alpha_s^{[k]}}{\beta_1^{[k]}\cdots\beta_t^{[k]}}$ di x^k nella serie $F\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_s\\ \beta_1\dots\beta_t\end{pmatrix}$ soddisfano le seguenti relazioni:

$$a_0 = 1,$$
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+\alpha_1)\cdots(k+\alpha_s)}{(k+\beta_1)\cdots(k+\beta_t)}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Se è viceversa data una serie formale $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i cui coefficienti soddisfano queste relazioni, essa coincide con $F\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_s\\ \beta_1\dots\beta_t\end{pmatrix}$.

Dimostrazione. Corso di Laboratorio di programmazione 2006/07.

Proposizione 9.14. *Nelle ipotesi della definizione 9.12 sia $\gamma \in \mathbb{C}$ con $-\gamma \notin \mathbb{N}$. Allora*

$$F\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_s\gamma\\ \beta_1\dots\beta_t\gamma\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_s\\ \beta_1\dots\beta_t\end{pmatrix}.$$

Lemma 9.15. *V sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e $a_1,\dots,a_r \in \mathbb{C}$. Assumiamo che $a_r \neq 0$. Consideriamo un'equazione alle differenze*

$$v_{k+r} + a_1 v_{k+r-1} + \ldots + a_r v_k = 0 \qquad (*)$$

in cui si cercano i valori $v_k \in V$ per $k \geq r$, mentre i valori iniziali $v_0,\dots,v_{r-1}$ siano dati. Sia

$$x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$$

con $\alpha_i \neq \alpha_j$ per $i \neq j$. Allora l'equazione $(*)$ possiede la soluzione

$$\begin{aligned} v_k = {} & (X_{10} + kX_{11} + \ldots + k^{m_1-1}X_{1,m_1-1})\alpha_1^k \\ & + \ldots + (X_{s0} + kX_{s1} + \ldots + k^{m_s-1}X_{s,m_s-1})\alpha_s^k \end{aligned}$$

con i coefficienti $X_{ij} \in V$ univocamente determinati dalle condizioni iniziali.

Si noti che l'ipotesi $a_r \neq 0$ implica $\alpha_i \neq 0$ per ogni i.

Dimostrazione. Elaydi, pag. 77, Huppert, pagg. 284-288, Meschkowski, pagg. 14-15.

Osservazione 9.16. La condizione $a_r \neq 0$ nel lemma 9.15 non è essenziale nella risoluzione di un'equazione alle differenze. Consideriamo ad esempio un'equazione della forma $v_{k+2} + a_1 v_{k+1} = 0$. Allora il valore iniziale v_0 non influisce sul proseguimento della successione, e ponendo $w_k := v_{k+1}$ l'equazione si riduce a

$$w_{k+1} + a_1 w_k = 0$$

con $w_0 = v_1$. Bisogna però controllare la condizione $a_r \neq 0$ prima di applicare la formula del lemma 9.15.

Definizione 9.17. Siano $m, j \in \mathbb{N}$. Allora definiamo la serie formale

$$e_{jm} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{(k+m)!} k^j x^k$$

Osservazione 9.18.

(1) $e_{00} = e^x$.

(2) $e_{0m} = \dfrac{m!}{x^m}\left(e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!}\right)$ per $m \in \mathbb{N}+1$.

Dimostrazione. Per $m \in \mathbb{N}+1$ abbiamo

$$e_{0m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{(k+m)!} x^k = \frac{m!}{x^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+m}}{(k+m)!} = \frac{m!}{x^m}\left[e^x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!}\right]$$

Lemma 9.19. *Per ogni $j \in \mathbb{N}+1$ vale la formula di ricorsione*

$$e_{j0} = x \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} e_{i0}$$

Dimostrazione. $j > 0$ implica $0^j = 0$, per cui

$$\begin{aligned} e_{j0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^j}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{k!} x^{k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{j-1}}{k!} x^k = \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} k^i = x \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^j}{k!} x^k = \\ &= x \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} e_{i0} \end{aligned}$$

Definizione 9.20. Per $n, k \in \mathbb{N}$ sia $S(n,k)$ il numero delle partizioni di un insieme con n elementi in k classi di equivalenza. I numeri $S(n,k)$

sono detti *numeri di Stirling di seconda specie*. È chiaro che $S(n,k) = 0$ per $k > n$.

