Università degli Studi di Ferrara
Corso di laurea triennale in Matematica

La compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto

Ludovica Chiodera

Relatore: Josef Eschgfäller
Esame di laurea: 6 ottobre 2006

INDICE

Introduzione 2

1. Filtri 6

2. Ultrafiltri e compattezza 13

3. Semiquantori 22

4. La compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto 24

5. Punti fissi 31

6. Il monoide $\beta\mathbb{N}$ 34

7. Sistemi dinamici compatti 39

8. Il sistema dinamico universale $(\beta\mathbb{N}, \alpha_1)$ 45

Bibliografia 47

INTRODUZIONE

Nei primi tre capitoli di questa tesi parleremo di filtri e ultrafiltri. Questi strumenti saranno utilizzati per riprendere alcuni concetti di base di topologia generale come la proprietà di Hausdorff, la continuità di un'applicazione e la compattezza; essi permettono spesso dimostrazioni in poche righe dei teoremi fondamentali, in particolare del teorema di Tikhonov.

Il tema centrale della tesi è la compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto che può essere definita come l'insieme degli ultrafiltri su X. Nell'ambito della topologia generale la compattificazione di Stone-Čech svolge un ruolo di compattificazione universale, ma quando l'insieme X è dotato anche di una struttura algebrica, come nel caso importante dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, questa struttura algebrica può essere estesa a βX. La struttura che così si ottiene si rivela ricchissima di proprietà logico–combinatorie che negli ultimi 30 anni hanno portato ad importanti risultati nella ricerca. Persino il recente teorema di Green–Tao sull'esistenza di progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria consistenti solo di primi è affine a questo cerchio di idee e benchè utilizzi metodi dalla teoria probabilistica dei numeri, parte da teoremi di combinatoria infinita che possono essere dimostrati nell'ambito del monoide $\beta\mathbb{N}$.

I teoremi del quinto capitolo legano i punti fissi di un'applicazione $X \longrightarrow X$ ai punti fissi dell'applicazione indotta $\beta X \longrightarrow \beta X$ e sono un buon esempio della bellezza matematica di questa teoria.

Il sesto capitolo introduce la teoria del monoide $\beta\mathbb{N}$ in una nuova notazione che forse è più intuiva di quella che si trova nei testi. Naturalmente ci siamo appoggiati fortemente al trattato di Hindman/Strauss.

Nel settimo capitolo vengono esposti alcuni concetti di base della teoria dei sistemi dinamici compatti, in particolare il legame tra quasiperiodicità e minimalità.

Viene infine dimostrato nell'ultimo capitolo che ogni sistema dinamico compatto universale può essere ottenuto come immagine omomorfa del sistema dinamico universale definito su $\beta\mathbb{N}$.

Filtri e ultrafiltri. In uno spazio metrico (X, d) la topologia può essere descritta mediante la convergenza di successioni. Spazi con questa proprietà si chiamano *sequenziali*; più precisamente uno spazio topologico X si dice sequenziale se un sottoinsieme A di X è chiuso se e solo se il limite di ogni successione convergente $\bigcirc_n a_n$ con $a_n \in A$ per ogni n appartiene ad A. Una condizione leggermente più forte è che la chiusura di ogni sottoinsieme $A \subset X$ può essere descritta mediante la convergenza di successioni:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ esiste una successione } \bigcirc_n a_n \longrightarrow x \text{ con } a_n \in A \text{ per ogni } n\}$$

Uno spazio con questa proprietà si chiama uno *spazio di Fréchet*. Ricordiamo inoltre che uno spazio topologico soddisfa il primo assioma

di numerabilità, se ogni punto possiede una base numerabile per gli intorni. Si dimostrano facilmente le implicazioni

$$\begin{array}{lll} \text{Metrico} & \Longrightarrow & 1^o \text{ assioma di numerabilità} \\ & \Longrightarrow & \text{Fréchet} \Longrightarrow \text{sequenziale} \end{array}$$

Una discussione si trova a pagina 53 del libro di Engelking. Molti spazi importanti non sono però sequenziali. La loro topologia non può quindi essere descritta mediante la convergenza di successioni. Si può rimediare introducendo successioni generalizzate (i cui indici percorrono un insieme quasiordinato diretto qualsiasi invece di $\mathbb{N}$) oppure utilizzando il concetto più algebrico, anche se un po' meno intuitivo, di filtro. Come mostrano i teoremi del primo capitolo, mediante i filtri possiamo descrivere la topologia di uno spazio topologico o la continuità di un'applicazione: Per $A \subset X$ abbiamo infatti

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ esiste un filtro } \dot{a} \text{ su X con } \dot{a} \longrightarrow x \text{ e } A \in \dot{a}\}$$

mentre un'applicazione $f : X \longrightarrow Y$ tra spazi topologici è continua in un punto $x \in X$ se e solo se per ogni filtro $\dot{x} \longrightarrow x$ convergente in X si ha la convergenza $f(\dot{x}) \longrightarrow f(x)$ in Y.

A causa di questo parallelismo tra filtri e successioni, in questa tesi abbiamo usato la notazione $\dot{x}, \ldots, \dot{z}$ per filtri. Ultrafiltri, cioè filtri massimali, possono essere addirittura considerati come punti generalizzati dell'insieme dato; essi saranno denotati con $\ddot{x}, \ldots, \ddot{z}$.

Ogni filtro corrisponde a un semiquantore, cioè a un concetto di *per quasi tutti*. Questa idea può essere sfruttata nell'analisi nonstandard.

La compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto. L'insieme βX degli ultrafiltri su un insieme X può essere dotato di una topologia in cui βX diventa uno spazio di Hausdorff compatto. X può essere considerato in modo naturale un sottoinsieme di βX. X è allora denso in βX e βX si rivela una compattificazione universale di X nel senso della definizione 4.28. Gli elementi di βX possono essere considerati punti generalizzati (*iperpunti*) di X; l'insieme βX contiene una ricchezza quasi inimmaginabile di informazioni su X, più precisamente si può dire che tutte le costruzioni logico–combinatorie che effettuiamo in X si esprimono e unificano in qualche modo attraverso βX.

Punti fissi. Katětov ha formulato nel 1967 un criterio combinatorio per l'esistenza di punti fissi di un'applicazione $f : X \longrightarrow X$. Utilizzando questo risultato si riesce a dimostrare che se l'applicazione $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta X$ possiede un punto fisso, allora la f stessa deve possedere un punto fisso e che $\operatorname{Fix} \beta f = \overline{\operatorname{Fix} f}$ (corollario 5.10).

Il monoide $\beta\mathbb{N}$. La struttura algebrica di semianello di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ può essere estesa a $\beta\mathbb{N}$. Nella tesi ciò viene eseguito per l'addizione. Il monoide non più commutativo $(\beta\mathbb{N}, +)$ contiene moltissimi segreti della combinatoria additiva di $\mathbb{N}$ e quindi di un campo estremamente difficile e importante della teoria dei numeri. A questo aspetto sono

dedicati il trattato di Hindman/Strauss e moltissimi articoli di ricerca spesso sorprendenti degli ultimi 30 anni.

Sistemi dinamici compatti. La dinamica topologica è la teoria astratta della quasiperiodicità. Un teorema centrale caratterizza i punti quasiperiodici di un sistema dinamico compatto X come quei punti la cui chiusura d'orbita è minimale, cioè minimale tra i sottoinsiemi chiusi invarianti e non vuoti di X (teorema 7.22). Da ciò segue in particolare (utilizzando il lemma di Zorn) che X possiede sempre un punto quasiperiodico. La teoria dei sistemi dinamici compatti comprende la teoria della stabilità e degli attrattori di sistemi dinamici classici (esposta ad esempio nei libri di Brin/Stuck e Bhatia/Szegö), la vasta teoria dei sistemi di sostituzione (successioni di Morse generalizzate), molti aspetti della teoria combinatoria dei linguaggi formali e, come si è visto in anni recenti, della teoria additiva dei numeri. Spesso nello studio di sistemi dinamici compatti insieme alla topologia si utilizzano anche gli strumenti più analitici della teoria della misura e della teoria ergodica. I libri di Brin/Stuck e Denker espongono questa combinazione di teorie in modo elementare, introducendo a molti aspetti teorici e applicativi.

Il sistema dinamico universale. Ogni sistema dinamico compatto transitivo X (in particolare ogni sistema minimale) è immagine omomorfa del sistema dinamico universale $\beta\mathbb{N}$. Per l'ipotesi di transitività X coincide con la chiusura d'orbita di un punto x e l'omomorfismo si ottiene come estensione dell'applicazione naturale $\bigcirc_n T^n x : \mathbb{N} \longrightarrow X$. In questo senso tutta la dinamica topologica e' contenuta nella teoria di $\beta\mathbb{N}$.

Teoria di Ramsey. Frank Ramsey (1903–1930) ha dimostrato che per ogni coppia (k, l) di numeri naturali esiste un numero r, e quindi anche un più piccolo numero $r := \mathcal{R}(k, l)$ con la proprietà che per ogni insieme X con almeno r elementi ed ogni partizione con due classi $X \times X = P \sqcup Q$ di $X \times X$ esiste un sottoinsieme $E \subset X$ con $|E| = k$ ed $E \times E \subset P$ oppure un sottoinsieme $F \subset X$ con $|F| = l$ ed $F \times F \subset Q$. I numeri $\mathcal{R}(k, l)$ si chiamano numeri di Ramsey ed è molto difficile calcolarli. Uno dei pochissimi numeri di Ramsey noti è $\mathcal{R}(3, 3) = 6$. Ciò signififca che con sei persone e due tavoli a tre possiamo fare sempre in modo che in uno dei due tavoli si trovino soltanto persone che si conoscono a vicenda oppure persone che non si conoscono. Esistono molte generalizzazioni del teorema di Ramsey nella combinatoria finita; la teoria di Ramsey infinita è nata come combinatoria delle progressioni aritmetiche. Il teorema di van der Waerden asserisce che per ogni partizione finita $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_m$ dei numeri naturali uno degli A_i contiene progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria. Questo teorema è stato dimostrato da van der Waerden in modo puramente combinatorio, e solo molto più tardi si sono trovate dimostrazioni nell'ambito della dinamica topologica e di $\beta\mathbb{N}$. Anche qui alla teoria topologica si affianca la teoria ergodica; cfr. la monografia di Furstenberg e gli ultimi capitoli del libro di Hindman/Strauss. Una breve introduzione si trova nell'articolo di Blass.

Analisi non standard. Non abbiamo trattato questo importante aspetto della teoria degli ultrafiltri che dimostra ancora la potenza di questo concetto. I sia un insieme infinito ed $\ddot{u}$ un ultrafiltro libero su I. Sull'insieme I^X di tutte la applicazioni $I \longrightarrow X$ introduciamo una relazione di equivalenza con $\alpha \sim \beta \iff \{i \in I \mid \alpha_i = \beta_i\} \in \ddot{u}$, cioè, nella notazione del terzo capitolo, $\alpha \sim \beta \iff \alpha_i = \beta_i \ \forall (i, \ddot{u})$. X può essere considerato come sottoinsieme di $\mathcal{H}(X) := I^X / \sim$. Se X è uno spazio topologico, una classe $[\alpha] \in \mathcal{H}(X)$ si dice infinitamente vicina ad un punto $x \in X$, se per ogni intorno $U \in \mathcal{U}(x)$ vale $\alpha_i \in U \ \forall (i, \ddot{u})$. Per $X = \mathbb{R}$ in questo modo si possono definire numeri generalizzati infinitamente piccoli. Si arriva così all'analisi nonstandard, creata negli anni '50 da Abraham Robinson, Curt Schmieden e Detlef Laugwitz.

1. FILTRI

Situazione 1.1. Siano X, Y, Z insiemi.

Uno spazio topologico verrà talvolta scritto nella forma $(X, \mathcal{U})$, dove per ogni $x \in X$ con $\mathcal{U}(x)$ denotiamo l'insieme degli intorni di x.

Definizione 1.2. Un *intreccio* su X è un insieme $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ con le seguenti proprietà:

(1) $\alpha \neq \emptyset$.

(2) Per ogni $m \geq 1$ ed ogni $A_1, ..., A_m \in \alpha$ vale $A_1 \cap ... \cap A_m \neq \emptyset$.

Si dice anche che α possiede la *proprietà dell'intersezione finita*. Dalla (2) segue in particolare che $A \neq \emptyset$ per ogni $A \in \alpha$.

Definizione 1.3. Un *filtro* su X è un insieme $\dot{x} \subset \mathcal{P}(X)$ con le seguenti proprietà:

(1) $\dot{x} \neq \emptyset$.

(2) $\emptyset \notin \dot{x}$.

(3) $F \in \dot{x}$ ed $F \subset A \subset X \implies A \in \dot{x}$.

(4) $F, G \in \dot{x} \implies F \cap G \in \dot{x}$.

È chiaro che un filtro è un intreccio.

Nota 1.4. (1) In topologia l'esempio più importante di filtro e il punto di partenza per la teoria della convergenza è il filtro $\mathcal{U}(x)$ degli intorni di un punto x in uno spazio topologico.

