## 12. Matrici che soddisfano un equazione cubica

**Situazione 12.1.** Sia $A \in \mathbb{C}_n^n$. $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ ed $m \in \mathbb{N} + 1$. $\Omega$ sia un dominio di $\mathbb{C}$ che contiene la spettro $\sigma(A)$ ed $f : \Omega \Rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. $t \in \mathbb{R}$.

**Proposizione 12.2.** *Sia $\mathcal{M}_A = (x - \lambda)^m$. Allora*

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}(A - \lambda\delta)^j, \\ e^{tA} &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!}(A - \lambda\delta)^j. \end{aligned}$$

Dimostrazione. MANCA

**Proposizione 12.3.** *Sia $\mathcal{M}_A = (x - \lambda)(x - \mu)$ con $\lambda \neq \mu$. Allora*

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}(A - \mu\delta) + \frac{f(\mu)}{\mu - \lambda}(A - \lambda\delta), \\ e^{tA} &= \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}(A - \mu\delta) + \frac{e^{\mu t}}{\mu - \lambda}(A - \lambda\delta). \end{aligned}$$

Dimostrazione. MANCA

**Proposizione 12.4.** *Sia $\mathcal{M}_A = (x - \lambda)^2(x - \mu)$ con $\lambda \neq \mu$. Allora*

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\lambda)\delta + f'(\lambda)(A - \lambda\delta) + \left[\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{(\mu - \lambda)^2} - \frac{f'(\lambda)}{\mu - \lambda}\right](A - \lambda\delta)^2, \\ e^{tA} &= MANCA. \end{aligned}$$

Dimostrazione. MANCA

**Proposizione 12.5.** *Sia $\mathcal{M}_A = (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu)$ con $\lambda, \mu, \nu$ distinti tra loro. Allora*

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\lambda)\frac{(A - \mu\delta)(A - \nu\delta)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + f(\mu)\frac{(A - \lambda\delta)(A - \nu\delta)}{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)} + f(\nu)\frac{(A - \lambda\delta)(A - \mu\delta)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}, \\ e^{tA} &= MANCA. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Queste formule seguono direttamente dalla proposizione 11.5.

**Osservazione 12.6.** In Chen/Yau gli autovalori di matrici $3 \times 3$ e $4 \times 4$ sono calcolati in termini dei coefficienti di $A$; in questo modo si ottengono formule per $e^{tA}$ che in tal caso dipendono dai coefficienti.