Nota 9.21. Per $n, k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti formule:

(1) $S(n+1, k+1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k).$

(2) $S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$

(3) $S(n+1, k+1) = S(n,k) + (k+1) \cdot S(n, k+1).$

Possiamo così compilare la seguente tabella:

$S(n,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	3	7	15	31	63	127	255
3	0	0	0	1	6	25	90	301	966	3025
4	0	0	0	0	1	10	65	350	1701	7770
5	0	0	0	0	0	1	15	140	1050	6951
6	0	0	0	0	0	0	1	21	266	2646
7	0	0	0	0	0	0	0	1	28	462
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	36

Dimostrazione. Jacobs, pagg. 253-256, Halder/Heise, pagg. 56-59. Le formule sono elencate anche in Knuth, pagg. 65-67.

Teorema 9.22. *Per* $j \in \mathbb{N}$ *si ha* $e_{j0} = e^x \sum_{k=0}^{j} S(j,k) x^k$.

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione su j.

Osserviamo prima che in tutte le sommatorie possiamo sommare da 0 ad ∞, perché $\binom{n}{k} = S(n,k) = 0$ per $k > n$.

$j = 0$: Sappiamo dall'osservazione 9.18 che $e_{00} = e^x$. D'altra parte $S(0,0) = 1$ e quindi $\sum_{k=0}^{0} S(0,k) x^k = 1$.

$j \to j+1$:

$$
\begin{aligned}
e_{j+1,0} &\overset{9.19}{=} x \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j}{i} e_{i0} \overset{\text{ind.}}{=} x \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j}{i} e^x \sum_{k=0}^{\infty} S(i,k) x^k = \\
&= e^x \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j}{i} S(i,k) = \\
&= e^x \sum_{k=0}^{\infty} S(j+1, k+1) x^{k+1} = e^x \sum_{k=0}^{\infty} S(j+1, k) x^k
\end{aligned}
$$

L'ultima uguaglianza vale perché $S(j+1,0)=0$, come si vede ad esempio nella tabella della nota 9.21.

Osservazione 9.23. Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
e_{00} &= e^x \\
e_{10} &= xe^x \\
e_{20} &= (x+x^2)e^x \\
e_{30} &= (x+3x^2+x^3)e^x \\
e_{40} &= (x+7x^2+6x^3+x^4)e^x \\
&\quad \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

Lemma 9.24.

$$e_{0m} = F\begin{pmatrix} \square \\ m+1 \end{pmatrix}$$

$$e_{jm} = \frac{x}{m+1} F \begin{pmatrix} 2\dots 2 & \square \\ \underbrace{1\dots 1}_{j \text{ volte}} & m+2 \end{pmatrix}$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$ *e ogni* $j \in \mathbb{N}+1$.

Dimostrazione.

(1) $$e_{0m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{(k+m)!} x^k$$

Sia $a_k := \dfrac{m!}{(k+m)!}$. Allora $a_0 = 1$ ed $a_{k+1}/a_k = \dfrac{(k+m)!}{(k+m+1)!} = \dfrac{1}{k+m+1}$, per cui $e_{0m} = F\begin{pmatrix} \square \\ m+1 \end{pmatrix}$.

(2) Sia $j>0$. Allora

$$
\begin{aligned}
e_{jm} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{(k+m)!} k^j x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{(k+1+m)!}(k+1)^j x^{k+1} = \\
&= \frac{x}{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)!}{(k+m+1)!}(k+1)^j x^k
\end{aligned}
$$

Sia $a_k := \dfrac{(m+1)!}{(k+m+1)!}(k+1)^j$.