(2) $\{X\}$ è un filtro. È il filtro meno interessante.

(3) Si osservi che dalla definizione 1.3 segue che $X \in \dot{x}$ per ogni filtro $\dot{x}$ su X. Infatti per ipotesi $\dot{x} \neq \emptyset$, quindi esiste $F \in \dot{x}$, ma $F \subset X$, per cui $X \in \dot{x}$.

Definizione 1.5. α sia un intreccio su X. Definiamo

$$\text{filtro}(\alpha) := \{F \subset X \mid \exists\, m \geq 1 \text{ ed } A_1, ..., A_m \in \alpha \text{ con } A_1 \cap ... \cap A_m \subset F\}.$$

Si dimostra facilmente che $\text{filtro}(\alpha)$ è veramente un filtro. Quindi per ogni intreccio esiste un filtro che lo contiene (e viceversa ogni sottoinsieme non vuoto di un filtro è un intreccio).

È anche chiaro che $\text{filtro}(\alpha)$ è il più piccolo filtro che contiene α.

Nota 1.6. Per ogni sottoinsieme non vuoto $A \subset X$, l'insieme $\{A\}$ è un intreccio. Possiamo quindi definire il filtro

$$A^+ := \text{filtro}(\{\text{A}\}) = \{F \subset X \mid A \subset F\}$$

che consiste di tutti i sottoinsiemi di X che contengono A. Per $x \in X$ usiamo l'abbreviazione $x^+ := \{x\}^+ = \{F \subset X \mid x \in F\}$.

Definizione 1.7. X sia uno spazio topologico e $\dot{x}$ un filtro su X. Sia $x \in X$. Diciamo che $\dot{x}$ *converge ad* x e scriviamo $\dot{x} \longrightarrow x$, se $\mathcal{U}(x) \subset \dot{x}$. Diciamo che $\dot{x}$ *converge*, se esiste un $x \in X$ con $\dot{x} \longrightarrow x$.

Definizione 1.8. Due filtri $\dot{x}$ e $\dot{y}$ si dicono *intrecciati*, se $\dot{x} \cup \dot{y}$ è un intreccio. Si dimostra facilmente che ciò accade se e solo se $F \cap G \neq \emptyset$ per ogni $F \in \dot{x}$, $G \in \dot{y}$.

Teorema 1.9. *Per uno spazio topologico X le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) X è di Hausdorff.

(2) Se $\dot{x}$ è un filtro su X e $\dot{x} \longrightarrow x, \dot{x} \longrightarrow y$, allora $x = y$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) $\implies$ (2): Supponiamo $\dot{x} \longrightarrow x$ e $\dot{x} \longrightarrow y$ con $x \neq y$. Siccome X è di Hausdorff, esistono $U \in \mathcal{U}(x)$ e $V \in \mathcal{U}(y)$ tali che $U \cap V = \emptyset$. D'altra parte $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y) \subset \dot{x}$, per cui $U, V \in \dot{x}$, una contraddizione.

(2) $\implies$ (1) Assumiamo che X non sia di Hausdorff. Allora esistono $x, y \in X$ con $x \neq y$ tali che per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ ed ogni $V \in \mathcal{U}(y)$ si abbia $U \cap V \neq \emptyset$. Come abbiamo osservato nella definizione 1.8 ciò implica che $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y)$ è un intreccio e quindi esiste un filtro $\dot{x}$, con $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y) \subset \dot{x}$. Ma allora $\dot{x} \longrightarrow x$ e $\dot{x} \longrightarrow y$, quindi per ipotesi $x = y$, una contraddizione.

Nota 1.10. Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Allora:

(1) $\mathcal{U}(x) \longrightarrow x$ (ovvio).

(2) $x^+ \longrightarrow x$.
Infatti $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$, per cui $\mathcal{U}(x) \subset x^+$.

Definizione 1.11. $f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione e $\dot{x}$ un filtro su X. Definiamo

$$f(\dot{x}) := \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \dot{x}\}$$

$f(\dot{x})$ si chiama *l'immagine* di $\dot{x}$ sotto f.

Osservazione 1.12. *$f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione e $\dot{x}$ un filtro su X. Allora*

$$f(\dot{x}) = \{G \subset Y \mid \textit{ esiste } F \in \dot{x} \textit{ con } f(F) \subset G\}$$

In particolare vediamo che $f(F) \in f(\dot{x})$ per ogni $F \in \dot{x}$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $F \in \dot{x}$. Allora $F \subset f^{-1}(f(F))$, per cui $f^{-1}(f(F)) \in \dot{x}$, cosicchè $f(F) \in f(\dot{x})$.

Proposizione 1.13. *$f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione e $\dot{x}$ un filtro su X. Allora $f(\dot{x})$ è un filtro su Y.*

<u>Dimostrazione.</u> (1) È chiaro che $Y \in f(\dot{x})$, per cui $f(\dot{x}) \neq \emptyset$.

(2) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \dot{x}$, per cui $\emptyset \notin f(\dot{x})$.

(3) Siano $G \in f(\dot{x})$ e $G \subset B \subset Y$. Allora $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(G) \in \dot{x}$ per cui $f^{-1}(B) \in \dot{x}$; ciò significa che $B \in f(\dot{x})$.

(4) Siano $G, H \in f(\dot{x})$ cioè $f^{-1}(G)$ e $f^{-1}(H) \in \dot{x}$. Allora $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \in \dot{x}$, per cui $G \cap H \in f(\dot{x})$.

Osservazione 1.14. *Siano X e Y spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Sia $x \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) f è continua in x.

(2) Per ogni $V \in \mathcal{U}(f(x))$ si ha $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$.

(3) $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$.

Dimostrazione. Ciò segue direttamente dalle definizioni.

Teorema 1.15. *X e Y siano spazi topologici ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Sia $x \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) f è continua in x.

(2) Per ogni filtro $\dot{x}$ su X con $\dot{x} \longrightarrow x$ in X vale $f(\dot{x}) \longrightarrow f(x)$ in Y.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Sia $\dot{x} \longrightarrow x$, cioè $\mathcal{U}(x) \subset \dot{x}$. Da ciò segue che $f(\mathcal{U}(x)) \subset f(\dot{x})$ e per l'osservazione 1.14 $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\dot{x})$, cioè $f(\dot{x}) \longrightarrow f(x)$.
(2) $\implies$ (1) : Considero il filtro $\mathcal{U}(x) \longrightarrow x$. Per ipotesi $f(\mathcal{U}(x)) \longrightarrow f(x)$ ovvero $\mathcal{U}(f(x)) \in f(\mathcal{U}(x))$, la funzione è quindi continua per l'osservazione 1.14.

Nota 1.16. Siano date due applicazioni $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ ed un filtro $\dot{x}$ su X. Allora $(g \circ f)(\dot{x}) = g(f(\dot{x}))$.

Dimostrazione. Sia $H \subset Z$. Allora $H \in (g \circ f)(\dot{x}) \iff (g \circ f)^{-1}(H) \in \dot{x} \iff g^{-1}(H) \in f(\dot{x}) \iff H \in g(f(\dot{x}))$.

Corollario 1.17. *$f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione e $\dot{x}$ un filtro su X.*

(1) Se f è suriettiva allora $f(\dot{x}) = \{f(F) \mid F \in \dot{x}\}$.

(2) Se f è biiettiva con $g := f^{-1}$, allora $g(f(\dot{x})) = \dot{x}$.

Dimostrazione. (1) Dall'osservazione 1.12 supponiamo che $f(F) \in f(\dot{x})$ per ogni $F \in \dot{x}$.

Sia $G \in f(\dot{x})$. Allora $F := f^{-1}(G) \in \dot{x}$, e per la suriettività di f si ha $G = f(f^{-1}(G)) = f(F)$.

(2) Segue dalla nota 1.16

Lemma 1.18. *$\dot{x}$ sia un filtro su X ed $A \subset X$. Allora sono equivalenti:*

(1) $\dot{x} \cup \{A\}$ è un intreccio e quindi esiste un filtro $\dot{y}$ su X con $\dot{x} \subset \dot{y}$ ed $A \in \dot{y}$.

(2) $F \cap A \neq \emptyset$ per ogni $F \in \dot{x}$.

(3) $X \setminus A \notin \dot{x}$.

Dimostrazione. (1) $\iff$ (2): Chiaro.
(2) $\implies$ (3): Siccome $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$, l'ipotesi implica $X \setminus A \notin \dot{x}$.
(3) $\implies$ (2): Sia $F \in \dot{x}$ con $F \cap A = \emptyset$. Allora $F \subset X \setminus A$ e quindi $X \setminus A \in \dot{x}$, una contraddizione.

Proposizione 1.19. *Sia X uno spazio topologico ed $A \subset X$. Allora sono equivalenti:*

(1) *A è aperto.*

(2) *Per ogni $x \in A$ e per ogni filtro $\dot{x}$ su X con $\dot{x} \longrightarrow x$ vale $A \in \dot{x}$.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Siano $x \in A$ e $\dot{x} \longrightarrow x$. Siccome A è aperto, abbiamo $A \in \mathcal{U}(x)$. Ma per ipotesi $\mathcal{U}(x) \subset \dot{x}$, per cui $A \in \dot{x}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Sia $x \in A$. $\mathcal{U}(x)$ è un filtro tale che $\mathcal{U}(x) \longrightarrow x$, e per ipotesi $A \in \mathcal{U}(x)$. Ciò mostra che A è intorno di ogni suo punto e quindi A è un aperto.

Proposizione 1.20. *X sia uno spazio topologico $A \subset X$ ed $x \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) *$x \in \overline{A}$.*

(2) *Esiste un filtro $\dot{x}$ su X con $\dot{x} \longrightarrow x$ e $A \in \dot{x}$.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Voglio dimostrare che $\mathcal{U}(x) \cup A$ è un intreccio. Poichè $x \in \overline{A}$, per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ vale $A \cap U \neq \emptyset$. Quindi $\mathcal{U}(x) \cup A$ è un intreccio e $\dot{x} = \widehat{\mathcal{U}(x) \cup A}$ è il filtro che stavamo cercando.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Supponiamo che $x \notin \overline{A}$. Allora esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \cap A = \emptyset$. Assurdo perchè $U, A \in \dot{x}$.

Definizione 1.21. Un'applicazione tra spazi topologici $f : X \longrightarrow Y$ si dice *aperta*, se $f(U)$ è aperto in Y per ogni aperto U di X.

Osservazione 1.22. *Per un'applicazione $f : X \longrightarrow Y$ tra spazi topologici sono equivalenti:*

(1) *f è aperta.*

(2) *Per ogni $x \in X$ e per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ si ha $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$.*

(3) *$f(\mathcal{U}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Siano $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}(x)$. Allora esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$ e quindi $f(x) \in f(A) \subset f(U)$. Per ipotesi $f(A)$ è aperto, per cui $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Sia $V \in f(\mathcal{U}(x))$ cioè $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. Per ipotesi $f(f^{-1}(V)) \in \mathcal{U}(f(x))$, e siccome $f(f^{-1}(V)) \subset V$, abbiamo $V \in \mathcal{U}(f(x))$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Sia U un aperto di X. Dobbiamo dimostrare che $f(U)$ è un aperto di Y. Sia $y \in f(U)$. Allora esiste $x \in U$ con $f(x) = y$. Siccome U è aperto, abbiamo $U \in \mathcal{U}(x)$ e l'ipotesi implica $f(U) \in \mathcal{U}(y)$. $f(U)$ è perciò un intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Osservazione 1.23. *Per un'applicazione $f : X \longrightarrow Y$ tra spazi topologici sono equivalenti:*

(1) *f è continua ed aperta.*

(2) *$f(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}(f(x))$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): f è continua e quindi $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$. Ma f è anche aperta e quindi $f(\mathcal{U}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Chiaro.

Definizione 1.24. $\bigcirc_{t\in T}(X_t,\mathcal{U}_t)$ sia una famiglia di spazi topologici; l'insieme degli indici T può essere infinito.

$X := \prod_{t\in T} X_t$ sia il prodotto cartesiano degli insiemi X_t, e per ogni $t \in T$ sia $P_t : X \longrightarrow X_t$ la proiezione canonica.

Per $x \in X$ scriviamo $x_t := P_t(x)$, cosicché viceversa $x = \bigcirc_{t\in T} x_t$.

Per $x_t \in X_t$ sia $\mathcal{U}_t(x_t)$ il filtro degli intorni di x_t in X_t.

Per $x \in X$ allora

$$\alpha(x) := \{P_t^{-1}(U_t) \mid t \in T \text{ ed } U_t \in \mathcal{U}_t(x_t)\}$$

è un intreccio; infatti $P_t(x) = x_t \in U_t$ e quindi $x \in P_t^{-1}(U_t)$ per ogni $t \in T$ ed ogni $U_t \in \mathcal{U}_t(x_t)$, per cui $x \in W$ per ogni $W \in \alpha(x)$, mentre è chiaro che $\alpha(x) \neq \emptyset$.

Possiamo quindi definire $\mathcal{U}(x) := \mathrm{filtro}(\alpha(\mathrm{x}))$. Si verifica facilmente che in questo modo si ottiene una topologia su X.

