11. La formula spettrale di Sylvester-Buchheim

Situazione 11.1. Siano $A \in \mathbb{C}^n_n$ ed $\mathcal{M}_A = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_s)^{m_s}$ con i λ_k tutti distinti ed $m_k \geq 1$ per ogni k. Siano $m := m_1 + \ldots + m_s$ e $t \in \mathbb{R}$.

Proposizione 11.2. *Ω sia un dominio di $\mathbb{C}$ che contiene lo spettro $\delta(A)$ ed $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ due funzioni analitiche. Assumiamo che per ogni $k = 1, \ldots, s$ si abbia $f^{(j)}(\lambda_k) = g^{(j)}(\lambda_k)$ per ogni $j = 0, \ldots, m_k - 1$. Allora $f(A) = g(A)$.*

Dimostrazione. Forst/Hoffmann, pag. 335, Cullen, pagg. 263-264, Horn/Johnson, pagg. 396-397. Cfr. Gantmacher, pagg. 122-123.

Corollario 11.3. *Sia $g \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio tale che per ogni $k = 1, \ldots, s$ si abbia $t^j e^{t\lambda_k} = g^{(j)}(\lambda_k)$ per ogni $j = 0, \ldots, m_k - 1$.*

Allora $e^{tA} = g(A)$.

Dimostrazione. MANCA

Osservazione 11.4. Dal corollario 11.3 otteniamo una nuova dimostrazione della proposizione 9.22. Se infatti $(A - \lambda\delta)^m = 0$, possiamo assumere che $\mathcal{M}_A = (x-\lambda)^m$. Se poniamo $g = e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!}(x-\lambda)^j$, dal corollario 11.3 segue $e^{tA} = g(A)$, in accordo con la proposizione 9.2. Vediamo adesso come questa semplice osservazione può essere generalizzata nel caso generale tramite la teoria del polinomio di interpolazione di Hermite.

Proposizione 11.5. *Sia $m_k = 1$ per ogni $k = 1, \ldots, s$. In tal caso $m = n$. Se scegliamo $v_{k0} = e^{t\lambda_k}$ nella proposizione 10.7, H coincide necessariamente con il polinomio di interpolazione di Lagrange $\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$ e dal corollario 10.3 otteniamo*

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$$

in accordo con la proposizione 9.10.

Proposizione 11.6 Formula spettrale di Sylvester-Buchheim. *Ω sia un dominio di $\mathbb{C}$ che contiene lo spettro $\sigma(A)$ ed $f : \Omega \Rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora*

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) H_{kj}(A).$$

Dimostrazione. MANCA

Osservazione 11.7. $e^{tA} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k-1} t^j e^{t\lambda_k} H_{kj}(A).$

Nota 11.8. Sia $p \in \mathbb{C}[x] \setminus 0$ con $p(A) = 0$. Allora $p = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_s)^{r_s}(x-\lambda_{s+1})^{r_{s+1}} \cdots (x-\lambda_v)^{r_v}$ con $v \geq s, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_v \in \mathbb{C}$ ed $r_1 \geq m_1, \ldots, r_s \geq m_s$.

Se formiamo i polinomi di interpolazione fondamentali di Hermite $\widetilde{H_{kj}}$ rispetto a questo sistema di valori, allora si ha ancora $e^{tA} = \sum_{k=1}^{v} \sum_{j=1}^{m_k-1} t^j e^{t\lambda_k} \widetilde{H_{kj}}(A)$. In verità quasi sempre ci si può limitare al caso $v = s$ e dalla proposizione 11.6, applicata agli $\widetilde{H_{kj}}$, si vede che $\widetilde{H_{kj}}(A) = 0$ per $k = 1, \ldots, s$ e $j \geq m_k$. Possiamo in particolare applicare questo ragionamento quando $p = \mathcal{P}_A$. Cfr. Forst/Hoffmann, pag.335.

Esempio 11.9. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Allora $\mathcal{P}_A = \mathcal{M}_A = x(x-1)^2$.
$H_{10} = H[0:(1), 1:(0,0)]$, MANCA

Esempio 11.10. Sia $\mathcal{M}_A = x^2(x-1)^3(x-2)$. Calcoliamo e^{tA}.MANCA

Osservazione 11.11. Quando gli autovalori di A non sono noti, possono essere usate formule algebriche di ricorrenza al posto della rappresentazione spettrale, come esposto nel lavoro di Verde Star citato in bibliografia.