Allora $a_0 = 1$ ed $a_{k+1}/a_k = \dfrac{(k+2)^j (k+1+m)!}{(k+2+m)!(k+1)^j} = \dfrac{(k+2)^j}{(k+1)^j(k+m+2)}$,

per cui $$e_{jm} = \frac{x}{m+1} F \begin{pmatrix} 2\dots 2 & \square \\ \underbrace{1\dots 1}_{j \text{ volte}} & m+2 \end{pmatrix}$$

Lemma 9.25. *Siano* $b_1,\dots,b_r \in \mathbb{C}$ *ed* $A \in \mathbb{C}^n_n$. *Allora in* $\mathbb{C}^n_n$ *l'equazione alle differenze*

$$M_{k+r} = b_1 M_{k+r-1} + \dots + b_r M_r = 0$$

con le condizioni iniziali $M_0 = \delta, M_1 = A, \ldots, M_{r-1} = A^{r-1}$ *possiede (evidentemente) una soluzione* $\underset{k}{\bigcirc} M_k$ *univocamente determinata. Sia* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $A^{m+r} = b_1 A^{m+r-1} + \ldots + b_r A^m$*. Allora* $A^{m+k} = M_k A^m$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*.*

Dimostrazione. [40]

Nota 9.26. Siano $m \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathbb{C}[x]$ tali che $A^m g(A) = 0$, ad esempio $g = x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_s)^{m_s}$ con $a_r \neq 0$ e quindi $\alpha_i \neq 0$ per ogni i. Gli α_i siano tutti distinti e $m_i \geq 1$ per ogni i.

Le ipotesi implicano la relazione

$$A^{m+r} + a_1 A^{m+r-1} + \ldots + a_r A^m = 0$$

Applicando il lemma 9.15 possiamo trovare matrici M_k della forma

$$\begin{aligned} M_k = &(X_{10} + kX_{11} + \ldots + k^{m_1-1} X_{1,m_1-1})\alpha_1^k \\ &+ \ldots + (X_{s0} + kX_{s1} + \ldots + k^{m_s-1} X_{s,m_s-1})\alpha_s^k \end{aligned}$$

che soddisfano l'equazione alle differenze

$$M_{k+r} + a_1 M_{k+r-1} + \ldots + a_r M_k = 0$$

con i coefficienti $X_{ij} \in \mathbb{C}_n^n$ univocamente determinati dalle condizioni iniziali $M_0 = \delta, M_1 = A, \ldots, M_{r-1} = A^{r-1}$.

Per il lemma 9.25 abbiamo

$$A^{m+k} = M_k A^m = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i^k \sum_{j=0}^{m_i-1} k^j X_{ij} \right) A^m$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 9.27. *Nelle ipotesi e con le notazioni della nota 9.26 abbiamo*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{m} C_k \frac{(tA)^k}{k!}$$

con $C_k = \delta$ *per* $k < m$ *e*

$$\begin{aligned} C_m &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} X_{ij} e_{jm}(\alpha_i t) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left[X_{i0} F \begin{pmatrix} \square \\ m+1 \end{pmatrix} (\alpha_i t) + \frac{\alpha_i t}{m+1} \sum_{j=1}^{m_i-1} X_{ij} F \begin{pmatrix} 2 & \ldots & 2 & \square \\ 1 & \ldots & 1 & m+2 \end{pmatrix} (\alpha_i t) \right] \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $R := \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$. Allora $e^{tA} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(tA)^k}{k!} + R$.

Inoltre

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{k+m}}{(k+m)!} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^k \sum_{j=0}^{m_i-1} k^j X_{ij} A^m =$$
$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k m!}{(k+m)!} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^k \sum_{j=0}^{m_i-1} k^j X_{ij} \right)}_{=:M} \frac{(tA)^m}{m!}$$

Perciò

$$M = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} X_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{(k+m)!} k^j (\alpha_i t)^k$$

L'enunciato segue dal lemma 9.24.