Lo spazio $(X,\mathcal{U}) =: \prod_{t\in T}(X_t,\mathcal{U}_t) =: \prod_{t\in T} X_t$ si chiama il *prodotto diretto* degli spazi topologici X_t.

Nota 1.25. Nella situazione della definizione 1.24 siano $t \in T$ ed $A_t \subset X_t$. Allora $P_t^{-1}(A_t) = \{x \in X \mid x_t \in A_t\}$, a parte l'ordine dei fattori, può essere considerato insiemisticamente come un prodotto cartesiano $A_t \times \prod_{s\neq t} X_s$. Da ciò (o dalla suriettività di P_t) segue anche che $P_t P^{-1}(A_t) = A_t$.

Siccome inoltre per $U_t^1, .., U_t^k \in \mathcal{U}_t(x_t)$ abbiamo

$$P_t^{-1}(U_t^1) \cap ... \cap P_t^{-1}(U_t^k) = P_t^{-1}(U_t^1 \cap ... \cap U_t^k)$$

con $U_t^1 \cap ... \cap U_t^k =: U_t \in \mathcal{U}_t(x_t)$, vediamo che gli elementi di $\mathcal{U}(x)$ sono esattamente i sottoinsiemi W di X per cui esistono $t_1, ..., t_m \in T$ tutti distinti ed $U_{t_1} \in \mathcal{U}_{t_1}(x_{t_1}), ..., U_{t_m} \in \mathcal{U}_{t_k}(x_{t_k})$ tali che

$$V := P_{t_1}^{-1}(U_{t_1}) \cap ... \cap P_{t_m}^{-1}(U_{t_m}) \subset W.$$

A parte l'ordine dei fattori V può essere considerato come un prodotto cartesiano del tipo $U_{t_1}\times, ..., \times U_{t_m} \times \prod_{s\in T'} X_s$ con $T' := T \setminus \{t_1, ..., t_m\}$.

Per ogni j abbiamo perciò $P_{t_j}(V) = U_{t_j}$, inoltre $P_s(V) = X_s$ per ogni $s \in T'$. Ciò implica $P_t(V) \in \mathcal{U}_t(x_t)$ per ogni $t \in T$.

Proposizione 1.26. *Nella situazione della definizione 1.24 ogni proiezione $P_t : X \longrightarrow X_t$ è continua e aperta.*

<u>Dimostrazione.</u> (1) Continuità di P_t: Sia $U_t \in \mathcal{U}_t(x_t)$. Per costruzione allora $P_t^{-1}(U_t) \in \mathcal{U}(x)$.

(2)P_t è aperta: sia $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}(x)$. $P_t(U) = U_t \in \mathcal{U}_t(x_t) \subset \mathcal{U}(x_t)$. Quindi per l'osservazione 1.22 P_t è aperta.

Corollario 1.27. *Nella situazione della definizione 1.24 vale* $P_t(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}_t(x_t)$

Teorema 1.28. *Nella situazione della definizione 1.24 siano $\dot{x}$ un filtro su X ed $x \in X$. Per $t \in T$ sia $\dot{x}_t := P_t(\dot{x})$. allora sono equivalenti:*

(1) $\dot{x} \longrightarrow x$.

(2) $\dot{x}_t \longrightarrow x_t$ *per ogni* $t \in T$.

<u>Dimostrazione.</u> $(1) \implies (2)$: Proposizione 1.26 e teorema 1.15.

$(2) \implies (1)$: Sia $U \in \mathcal{U}(x)$. Dobbiamo dimostrare che $U \in \dot{x}$.

Possiamo assumere che U sia della forma $U = P_{t_1}^{-1}(U_{t_1}) \cap ... \cap P_{t_m}^{-1}(U_{t_m})$.

Per ipotesi $U_{t_i} \in \dot{x}_{t_i} = P_{t_i}(\dot{x})$ cioè $P_{t_i}^{-1}(U_{t_i}) \in \dot{x}$ per ogni i, quindi $U \in \dot{x}$.

Teorema 1.29. *Nella situazione della definizione 1.24 sia data un'applicazione $f : Z \longrightarrow X$, dove Z è un altro spazio topologico. Allora sono equivalenti:*

(1) f è continua.

(2) $P_t \circ f : Z \longrightarrow X_t$ è continua per ogni $t \in T$

<u>Dimostrazione.</u> $(1) \implies (2)$: Per la proposizione 1.26 P_t è continua, quindi lo è anche la composizione $P_t \circ f$.

$(2) \implies (1)$: Sia $z \in Z$ e $\dot{y}$ un filtro su Z con $\dot{y} \longrightarrow z$. Poichè $P_t \circ f$ è continua ho che $P_t(f(\dot{x})) \longrightarrow P_t(f(z))$ per ogni t ovvero $(f(\dot{y}))_t \longrightarrow (f(z))_t$ ciò significa che $f(\dot{y}) \longrightarrow f(z)$. Per il teorema 1.28 f è continua.

Proposizione 1.30. *Nella situazione della definizione 1.24 ciascuno degli spazi X_t sia di Hausdorff. Allora anche X è di Hausdorff.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $x, y \in X$ e sia $\dot{x}$ un filtro definito su X tale che $\dot{x} \longrightarrow x$ e $\dot{x} \longrightarrow y$, ovvero $\dot{x}_t \longrightarrow x_t$ e $\dot{x}_t \longrightarrow y_t$ per ogni t. Poichè X_t è di Hausdorff si ha che $x_t = y_t$ per ogni t e quindi $x = y$.

Nota 1.31. Siano X uno spazio topologico e T un insieme. L'insieme X^T di tutte le applicazioni $T \longrightarrow X$ può essere considerato in modo naturale come prodotto cartesiano $\prod_{t \in T} X_t$ con $X_t = X$ per ogni $t \in T$. Possiamo quindi introdurre su X^T la topologia del prodotto.

Lemma 1.32. (X, d) *sia uno spazio metrico. Allora*

$$|d(u, v) - d(x, y)| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

per ogni $u, v, x, y \in X$.

<u>Dimostrazione.</u> Siano $u, v, x, y \in X$. Si ha che:

$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v)$ e

$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$.

Possiamo quindi dedurre che $|d(u, v) - d(x, y)| \leq d(x, u) + d(y, v)$.

Proposizione 1.33. *(X, d) sia uno spazio metrico. Allora $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $(x, y) \in X \times X$ ed $\varepsilon \geq 0$. Sia $W := \{a \in \mathbb{R} \mid |d(x, y) - a| < \varepsilon\}$. Dimostriamo che $d^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x, y)$.

$d^{-1}(W) = \{(u, v) \in x \times X \mid |d(u, v) - d(x, y)| < \varepsilon\}$.

E' sufficiente trovare un $\delta > 0$ tale che $d(u, x) < \delta$ e $d(v, y) < \delta$ implica $|d(u, v) - d(x, y)| < \varepsilon$.

Dal lemma 1.32 sappiamo che

$|d(u, v) - d(x, y)| \leq d(x, u) + d(y, v) < 2\delta$

per cui è sufficiente porre $\delta = \varepsilon/2$.

2. ULTRAFILTRI E COMPATTEZZA

Situazione 2.1. $X, Y, ...$ insiemi.

Definizione 2.2. Un *ricoprimento* di X è un insieme non vuoto $\rho \subset \mathcal{P}(X)$ tale che $\bigcup_{U \in \rho} U = X$. ρ si dice finito se è finito come insieme.

Un *sottoricoprimento* di ρ è un sottoinsieme ρ' di ρ che è ancora un ricoprimento di X. Se X è uno spazio topologico, ρ si dice *aperto*, se ogni $U \in \rho$ è aperto.

Definizione 2.3. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento finito.

Proposizione 2.4. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni intreccio di insiemi chiusi di X ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione. (1) X sia compatto e α un intreccio di chiusi di X tali che $\bigcap_{A \in \alpha} A = \emptyset$.

Allora $\bigcup_{A \in \alpha} (X \setminus A) = X$, quindi $\{X \setminus A \mid A \in \alpha\}$ è un ricoprimento aperto di X. Per la compattezza di X esistono $A_1, ..., A_m \in \alpha$ tali che $(X \setminus A_1) \cup ... \cup (X \setminus A_n) = X$, per cui $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset$, in contraddizione all'ipotesi che α sia un intreccio.

(2) Viceversa sia vera la condizione sugli intrecci. ρ sia un ricoprimento aperto di X che non ammette un sottoricoprimento finito. Ciò significa che $U_1 \cup ... \cup U_n \neq X$ per ogni $U_1, ..., U_n \in \rho$, e quindi ogni volta $(X \setminus U_1) \cap ... \cap (X \setminus U_n) \neq \emptyset$ per cui $\alpha := \{X \setminus U \mid U \in \rho\}$ è un intreccio di chiusi di X.

Per ipotesi $\bigcap_{U \in \rho} (X \setminus U) \neq \emptyset$, quindi $\bigcup_{U \in \rho} U \neq X$, una contraddizione perché ρ era un ricoprimento di X.

Definizione 2.5. Chiameremo *ultrafiltro* su X un filtro su X che non è contenuto in nessun altro filtro.

Proposizione 2.6. *$\ddot{x}$ sia un filtro su X. Sono equivalenti:*

(1) $\ddot{x}$ è un ultrafiltro.

(2) Per ogni $A \subset X$ vale $A \in \ddot{x}$ oppure $X \setminus A \in \ddot{x}$.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Se $X \setminus A \notin \ddot{x}$, per il lemma 1.18 esiste un filtro $\dot{x}$ con $A \in \dot{x}$ e $\ddot{x} \subset \dot{x}$. L'ipotesi implica $\dot{x} = \ddot{x}$, per cui $A \in \ddot{x}$.

(1) $\implies$ (2): $\ddot{x}$ non sia un ultrafiltro. Allora esiste un filtro $\dot{x}$ con $\ddot{x} \subsetneq \dot{x}$. Quindi esiste $A \in \dot{x}$ con $A \notin \ddot{x}$. Per ipotesi però $X \setminus A \in \ddot{x}$. Ma allora A ed $X \setminus A$ appartengono entrambi a $\dot{x}$, per cui $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \dot{x}$, una contraddizione.

Lemma 2.7. *$\ddot{x}$ sia un ultrafiltro ed $A_1 \cup ... \cup A_m \in \ddot{x}$. Allora almeno uno degli A_i appartiene a $\ddot{x}$.*

Dimostrazione. Altrimenti per la prop. 2.6 si avrebbe $X \setminus A_i \in \ddot{x}$ per ogni i e quindi $X \setminus (A_1 \cup ... \cup A_m) = (X \setminus A_1) \cap ... \cap (X \setminus A_m) \in \ddot{x}$. Ciò non è possibile.

Osservazione 2.8. *Sia $\ddot{x} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che siano soddisfatte la seguenti condizioni:*

(i) $X \in \ddot{x}$.

(ii) $F, G \in \ddot{x} \implies F \cap G \neq \emptyset$.

(iii) $A \cup B \in \ddot{x} \implies A \in \ddot{x}$ *o* $B \in \ddot{x}$.

Allora $\ddot{x}$ è un ultrafiltro. Per il lemma 2.7 viceversa ogni ultrafiltro possiede queste proprietà.

Dimostrazione. (1) L'ipotesi (ii) implica che $\emptyset \notin \ddot{x}$.

(2) Siano $F \in \ddot{x}$ e $F \subset A \subset X$. Se $A \notin \ddot{x}$, dalle ipotesi (iii) e (i) segue che $X \setminus A \in \ddot{x}$. Allora avremmo $(X \setminus A) \cap F \subset (X \setminus A) \cap A = \emptyset$, in contraddizione all'ipotesi (ii).

(3) Siano $F, G \in \ddot{x}$. Vogliamo dimostrare che $F \cap G \in \ddot{x}$. Assumiamo che non sia così. Allora l'ipotesi (iii) implica in primo luogo che $X \setminus (F \cap G) \in \ddot{x}$, cioè $(X \setminus F) \cup (X \setminus G) \in \ddot{x}$ e, applicata una seconda volta, che ad esempio $X \setminus F \in \ddot{x}$. Ciò è impossibile perchè $F \in \ddot{x}$.

In questo modo abbiamo ottenuto che $\ddot{x}$ è un filtro.

(4) Le ipotesi (iii) e (i) implicano la condizione (2) della proposizione 2.6. Perciò $\ddot{x}$ è un ultrafiltro.

Nota 2.9. Sia $\ddot{x} \subset \mathcal{P}(X)$. Fissato $\ddot{x}$, chiamiamo un sottoinsieme di X *grande*, se appartiene a $\ddot{x}$.

Dall'osservazione 2.8 segue che gli ultrafiltri sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

(1) X è grande.

(2) L'intersezione di due insiemi grandi è non vuota.

(3) Se l'unione di due insiemi è grande, allora uno dei due deve essere grande.

In tal caso $\ddot{x}$ soddisfa anche i rimanenti assiomi per filtri:

(4) L'intersezione di due insiemi grandi è grande.

(5) Un insieme che contiene un insieme grande è grande anch'esso.

