10. Interpolazione di Hermite

Situazione 10.1. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ tutti distinti ed $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}+1$. Sia $m := m_1 + \ldots + m_s$.

Lemma 10.2. *Siano $f \in \mathbb{C}[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $p \in \mathbb{N}$. Allora α è uno zero di molteplicità (esatta) p di f se e solo se $f^{(j)}(\alpha) = 0$ per ogni $j = 0, \ldots, p-1$ ed $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$.*

Dimostrazione. Corso di Algebra oppure Scheja/Storch, pag. 109.

Corollario 10.3. *Sia $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $< m$ tale che per ogni $k = 1, \ldots, s$ si abbia $f^{(j)}(\lambda_k) = 0$ per ogni $j = 0, \ldots, m_k - 1$. Allora $f = 0$.*

Dimostrazione. MANCA

Teorema 10.4. *Per ogni $k = 1, \ldots, s$ ed ogni $j = 0, \ldots, m_k - 1$ sia dato un numero complesso v_{ij}. Allora esiste esattamente un polinomio $H \in \mathbb{C}[x]$ di grado $< m$ tale che per ogni $k = 1, \ldots, s$ si abbia $H^{(j)}(\lambda_j) = v_{kj}$ per ogni $j = 0, \ldots, m_k - 1$.*

Dimostrazione. MANCA

Definizione 10.5. Il polinomio H nella proposizione 10.7 si chiama il *polinomio di interpolazione di Hermite* rispetto al problema di interpolazione dato.

Per indicare i parametri del problema di interpolazione, denotiamo H con

$$H[\lambda_1 : (v_{10}, \ldots, v_{1,m_1-1}), \ldots, \lambda_s : (v_{s0}, \ldots, v_{s,m_s-1})]$$

Abbreviando $v_k := (v_{k0}, \ldots, v_{k,m_k-1})$ per ogni k, possiamo anche scrivere $H = H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]$. Talvolta, in algoritmi ricorsivi, ammettiamo anche che uno dei vettori v_k sia il vettore vuoto, cioè che $v_k = ()$, ponendo in tal caso

$$H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s] := H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_{k-1} : v_{k-1}, \lambda_{k+1} : v_{k+1}, \ldots, \lambda_s : v_s].$$

Per $v_k = (v_{k0}, \ldots, v_{kt})$ con $t > 0$ poniamo infine $v_k^- := (v_{k0}, \ldots, v_{k,t-1})$.

Osservazione 10.6. Diamo adesso due dimostrazioni costruttive del teorema 10.4. Nella prima, basata sul teorema cinese del resto, seguiamo Gathen/Gerhard, pagg. 102-105 e 111-113, nella seconda esponiamo, in modo leggermente modificato, lo schema alle differenze che si trova in Stoer, pagg. 44-47, e Deuflhard/Hohmann, pagg. 207-211.

Lemma 10.7 (teorema cinese dei resti). *A sia un anello euclideo ed $a_1, \ldots, a_s \in A$ tale che $mcd(a_i, a_j) = 1$ per ogni $i \neq j$.*

Sia $b_i := a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_s$ (con la notazione introdotta nella definizione 9.6) per ogni i. Per ogni i allora $mcd(a_i, b_i) = 1$ e quindi esistono $\alpha_i, \beta_i \in A$ tali che $\alpha_i a_i + \beta_i b_i = 1$. Si noti che ciò implica ($\beta_i b_i = 1$, in A/a_i), *mentre è chiaro che ($\beta_i b_i = 0$, in A/a_j) per $j \neq i$ perché in tal caso $b_i = a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_j \cdots a_s$ (oppure $b_i = a_1 \cdots a_j \cdots \widehat{a_i} \cdots a_s$) è un multiplo di a_j.*

Siano adesso dati $c_1, \ldots, c_s \in A$. Se poniamo $c := \beta_1 b_1 c_1 + \ldots + \beta_s b_s c_s$, allora ($c = c_i$, in A/a_i) per ogni $i = 1, \ldots, s$.

Non è difficile (è per noi irrilevante) dimostrare che c è univocamente determinato dal modulo $a_1 \cdots a_s$.

Osservazione 10.8. Sia $H \in \mathbb{C}[x]$ come nel teorema 10.4. Allora H possiede per ogni $k = 1, \ldots, s$ uno sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned} H &= H(\lambda_k) + H'(\lambda_k)(x - \lambda_k) + \ldots + \frac{H^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!}(x-\lambda_k)^{m_k-1} + \ldots = \\ &= \underbrace{v_{k0} + v_{k1}(x-\lambda_k) + \ldots + \frac{v_{k,m_k-1}}{(m_k-1)!}(x-\lambda_k)^{m_k-1}}_{=:H_k} + \ldots \end{aligned}$$

e quindi

$(H = H_k, \text{ in } \mathbb{C}[x]/(x-\lambda_k)^{m_k-1})$ (*)

Siccome i polinomi $(x - \lambda_i)^{m_i}$ sono a due a due relativamente primi, dal lemma 10.8 vediamo che H è univocamente determinato dalle relazioni (*).