Corollario 9.28. *Nelle ipotesi e con le notazioni della nota 9.26 assumiamo inoltre* $m = 0$*. Allora*

$$e^{tA} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_j-1} X_{ij} e_{j0}(\alpha_j t) = \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i t} \sum_{j=0}^{m_i-1} X_{ij} \sum_{k=0}^{j} S(j,k)(\alpha_i t)^k$$

Si noti che un'equazione di questa forma vale sicuramente se gli autovalori di A *sono tutti diversi da zero, cioè se la matrice* A *è invertibile.*

Osservazione 9.29. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ (non necessariamente un autovalore di A). Allora $e^{tA} = e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda\delta)}$.

Dimostrazione. Già visto nella dimostrazione della proposizione 9.4.

Proposizione 9.30 (formula di Apostol). *Siano* $m \geq 1$ *ed* $(A-\lambda\delta)^m (A-\mu\delta) = 0$ *con* $\lambda \neq \mu$*. Allora*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A-\lambda\delta)^k + \frac{1}{(\mu-\lambda)^m} \left(e^{(\mu-\lambda)t} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mu-\lambda)^k t^k}{k!} \right) (A-\lambda\delta)^m \right]$$

Dimostrazione. [41]

Proposizione 9.31. *Siano* $m \geq 1$ *ed* $(A-\lambda\delta)^m (A-\mu\delta)^2 = 0$ *con* $\lambda \neq \mu$*. Allora*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A-\lambda\delta)^k + M (A-\lambda\delta)^m \right]$$

con

$$M = \frac{1}{(\mu-\lambda)^m} \left[e^{(\mu-\lambda)t} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mu-\lambda)^k t^k}{k!} \right]$$
$$+ \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} F \begin{pmatrix} 2 & \square \\ m+2 & 1 \end{pmatrix} ((\mu-\lambda)t) \cdot (A-\mu\delta)$$

Dimostrazione. [42]

Lemma 9.32. *Siano $\lambda \in \mathbb{C}$, $-\lambda \notin \mathbb{N}$ e J_λ la funzione di Bessel di prima specie di ordine λ. Allora*

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda F\begin{pmatrix} \Box & \Box \\ \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}(-x^2/4)$$

dove $\lambda! = \Gamma(\lambda+1)$.

Dimostrazione. Andrews/Askey/Roy, pag. 200.

Lemma 9.33 (seconda trasformazione di Kummer). *Sia $a \in \mathbb{C}$ e $1-2a \notin \mathbb{N}$. Allora anche $\dfrac{1}{2} - a \notin \mathbb{N}$ e si ha*

$$F\begin{pmatrix} a & \Box \\ 2a & 1 \end{pmatrix} = e^{x/2} F\begin{pmatrix} \Box & \Box \\ a+\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}(x^2/4)$$

Dimostrazione. Corso di Laboratorio di programmazione 2005/06.

Nota 9.34. Dai lemmi 9.32 e 9.33 otteniamo

$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix} 2 & \Box \\ 4 & 1 \end{pmatrix} &= e^{x/2} F\begin{pmatrix} \Box & \Box \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}(x^2/4) = e^{x/2} F\begin{pmatrix} \Box & \Box \\ \frac{3}{2}+1 & 1 \end{pmatrix}(-(ix)^2/4) \\ &= e^{x/2}\left(\frac{3}{2}\right)!\left(\frac{2}{ix}\right)^{3/2} J_{3/2}(ix) = \frac{3}{2} e^{x/2}\sqrt{\pi}(ix)^{-3/2} J_{3/2}(ix) \end{aligned}$$

Secondo Abramowitz, pagg. 437-438, e Bowman, pag. 95, si ha

$$J_{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

Questa formula può essere applicata nel caso $B^2(B-\alpha\delta)^2 = 0$ con $\alpha \neq 0$ del teorema 9.27 [ELABORATO 43]