Nota 2.10. Sia A un sottoinsieme non vuoto di X. Dal lemma 2.7 segue facilmente che A^+ è un ultrafiltro se e solo se $|A| = 1$.

Per ogni $x \in X$ abbiamo quindi un ultrafiltro x^+; un ultrafiltro di questa forma si dice *principale*, ogni altro ultrafiltro si dice *libero*.

Si può facilmente dimostrare che quando X è finito, ogni ultrafiltro su X è principale.

Proposizione 2.11. *Ogni filtro è contenuto in un ultrafiltro. Perciò anche ogni intreccio è contenuto in un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Si vede facilmente che l'unione di una catena di filtri è ancora un filtro. L'enunciato segue dal lemma di Zorn.

Osservazione 2.12. *$\ddot{x}$ sia un ultrafiltro libero su X. Allora $\bigcap_{F \in \ddot{x}} F = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $A := \bigcap_{F \in \ddot{x}} F \neq \emptyset$. Allora A^+ è un filtro, ed inoltre $\ddot{x} \subset A^+$, poichè $A \subset F$ per ogni $F \in \ddot{x}$. Siccome $\ddot{x}$ è un ultrafiltro, ciò implica che $A^+ = \ddot{x}$. Per la nota 2.10 allora $\mid A \mid = 1$ e quindi $\ddot{x}$ è della forma $\ddot{x} = x^+$ per qualche $x \in X$, in contraddizione all'ipotesi che $\ddot{x}$ sia libero.

Osservazione 2.13. *X sia un insieme infinito. Allora esiste un ultrafiltro libero su X.*

Dimostrazione. Sia $\alpha := \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ è finito}\}$. E' immediato che α è un intreccio e per la proposizione 2.11 esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\alpha \subset \ddot{x}$. E' chiaro che $\bigcap_{A \in \alpha} A = \emptyset$. $\ddot{x}$ perciò non può essere principale.

Nota 2.14. Sia $\alpha := \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Allora α è un intreccio su $\mathbb{R}$ e siccome $\bigcap_{A \in \alpha} A = \emptyset$, ogni ultrafiltro su $\mathbb{R}$ che contiene α è libero. Il filtro $\mathrm{filtro}(\alpha)$ si chiama *filtro di Fréchet*.

Proposizione 2.15. *Ogni filtro è uguale all'intersezione di tutti gli ultrafiltri che lo contengono.*

Dimostrazione. $\dot{x}$ sia un filtro su X e Λ l'insieme degli ultrafiltri che contengono $\dot{x}$. Per la proposizione 2.11 $\Lambda \neq \emptyset$ ed è chiaro che $\dot{x} \subset \bigcap_{\ddot{x} \in \Lambda} \ddot{x}$. Sia viceversa $A \in \bigcap_{\ddot{x} \in \Lambda} \ddot{x}$ ma $A \notin \dot{x}$. Per il lemma 1.18 allora esiste un filtro $\dot{y}$ con $X \setminus A \in \dot{y}$ e $\dot{x} \subset \dot{y}$. A sua volta $\dot{y}$ è contenuto in un ultrafiltro $\ddot{x}$ ed è chiaro che $\ddot{x} \in \Lambda$. Abbiamo quindi $X \setminus A \in \ddot{x}$. Ma per ipotesi $A \in \ddot{x}$, una contraddizione.

Corollario 2.16. *X sia uno spazio topologico, $A \in X$ e $x \in \overline{A}$. Allora esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\ddot{x} \longrightarrow x$ ed $A \in \ddot{x}$.*

Dimostrazione. Segue dalle proposizioni 1.20 e 2.11.

Corollario 2.17. *X ed Y siano spazi topologici ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Sia $x \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) f è continua in x.

(2) Per ogni ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\ddot{x} \longrightarrow x$ vale $f(\ddot{x}) \longrightarrow f(x)$ in Y.

Dimostrazione. Usiamo il teorema 1.15. $(1) \implies (2)$: Chiaro.

$(2) \implies (1)$ $\dot{x}$ sia un filtro su X con $\dot{x} \longrightarrow x$. Supponiamo che $f(\dot{x})$ non converga ad $f(x)$. Allora esiste $V \in \mathcal{U}(f(x))$ tale che $V \notin f(\dot{x})$, cioè tale che $f^{-1}(V) \notin \dot{x}$. Per la proposizione 2.11 esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X che contiene $\dot{x}$ e tale che $f^{-1}(V) \notin \ddot{x}$, per cui $V \notin f(\ddot{x})$. Allora anche $\ddot{x} \longrightarrow x$, e per ipotesi $f(\ddot{x}) \longrightarrow f(x)$, cosicchè $V \in f(\ddot{x})$, una contraddizione.

Lemma 2.18. *X sia uno spazio topologico e K un sottoinsieme di X. β sia un intreccio di chiusi di K. Allora esiste un intreccio α di chiusi di X tale che*
$\beta = \{A \bigcap K \mid A \in \alpha\}$.

Dimostrazione. Ogni $B \in \beta$ è della forma $B = A \cap K$ con A chiuso in X. Quindi possiamo porre $\alpha := \{A \subset X \mid A$ è chiuso in X e $A \cap K \in \beta\}$. E' chiaro che allora α è un intreccio di chiusi di X e che
$\beta = \{A \cap K \mid A \in \alpha\}$.

Definizione 2.19. X sia uno spazio topologico ed $A \subset X$. Poniamo

$$\mathcal{U}(A) := \{U \subset X \mid \text{ esiste un aperto } V \text{ con } A \subset V \subset U\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{U}(A)$ si chiamano *intorni* di A.

Teorema 2.20. *X sia uno spazio topologico e $K \subset X$. Allora sono equivalenti:*

(1) K è compatto.

(2) Ogni ultrafiltro su X che contiene $\mathcal{U}(K)$ converge ad un punto di K.

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): X sia compatto e $\ddot{x}$ un ultrafiltro su X con $\mathcal{U}(K) \subset \ddot{x}$. Supponiamo che $\ddot{x}$ non converga ad un punto di K. Allora per ogni $x \in K$ esiste un aperto $U_x \in \mathcal{U}(x)$ con $U_x \notin \ddot{x}$. La famiglia $\rho := \{U_x \cap K \mid x \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K che per la compattezza di K ammette un sottoricoprimento finito, esistono cioè $x_1, ..., x_n \in K$ tali che $\bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap K) = K \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = K$. Allora $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \in \mathcal{U}(K)$ e per ipotesi $U \in \ddot{x}$. Dal lemma 2.7 segue che uno degli U_{x_j} appartiene a $\ddot{x}$, una contraddizione.

(2) $\Longrightarrow$ (1): K non sia compatto. Secondo la proposizione 2.4 esiste un intreccio β di chiusi di K tale che $\bigcap_{B \in \beta} B = \emptyset$. Per il lemma 2.18 esiste un intreccio α di chiusi di X tale che $\beta = \{A \cap K \mid A \in \alpha\}$. Siano $A_1, ..., A_n \in \alpha$ ed $U_1, ..., U_r \in \mathcal{U}(K)$. Siccome β è un intreccio su K ed $A_i \cap K \in \beta$ per ogni i, si ha $A_1 \cap ... \cap A_n \cap K \neq \emptyset$ e quindi anche $A_1 \cap ... \cap A_n \cap U_1 \cap ... \cap U_r \neq \emptyset$, perchè $U_j \supset K$ per ogni j. Ciò mostra che $\alpha \cup \mathcal{U}(K)$ è un intreccio. Per la proposizione 2.11 esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\alpha \cup \mathcal{U}(K) \subset \ddot{x}$. Per ipotesi esiste $x \in K$ con $\ddot{x} \longrightarrow x$. D'altra parte $K \cap \bigcap_{A \in \alpha} A = \bigcap_{A \in \alpha} (A \cap K) = \bigcap_{B \in \beta} B = \emptyset$ e ciò implica che esiste un $A \in \alpha$ con $x \notin A$. $X \setminus A$ è aperto, per cui $X \setminus A \in \mathcal{U}(x) \subset \ddot{x}$, perchè $\ddot{x} \longrightarrow x$. Ma allora $A \in \ddot{x}$ ed $X \setminus A \in \ddot{x}$, una contraddizione.

Teorema 2.21. *Uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni ultrafiltro su X converge, cioè se e solo se per ogni ultrafiltro $\ddot{x}$ su X esiste $x \in X$ con $\ddot{x} \longrightarrow x$.*

Dimostrazione. Ciò è un caso particolare del teorema 2.20.

Nota 2.22. $f : X \longrightarrow Y$ sia una applicazione suriettiva e $\dot{y}$ un filtro su Y. Poniamo

$$f^*(\dot{y}) := \{A \subset X \mid \text{ esiste } B \in \dot{y} \text{ con } A \supset f^{-1}(B)\}.$$

Allora $\dot{x} := f^*(\dot{y})$ è un filtro su X e $\dot{y} = f(\dot{x})$.

Ogni filtro su Y è quindi immagine (sotto f) di un filtro su X.

$f^*(\dot{y})$ si chiama la *controimmagine* di $\dot{y}$ rispetto all'applicazione suriettiva f.

Dimostrazione. Verifichiamo prima gli assiomi della definizione 1.3.

(1) $X = f^{-1}(Y) \in \dot{x}$.

(2) Per la suriettività della f abbiamo $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ per ogni $B \in \dot{y}$, perchè nessun elemento di $\dot{y}$ è vuoto. Perciò $\emptyset \notin \dot{x}$.

(3) Siano $F \in \dot{x}$ ed $F \subset A \subset X$. E' chiaro che allora anche $A \in \dot{x}$.

(4) Siano $F, G \in \dot{x}$. Allora esistono $B, C \in Y$ tali che $f^{-1}(B) \subset F$ e $f^{-1}(C) \subset G$. Ciò implica che $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) \subset F \cap G$ e siccome anche $B \cap C \in \dot{y}$, vediamo che $F \cap G \in \dot{x}$.

Dobbiamo ancora dimostrare che $\dot{y} = f(\dot{x})$.

(i) Sia $B \in \dot{y}$. Allora $f^{-1}(B) \in \dot{x}$ e ciò significa $B \in f(\dot{x})$.

(ii) Sia $B \in f(\dot{x})$, cioè $f^{-1}(B) \in \dot{x}$. Ciò significa che esiste $C \in \dot{y}$ tale che $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(B)$. Per la suriettività della f ciò implica $C \subset B$, e quindi $B \in \dot{y}$.

Nota 2.23. $f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione suriettiva e $\ddot{y}$ un ultrafiltro su Y. Se $\ddot{x}$ è un ultrafiltro su X con $\ddot{x} \supset f^*(\ddot{y})$, allora $f(\ddot{x}) = \ddot{y}$. Ogni ultrafiltro su Y è quindi immagine (sotto f) di un ultrafiltro su X.

Dimostrazione. Infatti per la nota 2.22 $\ddot{y} = f(f^*(\ddot{y})) \subset f(\ddot{x})$. Siccome $\ddot{y}$ è un ultrafiltro, necessariamente $f(\ddot{x}) = \ddot{y}$.

Proposizione 2.24. *X e Y siano spazi topologici ed X compatto. $f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione continua e suriettiva. Allora anche Y è compatto. In altre parole: L'immagine continua di uno spazio compatto è compatta.*

Dimostrazione. Usiamo il teorema 2.21. Sia $\ddot{y}$ un ultrafiltro su Y. Per la nota 2.23 esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\ddot{y} = f(\ddot{x})$. X è compatto, quindi esiste $x \in X$ con $\ddot{x} \longrightarrow x$.

La continuità di f implica $f(\ddot{x}) \longrightarrow f(x)$, cioè $\ddot{y} \longrightarrow f(x)$.

Proposizione 2.25. *X sia uno spazio topologico compatto ed A un chiuso di X. Allora A è compatto.*

Dimostrazione. α sia un intreccio di chiusi di A. Gli elementi di α sono chiusi anche in X, perchè A è chiuso in X. Quindi α è un intreccio di chiusi di X, perciò $\bigcap_{F \in \alpha} F \neq \emptyset$, perchè X è compatto.

Nota 2.26. A sia un sottoinsieme di X e $\dot{x}$ un filtro su X con $A \in \dot{x}$. Allora $\dot{x}_A := \{F \in \dot{x} \mid F \subset A\}$ è un filtro su A. $\dot{x}_A$ si chiama la *traccia* di $\dot{x}$ su A. Se con $i : A \longrightarrow X$ denotiamo l'inclusione, allora $i(\dot{x}_A) = \dot{x}$.

Dimostrazione. Verifichiamo prima gli assiomi della definizione 1.3.

(1) $A \in \dot{x}_A$ per definizione.

(2) Siccome $\dot{x}_A \subset \dot{x}$, certamente $F \neq \emptyset$ per ogni $F \in \dot{x}_A$.

(3) Siano $F \in \dot{x}_A$ e $F \subset B \subset A$. Per definizione $F \in \dot{x}$ e quindi anche $B \in \dot{x}$, per cui $B \in \dot{x}_A$.