Osservazione 10.9. Dal punto di vista numerico forse più trasparente è la tecnica del calcolo delle differenze che esponiamo adesso.

Lemma 10.10. *Nelle ipotesi e con le notazioni della definizione 10.5 siano $i \neq l$ e*

$F := H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_i : v_i^-, \ldots, \lambda_s : v_s]$

$G := H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_l : v_l^-, \ldots, \lambda_s : v_s]$.

Allora

$$H = \frac{x - \lambda_i}{\lambda_l - \lambda_i} F + \frac{x - \lambda_l}{\lambda_i - \lambda_l} G$$

Dimostrazione. MANCA

Osservazione 10.11. Per s=1 il polinomio di interpolazione di Hermite coincide con lo sviluppo di Taylor:

$$H[\lambda_1 : (v_{10}, \ldots, v_{1,m_1-1})] = \sum_{j=0}^{m_1-1} v_{1j} \frac{(x-\lambda_1)^j}{j!}$$

Dimostrazione. ?

Nota 10.12. Otteniamo così un semplice algoritmo ricorsivo per il calcolo del polinomio di interpolazione di Hermite:

Per $s = 1$ utilizziamo il lemma 10.11, altrimenti riduciamo il grado del problema mediante il lemma 10.10.

Soprattutto nei conti a mano si può accorciare l'algoritmo utilizzando che $H[\lambda_1 : (v_10), \ldots, \lambda_s : (v_{s0})] = v_{10}L_1 + \ldots + v_{s0}L_s$ nella notazione della osservazione 9.7.

Esempio 10.13. Calcoliamo $H := H[1 : (3), 2 : (7, 1)]$. MANCA

Esempio 10.14. Calcoliamo $H := H[1 : (3, 4), 0 : (6, 2, 10)]$. MANCA

Nota 10.15. Possiamo realizzare l'algoritmo indicato nella nota 10.12 in Python mediante le seguenti funzioni che utilizzano il modulo *swiginac*. MANCA

Nota 10.16. Nelle ipotesi e con le notazioni della definizione 10.5 denotiamo con $\Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]$ il coefficiente della potenza massimale formale, cioè di x^{m-1}, in $H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]$.

Scegliamo questa notazione perché questi coefficienti corrispondono a uno schema alle differenze che deriva dal lemma 10.10, come vediamo adesso.

Elenchiamo inoltre le condizioni $H^{(0)}(\lambda_1) = v_{10}, \ldots, H^{(m_1-1)}(\lambda_1) = v_{1,m_1-1}$, $H^{(0)}(\lambda_2) = v_{20}, \ldots$ nell'ordine indicato e denotiamo, per $i = 0, \ldots, m-1$, con $H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]_{[i]}$ il polinomio di interpolazione di Hermite che corrisponde alle prime $i+1$ condizioni, in modo analogo sia definito $\Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]_{[i]}$.

In particolare $H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]_{[0]} = \Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]_{[0]} = v_{10}$.

Definiamo poi $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) := (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{m_s})$ ed infine

$$(x-\alpha)_{[0]} := 1 \quad , \quad (x-\alpha)_{[1]} := x - \alpha_1 \quad ,$$
$$(x-\alpha)_{[i]} := (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_i) \text{ per } i = 1, \ldots, m.$$

Osservazione 10.17. Nelle ipotesi e con le notazioni della nota 10.16 si hanno le seguenti relazioni:

(1) Se $i \neq l$, allora

$$\Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s] = \frac{\Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_i : v_i^-, \ldots, \lambda_s : v_s] - \Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_l : v_l^-, \ldots, \lambda_s : v_s]}{\lambda_p - \lambda_i}$$

(2) $\Delta[\lambda_1 : v_1] = \dfrac{v_{1,m_1-1}}{(m_1-1)!}$.

<u>Dimostrazione.</u> Direttamente dal lemma 10.10 e dalla osservazione 10.11.

