25. La distribuzione esponenziale

Definizione 25.1. Diciamo che una variabile casuale X possiede una *distribuzione esponenziale*, se la sua funzione di distribuzione è della forma:

$$p(X \le t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t \ge 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

La densità di una tale distribuzione è data da

$$\bigcirc_t \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t \ge 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

Situazione 25.2. Consideriamo una popolazione di cellule che crescono secondo la legge $n(t) = n(0)e^{-\lambda t}$ con $\lambda > 0$. Sia $m(t)$ il numero delle cellulle che muoiono entro un tempo minore di t.

Allora $n(t) + m(t) = n(0)$. Poniamo $m(t) = 0$ per $n < 0$, e quindi $m(t) = n(0)(1 - e^{-\lambda t})$.

$m/n(0)$ è perciò una distribuzione esponenziale.

Nota 25.3. Sia $v := m'$. Allora

$$m(t) = m(0) + \int_0^t v(s)\, ds$$

per ogni $t \ge 0$. D'altra parte $m(0) = 0$, perché $n(t)+m(t) = n(0)$, quindi

$$m(t) = \int_0^t v(s)\, ds$$

per ogni $t \ge 0$ oppure, più in generale,

$$\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, ds = m(t_2) - m(t_1)$$

per ogni $0 \le t_1 \le t_2$. L'integrale a sinistra è perciò uguale al numero delle cellule che muoiono nell'intervallo di tempo $(t_1, t_2]$. Grazie alla continuità di m, possiamo anche usare l'intervallo chiuso $[t_1, t_2]$.

Possiamo, dunque, considerare $\frac{1}{n(0)} \int_{t_1}^{t_2} v(s)\, ds$ come la probabilità che una cellula muoia nell'intervallo $[t_1, t_2]$, cioè che la durata di vita di una cellula appartenga all'intervallo $[t_1, t_2]$.

Ciò implica che la media μ della distribuzione esponenziale può essere interpretata come la *durata di vita media* delle cellule della nostra popolazione.

Osservazione 25.4. La media

$$\mu = \int_0^\infty te^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

può essere calcolata con l'integrazione per parti oppure, in modo più elegante, riconducendoci alla funzione gamma; in questo modo possiamo, più in generale, calcolare prima i momenti

$$MX^k = \int_0^\infty t^k \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

di una variabile casuale con distribuzione esponenziale e poi calcolare $\mu = MX^k$. Infatti, se si opera una sostituzione ponendo $\lambda t = s$ e si ricorda che $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ e che $\Gamma(n+1) = n!$, si ottiene

$$\begin{aligned} MX^k &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}t^k\lambda\,dt = \int_0^\infty \lambda\left(\frac{s}{\lambda}\right)^k \frac{e^{-s}}{\lambda}\,ds \\ &= \frac{1}{\lambda^k}\int_0^\infty s^k e^{-s}\,ds = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} = \frac{k!}{\lambda^k} \end{aligned}$$

e quindi, in particolare, $\mu = MX = \dfrac{1}{\lambda}$.

Possiamo anche trovare la varianza:

$$\sigma^2 = MX^2 - (MX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Nota 25.5. La distribuzione esponenziale viene usata spesso per modellare il decadimento radioattivo, la caduta di meteoriti, gli incidenti aerei, gli intervalli nell'arrivo di clienti a uno sportello, la lunghezza di conversazioni telefoniche, la durata di vita di meccanismi la cui media di servizio non dipende dall'usura. Infatti la distribuzione esponenziale possiede una proprietà caratteristica, che non è posseduta da nessun'altra distribuzione probabilità : ossia *non ha memoria*. Questo fenomeno è spiegato ad esempio in Dall'Aglio, pagg. 83-84.

Osservazione 25.6. Il tempo di dimezzamento $\frac{\log 2}{\lambda}$ può essere considerato come la *mediana* della distribuzione esponenziale.

Osservazione 25.7. La *mancanza di memoria*, quando riferita alla durata di vita, può essere considerata naturale quando la morte di un individuo dipende da *fattori esterni*. Assumiamo, ad esempio, che una persona passeggi in una strada da alcune ore e che ora sopraggiunga un amico. La probabilità che nei prossimi 10 minuti un vaso cada da un balcone e colpisca la prima persona è uguale alla probabilità che colpisca l'amico appena arrivato.

Nello stesso modo possiamo assumere che *la morte di una cellulla sia causata da segnali presenti nel tessuto che possono raggiungere la cellula indipendentemente dalla sua età* .