(4) Siano $F, G \in \dot{x}_A$ cioè $F, G \in \dot{x}$ ed $F \cup G \subset A$. Allora $F \cap G \in \dot{x}$ e naturalmente $F \cap G \subset A$.

Dobbiamo ancora dimostrare che $\dot{x} = i(\dot{x}_A)$.

(i) Sia $F \in \dot{x}$. Allora $i^{-1}(F) = F \cap A \in \dot{x}_A$.

(ii) Sia $F \in i(\dot{x}_A)$, cioè $i^{-1}(F) = F \cap A \in \dot{x}_A$.

Ciò significa semplicemente $F \cap A \in \dot{x}$, per cui anche $F \in \dot{x}$.

Nota 2.27. A sia un sottoinsieme di X ed $i : A \longrightarrow X$ l'inclusione. $\dot{a}$ sia un filtro su A. Allora $i(\dot{a})$ è un filtro su X con $A \in i(\dot{a})$. Inoltre $(i(\dot{a}))_A = \dot{a}$.

Dimostrazione. Sia $F \subset A$. Allora $F \in (i(\dot{a}))_A \iff F \in i(\dot{a}) \iff A \cap F \in \dot{a} \iff F \in \dot{a}$.

Nota 2.28. A sia un sottoinsieme di X e $\ddot{x}$ un ultrafiltro su X con $A \in \ddot{x}$. Allora $\ddot{x}_A$ è un ultrafiltro su A.

Dimostrazione. Verifichiamo le condizioni dell'osservazione 2.8.

(1) $A \subset A$ e $A \in \ddot{x}$ implica $A \in \ddot{x}_A$.

(2) Siano $F, G \in \ddot{x}_A$. Allora $F \cap G \in \ddot{x}$ perchè $F, G \in \ddot{x}$, quindi $F \cap G \neq \emptyset$.

(3) Sia $F \cup G \in \ddot{x}_A$ ciò significa che $F \cup G \subset A$ per cui $F, G \subset A$, inoltre $F \cup G \in \ddot{x}$ quindi F o $G \in \ddot{x}$ ne consegue che F o $G \in \ddot{x}_A$.

Lemma 2.29. *X sia uno spazio topologico ed $A \subset X$. $\dot{x}$ sia un filtro su X con $A \in \dot{x}$. Il filtro $\dot{x}_A$ sia convergente, ad esempio $\dot{x}_A \longrightarrow a$ con $a \in A$. Allora $\dot{x} \longrightarrow a$.*

Dimostrazione. Per la continuità dell'inclusione $i : A \longrightarrow X$ abbiamo $\dot{x} = i(\dot{x}_A) \longrightarrow i(a) = a$.

Proposizione 2.30. *X sia uno spazio topologico di Hausdorff ed A un sottoinsieme compatto di X. Allora A è chiuso in X.*

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{A}$. Per il corollario 2.16 esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\ddot{x} \longrightarrow x$ e $A \in \ddot{x}$. Per la nota 2.26 $\ddot{x}_A$ è un ultrafiltro su A e dalla compattezza di A segue che esiste $a \in A$ con $\ddot{x}_A \longrightarrow a$. Per il lemma 2.29 $\ddot{x} \longrightarrow a$. Siccome X è di Hausdorff, dal teorema 1.9 segue che $x = a \in A$

Corollario 2.31. *In uno spazio topologico di Hausdorff compatto i sottoinsiemi compatti coincidono con i chiusi.*

Dimostrazione. Proposizioni 2.25 e 2.30.

Proposizione 2.32. *X sia uno spazio topologico di Hausdorff e K, L sottoinsiemi compatti di X con $K \cap L = \emptyset$. Allora esistono aperti U, V di X con $K \subset U, L \subset V$ ed $U \cap V = \emptyset$.*

Dimostrazione. Assumiamo che l'enunciato non sia vero. Allora $\mathcal{U}(K) \cup \mathcal{U}(L)$ è un intreccio e quindi esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\mathcal{U}(K) \cup \mathcal{U}(L) \subset \ddot{x}$. Per il teorema 2.20 esistono $x \in K$ e $y \in L$ con $\ddot{x} \longrightarrow x$ e $\ddot{x} \longrightarrow y$. Siccome X è di Hausdorff, ciò implica $x = y \in K \cap L$. Ciò non è possibile perchè $K \cup L = \emptyset$.

Definizione 2.33. Uno spazio topologico X si dice *normale* se è di Hausdorff e se per ogni coppia A, B di chiusi disgiunti di X esistono aperti U, V di X con $A \subset U, B \subset V$ ed $U \cap V = \emptyset$.

Corollario 2.34. *Uno spazio topologico di Hausdorff compatto è normale.*

Dimostrazione. Per il corollorio 2.31 i sottoinsiemi chiusi di uno spazio di Hausdorff compatto coincidono con i compatti. L'enunciato segue dalla proposizione 2.32.

Definizione 2.35. Uno spazio topologico X si dice *regolare*, se è di Hausdorff e se per ogni $x \in X$ ed ogni chiuso $A \subset X$ con $x \notin A$ esistono aperti U, V di X tali che $x \in U, A \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Osservazione 2.36. *Uno spazio normale è regolare. Quindi ogni spazio compatto e di Hausdorff è regolare.*

Dimostrazione. In uno spazio di Hausdorff ogni punto è chiuso, perciò l'enunciato segue direttamente dalla definizione.

Lemma 2.37. *X sia uno spazio topologico di Hausdorff. Sono equivalenti:*

(1) X è regolare.

(2) Per ogni $x \in X$ ed ogni $W \in \mathcal{U}(x)$ esiste un aperto U con $x \in U \subset \overline{U} \subset W$.

(3) Per ogni $x \in X$ ed ogni $W \in \mathcal{U}(x)$ esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ con $U = \overline{U} \subset W$.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Sia $W \in \mathcal{U}(x)$. Possiamo assumere che W sia aperto. Allora $X \setminus W$ è un chiuso con $x \notin X \setminus W$. Poichè X è regolare allora esistono aperti U, V tali che $x \in U$ e $X \setminus W \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Abbiamo quindi $x \in U \subset X \setminus V \subset W$.

Infatti $\overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset W$.

(2) $\iff$ (3): Chiaro.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Siano $x \in X$ ed A un chiuso di X con $x \notin A$. Allora $X \setminus A \in \mathcal{U}(x)$ e per ipotesi esiste un aperto U con $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus A$ e quindi $A \subset X \setminus \overline{U}$. $X \setminus \overline{U}$ è un aperto, inoltre $(X \setminus \overline{U}) \cap U \subset (X \setminus U) \cap U = \emptyset$.

Proposizione 2.38. *$f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione e $\ddot{x}$ un ultrafiltro su X. Allora $f(\ddot{x})$ è un ultrafiltro su Y.*

Dimostrazione. Sia $B \subset Y$ tale che $B \notin f(\ddot{x})$. Ciò significa $f^{-1}(B) \notin \ddot{x}$, cosicchè $X \setminus f^{-1}(B) \in \ddot{x}$, perchè $\ddot{x}$ è un ultrafiltro. Però $X \setminus (f^{-1}(B)) = f^{-1}(Y \setminus B)$, per cui $Y \setminus B \in f(\ddot{x})$.

Proposizione 2.39. *X e Y siano spazi topologici ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua e biiettiva. X sia compatto e Y sia di Hausdorff. Allora f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $g := f^{-1} : Y \longrightarrow X$ è continua. Sia $\ddot{y}$ un ultrafiltro su Y ed $y \in Y$ con $\ddot{y} \longrightarrow y$. Per il corollario 2.17 è sufficiente dimostrare che $g(\ddot{y}) \longrightarrow g(y)$. Per la proposizione 2.38 $g(\ddot{y})$ è un ultrafiltro su X e dalla compattezza di X segue che esiste un $x \in X$ tale che $g(\ddot{y}) \longrightarrow x$. Usando il corollario 1.17 abbiamo $\ddot{y} = f(g(\ddot{y})) \longrightarrow f(x)$. Siccome Y è di Hausdorff, ciò implica $f(x) = y$, per cui $x = g(y)$, cosicchè $g(\ddot{y}) \longrightarrow g(y)$.

Nota 2.40. La proposizione 2.39 può essere dimostrata anche senza un ulteriore ricorso alla teoria degli ultrafiltri:

In primo luogo $g = f^{-1}$ è continua se e solo se $g^{-1}(A) = f(A)$ è chiuso in Y per ogni chiuso A di X. Ma ogni chiuso A di X è compatto per la proposizione 2.21. Dalla proposizione 2.25 segue che $f(A)$ è compatto e quindi chiuso in Y per il corollario 2.31 essendo Y di Hausdorff.

Corollario 2.41. *$(X,\mathcal{U})$ sia uno spazio topolgico di Hausdorff ed $\mathcal{U}'$ una topologia su X tale che l'identità sia continua. Lo spazio $(X,\mathcal{U}')$ sia compatto. Allora $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.39 id è un omeomorfismo; ciò è possibile solo se $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.

Teorema 2.42 (teorema di Tikhonov). *T sia un insieme e $\bigcirc_{t \in T} X_t$ una famiglia di spazi topologici compatti. Allora $\prod_{t \in T} X_t$ è compatto.*

Dimostrazione. Come nella definizione 1.24, siano $X := \prod_{t \in T} X_t$ e $P_t : X \longrightarrow X_t$ ogni volta le proiezioni. $\ddot{x}$ sia un ultrafiltro su X.

Per la proposizione 2.38 ogni $P_t(\ddot{x}) = \ddot{x}_t$ è un ultrafiltro su X_t, e siccome X_t compatto, esiste $x_t \in X_t$ con $\ddot{x}_t \longrightarrow x_t$. Sia $x := \bigcirc_{t \in T} x_t$.

Per l'assioma della scelta x è un ben definito elemento di X. Dal teorema 1.28 segue che $\ddot{x} \longrightarrow x$. Il teorema 2.21 implica la compattezza di X.

Corollario 2.43. *X sia uno spazio topologico compatto e T un insieme. Allora X^T è compatto nella topologia del prodotto.*

Corollario 2.44. *Sia* $\gamma \in \mathbb{N} + 2$. *Allora* $\{0, 1, ..., \gamma - 1\}^{\mathbb{N}}$ *è uno spazio topologico di Hausdorff compatto.*

Nota 2.45. (1) $\ddot{x}$ sia un ultrafiltro libero su X. Allora nessun insieme finito può essere elemento di $\ddot{x}$. Perciò per ogni insieme finito $F \subset X$ si ha $X \setminus F \in \ddot{x}$.

(2) $\ddot{x}$ sia un ultrafiltro libero su $\mathbb{N}$. Allora $\mathbb{N} + k \in \ddot{x}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $A \in \ddot{x}$ ed A finito. A non può essere vuoto, per cui $A = \{x_1, ..., x_n\}$. Per il lemma 2.7 esiste un i tale che $\{x_i\} \in \ddot{x}$. Ma allora $\ddot{x} = x_i^+$.

3. SEMIQUANTORI

Situazione 3.1. X sia un insieme.

Definizione 3.2. $\dot{a}$ sia un filtro su X. Per un enunciato E applicabile agli elementi $x \in X$ scriviamo

$$E(x)\ \forall(x,\dot{a}) :\Longleftrightarrow\ \{x \in X \mid E(x)\} \in \dot{a}$$

Nell'espressione a destra $E(x)$ significa naturalmente che l'enunciato $E(x)$ è vero.

Il simbolo $\forall(x,\dot{a})$ può essere pronunciato *per quasi tutti rispetto ad* $\dot{a}$. $\forall(,\dot{a})$ si chiama il *semiquantore* associato al filtro $\dot{a}$.

Osservazione 3.3. *$\dot{x}$ sia un filtro su X. Le proprietà della definizione 1.3 possono, per enunciati E ed F applicabili agli elementi di X, essere così riformulati:*

(1) $E(x)\ \forall x \in X \implies E(x)\ \forall(x,\dot{a}) \in X$.

(2) $E(x)\ \forall(x,\dot{a}) \implies$ *esiste* $x \in X$ *con* $E(x)$.

(3) Se per ogni $x \in X$ vale l'implicazione $E(x) \implies F(x)$, e se $E(x)\ \forall(x,\dot{a})$, allora $F(x)\ \forall(x,\dot{a})$.

(4) $E(x)\ \forall(x,\dot{a})$ *e* $F(x)\ \forall(x,\dot{a}) \implies (E(x)$ *ed* $F(x))\ \forall(x,\dot{a}$.

E' anche chiaro che $\dot{a} = \{A \subset X \mid x \in A\ \forall(x,\dot{a})\}$.

In questo senso il semiquantore determina il filtro.

Proposizione 3.4. *$\ddot{a}$ sia un filtro su X. Allora sono equivalenti:*

(1) $\ddot{a}$ è un ultrafiltro.

(2) Per ogni enunciato E applicabile agli elementi di X si ha $\neg(E(x)\ \forall(x,\ddot{a})) \Longleftrightarrow (\neg E(x))\ \forall(x,\ddot{a})$.
Per un ultrafiltro possiamo quindi traslare la parentesi e scrivere semplicemente $\neg E(x)\ \forall(x,\ddot{a})$.