Osservazione 10.18. Con le notazioni della nota 5.16 vale

$$H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s] = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]_{[i]}(x-\alpha)_{[i]}.$$

<u>Dimostrazione.</u> MANCA

Esempio 10.19. Calcoliamo $H := H[1 : (3), 2 : (7, 1)]$ con il metodo della osservazione 10.18. MANCA

Esempio 10.20. Calcoliamo $H := H[0 : (6, 2, 10), 1 : (3, 4)]$ con il metodo della osservazione 10.18. MANCA

Nota 10.21. I calcoli che utilizziamo nell'osservazione 10.18 possono essere semplificati mediante il seguente schema alle differenze che illustriamo per il caso

$$H = H[\lambda_1 : (v_{10}, v_{11}, v_{12}), \lambda_2 : (v_{20}), \lambda_3 : (v_{30}, v_{31}), \lambda_4 : (v_{40}, v_{41})].$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
\lambda_1 : (v_{10}, v_{11}, v_{12}) & & & & & & & & \\
 & v_{10} & & & & & & & \\
 & [\lambda_1] & v_{11} & & & & & & \\
 & v_{10} & [\lambda_1] & v_1 2 & & & & & \\
 & [\lambda_1] & v_{11} & [\lambda_1, \lambda_2] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_2 - \lambda_1} & & & & \\
 & v_{10} & [\lambda_1, \lambda_2] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_2 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_1} & & & \\
\lambda_2 : (v_{20}) & [\lambda_1, \lambda_2] & \frac{v_{20} - v_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_1} & & \\
 & v_{20} & [\lambda_1, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_1} & \\
\lambda_3 : (v_{30}, v_{31}) & [\lambda_2, \lambda_3] & \frac{v_{30} - v_{20}}{\lambda_3 - \lambda_2} & [\lambda_1, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_1} \\
 & v_{30} & [\lambda_2, \lambda_3] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_3 - \lambda_2} & [\lambda_1, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_1} & [\lambda_1, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_1} & \\
 & [\lambda_3] & v_{31} & [\lambda_2, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_2} & [\lambda_1, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_1} & & \\
 & v_{30} & [\lambda_3, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_3} & [\lambda_2, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_2} & & & \\
\lambda_4 : (v_{40}, v_{41}) & [\lambda_3, \lambda_4] & \frac{v_{40} - v_{30}}{\lambda_4 - \lambda_3} & [\lambda_3, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_3} & & & & \\
 & v_{40} & [\lambda_3, \lambda_4] & \frac{\text{diff.}}{\lambda_4 - \lambda_3} & & & & & \\
 & [\lambda_4] & v_{41} & & & & & & \\
 & v_{40} & & & & & & &
\end{array}
$$

MANCA SPIEGAZIONE. È chiaro che nella diagonale superiore otteniamo i coefficienti $\Delta[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]_{[i]}$.

Esempio 10.22. Calcoliamo $H = H[0 : (-1, -2), 1 : (0, 10, 40)]$. MANCA

Esempio 10.23. Calcoliamo $H = H[1 : (2, 5, 6), 2 : (11), 3 : (0, -27), 4 : (-37, 158)]$. MANCA

Esempio 10.24. Per $\lambda_1 \neq \lambda_2$ calcoliamo $H = H[\lambda_1 : (1,0,0), \lambda_2 : (0,0)]$.
MANCA

Definizione 10.25. Per $k = 1, \ldots, s$ e $j = 0, \ldots, m_k - 1$ definiamo H_{kj} come la soluzione del problema di interpolazione $H_{kj}^{(\alpha)}(\lambda_\beta) = \delta_{k\beta}\delta_j^\alpha$ per $\beta = 1, \ldots, s$ ed $\alpha = 0, \ldots, m_\beta - 1$.

Abbiamo quindi $H_{10} = H(\lambda_1 : (1,0,\ldots,0), \ldots)$, $H_{11} = H(\lambda_1 : (0,1,\ldots,0), \ldots)$, $H_{12} = H(\lambda_1 : (0,0,1,\ldots,0), \ldots), \ldots, H_{20} = H(\lambda_2 : (1,0,\ldots,0), \ldots)$, $H_{21} = H(\lambda_2 : (0,1,\ldots,0), \ldots), \ldots$.

I polinomi H_{kj} sono detti *polinomi di interpolazione fondamentale di Hermite*.

Nell'esempio 10.24 abbiamo calcolato H_{10} per $m_1 = 3$, $m_2 = 2$.

Proposizione 10.26. *Nella situazione della definizione 10.25 siano adesso dati i numeri complessi v_{kj} per $k = 1, \ldots, s$ e $j = 0, \ldots, m_k - 1$. Sia $H := H[\lambda_1 : v_1, \ldots, \lambda_s : v_s]$. Allora*

$$H = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_s - 1} v_{kj} H_{kj}.$$

<u>Dimostrazione.</u> MANCA