$\neg$ è il simbolo di negazione noto dalla logica.

<u>Dimostrazione.</u> Ciò segue direttamente dalla proposizione 2.6, perchè per ogni proprietà E possiamo considerare l'insieme $A := \{x \in X \mid E(x)\}$.

Osservazione 3.5. *X sia uno spazio topologico $x \in X$ e $\dot{x}$ un filtro su X. Allora $\dot{x} \longrightarrow x \Longleftrightarrow$ per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ vale $y \in U\ \forall(y,\dot{x})$.*

Osservazione 3.6. *$f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione e $\dot{a}$ un filtro su X. Allora $f(\dot{a}) = \{B \subset Y \mid f(x) \in B\ \forall(x,\dot{a})\}$.*

<u>Dimostrazione.</u> Sia $B \subset Y$. Allora $B \in f(\dot{a}) \Longleftrightarrow f^{-1}(B) \in \dot{a} \Longleftrightarrow \{x \in X \mid f(x) \in B\} \in \dot{a} \Longleftrightarrow f(x) \in B\ \forall(x,\dot{a})$.

Nota 3.7. X sia uno spazio topologico, I un insieme e $\dot{x}$ un filtro su I.

$v : I \longrightarrow X$ sia un'applicazione ed $a \in X$. Allora $v(\dot{x}) \longrightarrow a \Longleftrightarrow$ per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ vale $v(i) \in U\ \forall(i,\dot{x})$.

Esempio 3.8. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sia uno spazio di misura e $P \subset \mathcal{P}(\Omega \times \mathcal{A})$ tale che $|\pi| < \infty$ per ogni $\pi \in P$. Sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione. Definiamo $v : P \longrightarrow \mathbb{R}$ con $v(\pi) := \sum\limits_{(\omega,A)\in\pi} f(\omega)\mu(A)$.

Sia $\dot{x}$ un filtro su P. Allora per $a \in \mathbb{R}$ possiamo definire:

$\int f = a :\Longleftrightarrow\ v(\dot{x}) \longrightarrow a$

Più esplicitamente

$\int f = a \iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $|\sum\limits_{(\omega,A)\in\pi} f(\omega)\mu(A) - a| < \varepsilon\ \forall(\pi, \dot{x})$.

4. LA COMPATTIFICAZIONE DI STONE-ČECH DI UN INSIEME DISCRETO.

Situazione 4.1. X, Y insiemi.

Definizione 4.2. Per $A \subset X$ sia $\overline{A}$ l'insieme degli ultrafiltri $\ddot{x}$ su X per cui $A \in \ddot{x}$. Seguendo la notazione standard poniamo $\beta X := \overline{X}$.

βX è quindi l'insieme di tutti gli ultrafiltri su X e $\overline{A} = \{\ddot{x} \in \beta X \mid A \in \ddot{x}\}$.

Vedremo adesso che X e quindi anche A possono essere considerati in modo naturale come sottoinsiemi di βX e che $\overline{A}$ è veramente la chiusura di A rispetto ad una topologia di cui βX verrà fornito.

Proposizione 4.3. *Se $|X| < \infty$, allora $|\beta X| = |X|$, altrimenti $|\beta X| = 2^{2^{|X|}}$.*

Dimostrazione. Hindman/Strauss, pagg. 66 -69.

Nota 4.4. Siano $A, B \subset X$ e $\ddot{x} \in \beta X$. Allora, come sappiamo:

(1) $A \cup B \in \ddot{x} \iff A \in \ddot{x}$ o $B \in \ddot{x}$.

(2) $A \cap B \in \ddot{x} \iff A \in \ddot{x}$ e $B \in \ddot{x}$.

(3) $X \setminus A \in \ddot{x} \iff A \notin \ddot{x}$.

Possiamo riscrivere queste relazioni nel modo seguente:

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(3) $\overline{X \setminus A} = \overline{X} \setminus \overline{A}$.

E' chiaro inoltre che

(4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Corollario 4.5. *Siano $A, B \subset X$. Allora $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.*

Dimostrazione. Ciò segue da

$$\overline{A \setminus B} = \overline{A \cap (X \setminus B)} = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus B}) = \overline{A} \cap (\beta X \setminus \overline{B}) = \overline{A} \setminus \overline{B}$$

Corollario 4.6. *Siano $A, B \subset X$. Allora $\overline{A} = \overline{B} \iff A = B$. L'applicazione $\bigcirc_A \overline{A} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\beta X)$ è quindi iniettiva.*

Nota 4.7. La relazione (2) della nota 4.4 ci permette di usare l'insieme $\{\overline{A} \mid A \subset X\}$ come base di una topologia su βX. In questa topologia, per $\ddot{x} \in \beta X$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\ddot{x}) &= \{U \subset \beta X \mid \text{ esiste } A \in \ddot{x} \text{ con } \overline{A} \subset U\} \\ &= \{U \subset \beta X \mid \text{ esiste } A \text{ con } \ddot{x} \in \overline{A} \subset U\} \end{aligned}$$

In particolare $\overline{A} \in \mathcal{U}(\ddot{x})$ ogni volta che $A \in \ddot{x}$.

Gli aperti di βX sono esattamente gli insiemi della forma $\bigcup_{A\in\alpha} \overline{A}$ con $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$.

Osservazione 4.8. *Sia $A \subset X$. Allora $\overline{A}$ è aperto e chiuso in βX. Ricordiamo che ancora non sappiamo che $\overline{A}$ è veramente la chiusura di A.*

Dimostrazione. $\overline{A}$ è aperto per definizione (nota 4.7). Però allora anche $\beta X \setminus \overline{A} = \overline{X \setminus A}$ è aperto.

Proposizione 4.9. *βX è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ due ultrafiltri su X con $\ddot{x} \neq \ddot{y}$. Allora esiste $A \in \ddot{x}$ e $A \notin \ddot{y}$, per cui abbiamo che $A \in \ddot{x}$ e $X \setminus A \in \ddot{y}$.
Ciò significa che $\ddot{x} \in \overline{A}, \ddot{y} \in \overline{X \setminus A}$. Ma $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset$.

Definizione 4.10. L'applicazione $i := \bigcirc_x x^+$ è iniettiva e ci permette di considerare X in modo naturale come sottoinsieme di βX, identificando ogni punto di $x \in X$ con l'ultrafiltro principale x^+.

Nota 4.11. Sia $i : X \longrightarrow Y$ un'applicazione.

Per $A, B \subset X$ allora $i(A \cup B) = i(A) \cup i(B)$, e se i è iniettiva si ha anche che $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$ e $i(A \setminus B) = i(A) \setminus i(B)$. Inoltre $A \subset B \iff i(A) \subset i(B)$.

Perciò nell'identificazione della nota 4.10 possiamo eseguire le operazioni $A \cup B, A \cap B$ e $A \setminus B$ indifferentemente in X o in βX e similmente il significato di $A \subset B$ non cambia se interpretiamo questa relazione in βX.

Osservazione 4.12. *Sia $A \subset X$. Allora $A \subset \overline{A}$.*

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Allora $A \in a^+$, cioè $a^+ \in \overline{A}$.
Ciò è esattamente il significato dell'enunciato.

Nota 4.13. Sia $Q \subset \beta X$. Denotiamo, per il momento con $Q^{chiusura}$ la chiusura di Q nella topologia indotta nella nota 4.7. Allora come segue direttamente dalla definizione di quella topologia,

$$\begin{aligned} Q^{chiusura} &= \{\ddot{x} \in \beta X \mid \text{ per ogni } B \in \ddot{x} \text{ vale } Q \cap \overline{B} \neq \emptyset\} \\ &= \{\ddot{x} \in \beta X \mid \text{ per ogni } B \in \ddot{x} \text{ esiste } \ddot{y} \in Q \text{ con } B \in \ddot{y}\} \end{aligned}$$

Lemma 4.14. *Sia $A \subset X$. Allora $A^{chiusura} = \overline{A}$.*

Dimostrazione. (1) Sappiamo dall'osservazione 4.12 che $A \subset \overline{A}$. Ciò implica che $A^{chiusura} \subset \overline{A}$.

(2) Sia $\ddot{x} \in \overline{A}$, cioè $A \in \ddot{x}$. per la nota 4.13 dobbiamo dimostrare che $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ per ogni $B \in \ddot{x}$. Sia per cui $B \in \ddot{x}$. Ma per l'ossservazione 4.12 $A \cap \overline{B} \supset A \cap B \neq \emptyset$, perché $A \cap B \in \ddot{x}$.

Nota 4.15. La proposizione 4.13 ci dice che $\overline{A}$ coincide effettivamente con la chiusura di A in βX.

La notazione $Q^{chiusura}$ diventa perciò superflua; possiamo da ora in avanti denotare con $\overline{Q}$ la chiusura di un sottoinsieme qualunque Q di βX:

$\overline{Q} = \{\ddot{x} \in \beta X \mid$ per ogni $B \in \ddot{x}$ vale $Q \cap \overline{B} \neq \emptyset\}$.

Corollario 4.16. *X è denso in βX.*

Dimostrazione. Infatti $\overline{X} = \beta X$. Mentre prima ciò era semplicemente una definizione, adesso dal lemma 4.14 sappiamo che $\overline{X}$ è veramente la chiusura di X in βX.

Più intuitiva è forse una dimostrazione diretta:

Sia $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Dobbiamo dimostrare che $X \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Ma per l'osservazione 4.12 $X \cap \overline{A} \supset X \cap A = A \neq \emptyset$.

Osservazione 4.17. *Siano $A, B \subset X$. Allora $A \cap \overline{B} = A \cap B$.*
In particolare $X \cap \overline{A} = A$.

Dimostrazione. Dall'osservazione 4.12 segue che $A \cap B \subset A \cap \overline{B}$.

Sia viceversa $\ddot{x} \in A \cap \overline{B}$. Allora esiste un $a \in A$ tale che $a^+ = \ddot{x} \in \overline{B}$, per cui $B \in a^+$, ovvero $a \in B$. Identificando a^+ con $\ddot{x}$ abbiamo $\ddot{x} \in A \cap B$.

Nota 4.18. Per ogni $x \in X$ si ha

$\overline{\{x\}} = \{\ddot{x} \in \beta X \mid \{x\} \in \ddot{x}\} = \{x^+\} = \{x\}$

Ogni punto di X è quindi aperto in βX; ciò mostra allo stesso tempo che X è un sottoinsieme discreto (e quindi aperto) di βX e che l'iniezione $i : X \longrightarrow \beta X$ induce un omeomorfismo tra (lo spazio discreto originale) X e il sottospazio che otteniamo considerando X come sottoinsieme di βX.

Corollario 4.19. *X consiste esattamente dei punti aperti (detti anche isolati) di βX.*

Dimostrazione.

(1) Abbiamo già visto nella nota 4.18 che ogni punto di X è aperto.
(2) $\ddot{x}$ sia un punto aperto di βX. Per il corollario 4.16 ciò implica che $\ddot{x} \cap X \neq \emptyset$ e ciò significa che $\ddot{x} \in X$.

Teorema 4.20. *βX è compatto.*

Dimostrazione. ε sia un intreccio di chiusi di βX. Dobbiamo dimostrare che $\bigcap_{E \in \varepsilon} E \neq \emptyset$.

(1) Sia $\alpha := \{A \subset X \mid$ esiste $E \in \varepsilon$ con $E \subset \overline{A}\}$.
Allora α è un intreccio su X: Infatti $X \in \alpha$ e quindi $\alpha \neq \emptyset$, e se $A_1, ..., A_n \in \alpha$, allora esistono $E_1, ..., E_n \in \varepsilon$ con $E_1 \subset \overline{A_1}, ..., E_n \subset \overline{A_n}$, cosicchè $E_1 \cap ... \cap E_n \subset \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n} = \overline{A_1 \cap ... \cap A_n}$ e quindi

$A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$ perché $E_1 \cap ... \cap E_n \neq \emptyset$. Per la proposizione 2.11 esiste $\ddot{x} \in \beta X$ con $\alpha \subset \ddot{x}$.

(2) Dimostriamo adesso che $\ddot{x} \in \overline{E}$ per ogni $E \in \varepsilon$. Altrimenti, per la nota 4.15, esiste $B \in \ddot{x}$ tale che $E \cap \overline{B} = \emptyset$ e quindi $E \subset \beta X \setminus \overline{B} = \overline{(X \setminus B)}$. Per definizione di α allora $X \setminus B \in \alpha \subset \ddot{x}$, una contraddizione perché $B \in \ddot{x}$.

(3) Per ipotesi però $\overline{E} = E$ per ogni $E \in \varepsilon$ e vediamo che $\ddot{x} \in \bigcap_{E \in \varepsilon} E$.

Corollario 4.21. *$\beta X \setminus X$ (l'insieme degli ultrafiltri liberi) è compatto.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato nella nota 4.18 che X è aperto in βX. Perciò $\beta X \setminus X$ è un sottoinsieme chiuso e quindi compatto (proposizione 2.25) dello spazio compatto βX.

Proposizione 4.22. *Un sottoinsieme U di βX è allo stesso tempo aperto e chiuso se e solo se è della forma $U = \overline{A}$ per un sottoinsieme A di X.*

Dimostrazione. (1) U sia aperto e chiuso. Siccome U è aperto, esiste $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ con $U = \bigcup_{A \in \alpha} \overline{A}$. Ciò significa che $\{\overline{A} \mid A \in \alpha\}$ è un ricoprimento aperto di U. U però è anche chiuso e quindi compatto per la proposizione 2.25. Da ciò segue che esistono $A_1, ..., A_m \in \alpha$ tali che $U = \overline{A_1} \cup ... \cup \overline{A_m} = \overline{A_1 \cup ... \cup A_m}$ e quindi $U = \overline{A}$ con $A = A_1 \cup ... \cup A_m$

(2) Sia $A \subset X$. Allora A è aperto e chiuso per l'osservazione 4.8.

Lemma 4.23. *$\dot{a}$ sia un filtro su X ed $A \in \dot{a}$. $f, g : X \longrightarrow Y$ siano due applicazioni che coincidono su A. Allora $f(\dot{a}) = g(\dot{a})$.*

Dimostrazione. Sia $B \in f(\dot{a})$ cioè $f^{-1}(B) \in \dot{a}$. Per ipotesi $A \in \dot{a}$ e quindi $f^{-1}(B) \cap A \in \dot{a}$. Ma

$$f^{-1}(B) \cap A = \{a \in A \mid f(a) \in B\} = \{a \in A \mid g(a) \in B\} = g^{-1}(B) \cap A$$

e vediamo che $g^{-1}(B) \in \dot{a}$, per cui $B \in g(\dot{a})$.

Allo stesso modo si dimostra che $g(\dot{a}) \subset f(\dot{a})$.

Lemma 4.24. *X ed Y siano spazi topologici, A un sottoinsieme denso di X e $f, g : X \longrightarrow Y$ due applicazioni continue che coincidono su A. Y sia di Hausdorff. Allora $f = g$.*

Dimostrazione. Sia $x \in X = \overline{A}$ (naturalmente qui ci riferiamo allo spazio topologico X e non a βX). Per la proposizione 1.20 esiste un filtro $\dot{a}$ su X tale che $\dot{a} \longrightarrow x$ ed $A \in \dot{a}$. La continuità di f e g implica che $f(\dot{a}) \longrightarrow f(x)$ e $g(\dot{a}) \longrightarrow g(x)$. Ma per il lemma 4.23 sappiamo che $f(\dot{a}) = g(\dot{a})$ e da ciò segue che $f(x) = g(x)$ perché Y è di Hausdorff.

Nota 4.25. Y sia uno spazio compatto e di Hausdorff. Allora ogni ultrafiltro $\ddot{y}$ su Y converge ad un unico ben definito punto di Y che denotiamo con $\lim \ddot{y}$.

Dimostrazione. Teoremi 2.21 e 1.9.

Osservazione 4.26. *$f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione ed $x \in X$. Allora $f(x^+) = (f(x))^+$.*

Dimostrazione. Per $B \subset Y$ abbiamo

$$\begin{aligned} B \in f(x^+) &\iff f^{-1}(B) \in x^+ \iff x \in f^{-1}(B) \\ &\iff f(x) \in B \iff B \in (f(x))^+ \end{aligned}$$

Teorema 4.27. *Y sia uno spazio compatto e di Hausdorff. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Allora esiste un'unica applicazione continua $\lim f : \beta X \longrightarrow Y$ per la quale il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\lim f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

è commutativo. L'inclusione i è definita come nella proposizione 4.10.

L'applicazione $\lim f$ è definita da $(\lim f)(\ddot{x}) := \lim f(\ddot{x})$.

Dimostrazione.

(1) L'unicità segua dal lemma 4.24, perché dal corollario 4.16 sappiamo che $i(X)$ è denso in βX.

(2) L'applicazione $\lim f$ è ben definita, perché sappiamo dalla proposizione 2.38 che $f(\ddot{x})$ è un ultrafiltro su Y per ogni $\ddot{x} \in \beta X$; per la nota 4.25 $f(\ddot{x})$ converge ad un unico ben definito punto di Y, che abbiamo denotato con $\lim f(\ddot{x})$. Qui utilizziamo l'ipotesi che Y sia compatto e di Hausdorff.

(3) Dimostriamo che il diagramma è commutativo:
Sia $x \in X$. Allora $f(x^+) = (f(x))^+ \longrightarrow f(x)$, ossia $\lim f(x^+) = f(x)$

(4) Rimane da dimostrare la continuità di $\lim f$. Siano $\ddot{x} \in \beta X$ e $y := \lim f(\ddot{x})$. Sia $V \in \mathcal{U}(y)$. Per L'osservazione 2.36 e il lemma 2.37 possiamo assumere che $V = \overline{V}$. Siccome $f(\ddot{x}) \longrightarrow y$, abbiamo $V \in f(\ddot{x})$, per cui $A := f^{-1}(V) \in \ddot{x}$. Quindi $\overline{A} \subset \mathcal{U}(\ddot{x})$.
Dimostriamo che $(\lim f)(\overline{A}) \subset V$. Siano infatti $\ddot{a} \in \overline{A}$ e $z \in Y$ tali che $f(\ddot{a}) \longrightarrow z$. Allora $A \in \ddot{a}$ e quindi $f(A) \in f(\ddot{a})$, cosicché dalla proposizione 1.20 segue $z \in \overline{f(A)}$.

Definizione 4.28. X sia uno spazio topologico. Uno spazio topologico $\tilde{X}$ insieme ad una applicazione iniettiva $i : X \longrightarrow \tilde{X}$ si chiama una *compattificazione* di X, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $\tilde{X}$ è compatto e di Hausdorff.

(2) i induce un omeomorfismo tra X ed $i(X)$.

Una compattificazione $i : X \longrightarrow \tilde{X}$ si chiama una compattificazione *massimale* o di *Stone-Čech*, se gode delle seguenti proprietà universali:

Per ogni spazio compatto e di Hausdorff Y ed ogni applicazione continua $f : X \longrightarrow Y$ esiste un'unica applicazione continua $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow X$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

E' piuttosto immediato che una compattificazione di Stone-Čech di uno spazio topologico X, quando esiste, è univocamente determinata a meno di omeomorfismi naturali

Nota 4.29. Il teorema 4.27 mostra, insieme alla nota 4.18, che βX è una compattificazione di Stone-Čech dell'insieme discreto X (cioè di X considerato come spazio topologico discreto).

Definizione 4.30. Uno spazio topologico X si dice *completamente regolare* (o di *Tikhonov*), se X è di Hausdorff e se per ogni $x \in X$ ed ogni chiuso A di X con $x \notin A$ esiste un'applicazione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(a) = 1$ per ogni $a \in A$.

Proposizione 4.31. *Per uno spazio topologico X sono equivalenti:*

(1) X possiede una compattificazione.

(2) X possiede una compattificazione di Stone-Čech.

(3) X è completamente regolare.

(4) X è sottospazio denso di uno spazio compatto e di Hausdorff.

(5) X è sottospazio di uno spazio compatto e di Hausdorff.

Dimostrazione. Testi i topologia generale, ad esempio Willard o Engelking.

Lemma 4.32. *$\tilde{X}$ sia uno spazio topologico ed X un sottoinsieme denso di $\tilde{X}$. U sia un aperto di $\tilde{X}$. Allora $\overline{U} = \overline{U \cap X}$.*

Dimostrazione. È evidentemente sufficiente dimostrare che $U \subset \overline{U \cap X}$. Siano $z \in U$ e V un intorno aperto di z. Dobbiamo dimostrare che $V \cap U \cap X \neq \emptyset$. $V \cap U$ è però un aperto non vuoto (perché contiene z) e quindi $(V \cap U) \cap X \neq \emptyset$, perché X è denso in $\tilde{X}$.

Nota 4.33. L'ipotesi che U sia aperto nel lemma precedente è necessaria, come mostra l'esempio $\tilde{X} = [0, 1], X = \mathbb{Q}, U = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Corollario 4.34. *U sia un aperto di βX. Allora $\overline{U} = \overline{U \cap X}$.*

Vediamo in particolare che la chiusura di un sottoinsieme aperto di βX è ancora aperta.

Definizione 4.35. Sia $Q \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, ad esempio $Q \subset \beta X$. Poniamo

$$\mathrm{inter}(Q) := \bigcap_{\alpha \in Q} \alpha = \{F \subset X \mid F \in \alpha \text{ per ogni } \alpha \in Q\} \subset \mathcal{P}(X)$$

In particolare $\mathrm{inter}(\emptyset) = \emptyset$.

$\mathrm{inter}(Q)$ si chiama talvolta il *nucleo* di Q.

Definizione 4.36. Per $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ sia $\mathrm{ultra}(\alpha) := \{\ddot{x} \in \beta X \mid \alpha \subset \ddot{x}\}$.

Lemma 4.37. *Sia $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$. Allora:*

(1) $\mathrm{ultra}(\alpha) = \bigcap_{A \in \alpha} \overline{A}$.

(2) $\mathrm{ultra}(\alpha)$ *è quindi un chiuso di* βX.

(3) Se α è un intreccio, allora $\mathrm{ultra}(\alpha) \neq \emptyset$.

<u>Dimostrazione.</u>

(1) Sia $\ddot{x} \in \beta X$. Allora $\alpha \subset \ddot{x} \iff A \in \ddot{x}$ per ogni $A \in \alpha \iff \ddot{x} \in \overline{A}$ per ogni $A \in \alpha$.

(2) Chiaro.

(3) Proposizione 2.11.

Proposizione 4.38. *Sia $Q \subset \beta X$. Allora* $\overline{Q} = \mathrm{ultra}(\mathrm{inter}(Q))$.

<u>Dimostrazione.</u>

(1) Dimostriamo che $Q \subset \mathrm{ultra}(\mathrm{inter}(Q))$. Sia $\ddot{x} \in Q$. Dobbiamo dimostrare che $\mathrm{inter}(Q) \subset \ddot{x}$. Sia $F \in \mathrm{inter}(Q)$. Ciò significa che $F \in \ddot{y}$ per ogni $\ddot{y} \in Q$. In particolare allora $F \in \ddot{x}$.

(2) Dal punto (2) del lemma 4.37 segue che $\overline{Q} \subset \mathrm{ultra}(\mathrm{inter}(Q))$.

(3) Dimostriamo che $\mathrm{ultra}(\mathrm{inter}(Q)) \subset \overline{Q}$. Sia $\ddot{x} \in \mathrm{ultra}(\mathrm{inter}(Q))$, cioè $\mathrm{inter}(Q) \subset \ddot{x}$. Sia $B \in \ddot{x}$. Per la nota 4.15 è sufficiente dimostrare che $Q \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Assumiamo $Q \cap \overline{B} = \emptyset$. Allora per ogni $\ddot{y} \in Q$ vale $B \notin \ddot{y}$ e quindi $X \setminus B \in \ddot{y}$. Ciò significa che $X \setminus B \in \mathrm{inter}(Q)$. Per ipotesi però $\mathrm{inter}(Q) \subset \ddot{x}$, perciò $X \setminus B \in \ddot{x}$, una contraddizione.

Osservazione 4.39. *Siano $\ddot{x} \in \beta X$ ed $U \in \mathcal{U}(\ddot{x})$. Allora $U \cap X \in \ddot{x}$.*

<u>Dimostrazione.</u> Per ipotesi esiste $A \in \ddot{x}$ con $\overline{A} \subset U$. Ciò implica $A \subset U$, cosicché $A = A \cap X \subset U \cap X$, per cui $U \cap X \in \ddot{x}$.

Nota 4.40. Sia $A \subset X$. Allora esiste una biiezione naturale $\overline{A} \longrightarrow \beta A$ che manda $\ddot{x}$ in $\ddot{x}_A$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $\ddot{x} \in \overline{A}$. Allora $\ddot{x}_A$ è un ultrafiltro su A per la nota 2.28. Ciò garantisce che l'applicazione $\ddot{x} \longmapsto \ddot{x}_A$ è ben definita. Sia $i : A \longrightarrow X$ l'inclusione. Allora $i(\ddot{x}_A) = \ddot{x}$ per la nota 2.26. Per $\ddot{a} \in \beta A$ si ha invece $\ddot{a} = (i(\ddot{a}))_A$ per la nota 2.27.

5. PUNTI FISSI.

Situazione 5.1. X, Y insiemi.

Definizione 5.2. $f : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione. Un punto $x \in X$ si dice un *punto fisso* di f, se $f(x) = x$. Denotiamo con $\mathrm{Fix}\, f$ l'insieme dei punti fissi di f.

Lemma 5.3 (lemma di Katětov). *$f : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione senza punti fissi. Allora esiste una partizione $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$ di X tale che $f(A_i) \cap A_i = \emptyset$ per $i = 1, 2, 3$.*

Dimostrazione. (1) G sia l'insieme di tutte le coppie (A, g) in cui $A \subset X$ e $g : A \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ è un'applicazione tale che $f(A) \subset A$ e per ogni $a \in A, g(a) \neq g(f(a))$.

Notiamo che G è un insieme parzialmente ordinato con $(A, g) \leq (B, h)$ se $A \subset B$ e ($h = g$ in A). Utilizzando il lemma di Zorn vediamo che esiste un elemento massimale che denotiamo con (D, g)

(2) Dimostriamo che $D = X$. Assumiamo per assurdo che esista $b \in X \setminus D$.

Definiamo una funzione $h : X \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ nel modo seguente. Per $a \in D$ sia $h(a) := g(a)$. Cerchiamo di definire adesso $h(b)$ in modo tale che $h(b) \neq h(f(b))$ se $h(f(b))$ è già stato definito. Poniamo $f^0(b) = b$; supponiamo di aver già definito $h(f^m(b))$ per $m = 0, 1, .., n$. Se $h(f^{n+1}(b))$ non è ancora stato definito scegliamo come $h(f^{n+1}(b))$ un valore appartenente a $1, 2, 3$ differente da $h(f^n(b))$ e da $h(f^{n+2}(b))$ se quest'ultimo è già stato definito. Ciò è possibile perché abbiamo 3 valori a disposizione.

Così facendo troviamo una coppia $(E, h) \in G$ (come si verifica immediatamente) con $E = D \cup \{f^n(b) \mid n \in \mathbb{N} \text{ ed } (h = g, \text{ in } D)\}$. Siccome $b = f^0(b) \notin D$, allora $E \supsetneqq D$ in contraddizione alla massimalità di (D, g). Vediamo così che necessariamente $D = X$.

(3) Definiamo ora gli insiemi A_i che stavamo cercando ponendo $A_i := g^{-1}(\{i\})$ per $i = \{1, 2, 3\}$.

Definizione 5.4. $f : X \longrightarrow Y$ sia un'applicazione. Dalla proposizione 2.37 sappiamo che $f(\ddot{x}) \in \beta Y$ per ogni $\ddot{x} \in \beta X$. Otteniamo così un'applicazione $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y$ che manda $\ddot{x}$ in $f(\ddot{x})$.

Osservazione 5.5. *Sia $A \subset X$. Allora $\overline{A} = \beta X$ implica $A = X$.*

Dimostrazione. Sia infatti $X \setminus A \neq \emptyset$. Allora $\overline{X \setminus A} \neq \emptyset$, perché ogni sottoinsieme diverso dal vuoto appartiene ad un ultrafiltro. Ma $\overline{X \setminus A} = \beta X \setminus \overline{A}$.

Lemma 5.6. *$f : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione e $\ddot{x} \in \beta X$. Se $f(\ddot{x}) \neq \ddot{x}$, allora esiste $A \in \ddot{x}$ tale che $f(A) \cap A = \emptyset$.*

Dimostrazione. Assumiamo che $f(A) \cap A \neq \emptyset$ per ogni $A \in \ddot{x}$.

(1) Sia $\alpha := \{f(A) \cap A \mid A \in \ddot{x}\}$. Dimostriamo che α è un intreccio. Siano infatti $A_1, ..., A_n \in \ddot{x}$.

Allora $A_1 \cap ... \cap A_n \in \ddot{x}$ e $f(A_1 \cap ... \cap A_n) \cap A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$ per ipotesi. Ma questo insieme è contenuto in $(f(A_1) \cap A_1) \cap ... \cap (f(A_n) \cap A_n)$.

(2) Siccome $\{f(A) \mid A \in \ddot{x}\}$ genera $f(\ddot{x})$, ciò implica che il filtro generato da α contiene sia $\ddot{x}$ che $f(\ddot{x})$. Questi sono ultrafiltri e devono quindi coincidere con $\mathrm{filtro}(\alpha)$ e perciò anche tra di loro.

Lemma 5.7. *Per un'applicazione $f : X \longrightarrow X$ sono equivalenti:*

(1) $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta X$ possiede un punto fisso.

(2) Per ogni ricoprimento finito $X = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ di X esiste un i tale che $f(A_i) \cap A_i \neq \emptyset$.

(3) Per ogni partizione finita $X = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_m$ di X esiste un i tale che $f(A_i) \cap A_i \neq \emptyset$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) $\implies$ (2): $\ddot{x}$ sia un punto fisso di βf, cioè $f(\ddot{x}) = \ddot{x}$. Assumiamo che esista un ricoprimento $X = A_1 \cup ... \cup A_m$ tale che $f(A_i) \cap A_i = \emptyset$ per ogni i. Sappiamo però che esiste i tale che $A_i \in \ddot{x}$. Allora $f(A_i) \in f(\ddot{x}) = \ddot{x}$, quindi $\emptyset = f(A_i) \cap A_i \in \ddot{x}$, una contraddizione.

(2) $\implies$ (1): βf non abbia punti fissi. Ciò significa $f(\ddot{x}) \neq \ddot{x}$ per ogni $\ddot{x} \in \beta X$. Per il lemma 5.6 ciò implica che per ogni $\ddot{x} \in \beta X$ esiste $A_{\ddot{x}} \in \ddot{x}$ con $A_{\ddot{x}} \cap f(A_{\ddot{x}}) = \emptyset$. Allora $\{\overline{A_{\ddot{x}}} \mid \ddot{x} \in \beta X\}$ è un ricoprimento aperto di βX. Siccome βX è compatto, esiste un sottoricoprimento finito $F \subset \beta X$ tale che $\bigcup\limits_{\ddot{x} \in F} \overline{A_{\ddot{x}}} = \beta X$. Ma $\bigcup\limits_{\ddot{x} \in F} \overline{A_{\ddot{x}}} = \overline{\bigcup\limits_{\ddot{x} \in F} A_{\ddot{x}}}$ (perché F è finito) e quindi $\bigcup\limits_{\ddot{x} \in F} A_{\ddot{x}} = X$ per l'osservazione 5.5.
Siccome $A_{\ddot{x}} \cap f(A_{\ddot{x}}) = \emptyset$ per ogni $\ddot{x}$, abbiamo una contraddizione all'ipotesi (2).

(2) $\implies$ (3): Chiaro.

(3) $\implies$ (2): Sia $X = A_1 \cup ... \cup A_m$ con $f(A_i) \cap A_i = \emptyset$ per ogni i. Ponendo $A_1' := A_1, A_2' := A_2 \setminus A_1, A_3' := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), ...$ otteniamo una partizione finita $X = A_1' \sqcup ... \sqcup A_m'$ con $A_i' \subset A_i$ e quindi $f(A_i') \cap A_i' = \emptyset$ per ogni i.

Teorema 5.8. *$f : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione senza punti fissi. Allora anche l'applicazione $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta X$ non ha punti fissi.*

Viceversa naturalmente ogni punto fisso di f è anche un punto fisso di βf.

<u>Dimostrazione.</u> L'ipotesi insieme con il lemma 5.3 implica che esiste una partizione $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$ di X con $f(A_i) \cap A_i = \emptyset$ per $i = 1, 2, 3$. Se βf avesse un punto fisso, avremmo una contraddizione alla condizione (2) del lemma 5.7.

Teorema 5.9. *$f : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione ed $\ddot{x} \in \beta X$. Allora*

$\ddot{x} \in \mathrm{Fix}\, \beta f \iff \mathrm{Fix}\, f \in \ddot{x}$.

<u>Dimostrazione.</u> Poniamo $F := \mathrm{Fix}\, f$.

$\Longrightarrow$: Sia $f(\ddot{x}) = \ddot{x}$. Assumiamo che $F \notin \ddot{x}$. Allora $X \setminus F \in \ddot{x}$. Scegliamo un elemento $a \in X \setminus F$ e definiamo un'applicazione $g : X \longrightarrow X$ con

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in X \setminus F \\ a & \text{per } x \in F \end{cases}$$

Allora g non possiede punti fissi. Infatti per $x \in F$ abbiamo $g(x) = a$, ma $\notin F$ e quindi $g(x) \neq x$, mentre per $x \in X \setminus F$ abbiamo $g(x) = f(x) \neq x$ perché $x \notin F$.

Per il teorema 5.8 ciò implica che anche βg non ha un punto fisso. Però $(f = g, \text{in } X \setminus F)$ e quindi $(\beta f = \beta g, \text{in } \overline{X \setminus F})$, come segue dalla continuità di βf e βg. Ma $\ddot{x} \in \overline{X \setminus F}$ e quindi $g(\ddot{x}) = f(\ddot{x}) = \ddot{x}$, una contraddizione.

$\Longleftarrow$: Sia $F \in \ddot{x}$. Assumiamo che $f(\ddot{x}) \neq \ddot{x}$. Per il lemma 5.6 esiste $A \in \ddot{x}$ tale che $f(A) \cap A = \emptyset$. Allora anche $f(A \cap F) \cap A \cap F = \emptyset$. Ma $f(A \cap F) = A \cap F$ ed $A \cap F \in \ddot{x}$, una contraddizione.

Corollario 5.10. *$f : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione.*

Allora $\operatorname{Fix} \beta f = \overline{\operatorname{Fix} f}$.

6. IL MONOIDE $\beta\mathbb{N}$

Definizione 6.1. Per $a \in \mathbb{N}$ sia $\mathrm{add_a} := \bigcirc_n n + a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Definizione 6.2. Siano $F \subset \mathbb{N}$ ed $a \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$\begin{aligned}(F \geq a) &:= \{n \in F \mid n \geq a\}\\ F - a &:= \{n \in \mathbb{N} \mid n + a \in F\} = \mathrm{add_a}^{-1}(F)\\ F + a &:= \{n + a \mid n \in F\} = \mathrm{add_a}(F).\end{aligned}$$

Si noti che si ha $(F + a) - a = F$, ma $(F - a) + a \subsetneqq F$, come mostra l'esempio $F = \mathbb{N}$: Si ha sempre $\mathbb{N} - a = \mathbb{N}$, mentre $\mathbb{N} + a \subsetneqq \mathbb{N}$ per $a \neq 0$. Per definizione $n \in F - a \iff n + a \in F$.

Definizione 6.3. Per $a \in \mathbb{N}$ ed $\ddot{x} \in \beta\mathbb{N}$ poniamo

$$a + \ddot{x} := \ddot{x} + a := \mathrm{add_a}(\ddot{x}) = \{F \subset \mathbb{N} \mid F - a \in \ddot{x}\}$$

Per $F \subset \mathbb{N}$ abbiamo quindi

$$F \in a + \ddot{x} \iff F - a \in \ddot{x} \iff F \in \ddot{x} + a$$

Osservazione 6.4. *Siano $a, b \in \mathbb{N}$. Allora, come sappiamo,*

$$a + b^+ = (a + b)^+ = (b + a)^+ = b + a^+.$$

Possiamo quindi identificare questo elemento di $\beta\mathbb{N}$ con $a + b$.

Proposizione 6.5. *X ed Y siano insiemi ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Allora $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y$ è continua.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $\ddot{x} \in \beta X$ e $B \in f(\ddot{x})$. Allora $A := f^{-1}(B) \in \ddot{x}$, cosicchè $\overline{A} \in \mathcal{U}(\ddot{x})$. Dimostriamo che $(\beta f)(\overline{A}) \subset \overline{B}$.

Sia $\ddot{z} \in \overline{A}$, cioè $\ddot{z} \in \beta X$ con $A \in \ddot{z}$. Dobbiamo dimostrare che $f(\ddot{z}) \in \overline{B}$, cioè che $B \in f(\ddot{z})$, ovvero che $f^{-1}(B) = A \in \ddot{z}$. Ma questa è proprio una delle nostre ipotesi.

Nota 6.6. X ed Y siano insiemi ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ Y \arrow[r, "i_Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

in cui i_X ed i_Y sono le inclusioni. E' evidente che il diagramma è commutativo. Per la proposizione 6.5 βf è continua, e dal teorema 4.27 segue che $\beta f = \lim(i_Y \circ f)$, come si verifica anche facilmente in modo diretto.

Corollario 6.7. *Per ogni $a \in \mathbb{N}$ l'applicazione*

$$\beta\,\mathrm{add_a} = \bigcirc_{\ddot{x}} a + \ddot{x} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$$

è continua.

Osservazione 6.8. *Siano* $a \in \mathbb{N}$ *ed* $\ddot{x} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. *Allora* $a + \ddot{x} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Chiaro, ad esempio perché ogni elemento di $a + \ddot{x}$ deve essere un insieme infinito.

Lemma 6.9. *Per* $a \in \mathbb{N}$, $F \subset \mathbb{N}$ *ed* $\ddot{x} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *sono equivalenti:*

(1) $F - a \in \ddot{x}$.

(2) $F \in a + \ddot{x}$.

(3) $(F \geq a) \in a + \ddot{x}$.

Dimostrazione. (1) $\iff$ (2): Per definizione.

(2) $\implies$ (3): Per l'osservazione 6.8 anche $a + \ddot{x} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, e quindi $\mathbb{N}+a \in a+\ddot{x}$ per la nota 2.45 Ciò implica che $F \cap (\mathbb{N}+a) = (F \geq a) \in a+\ddot{x}$.

(3) $\implies$ (2): Chiaro, poichè $(F \geq a) \subset F$.

Definizione 6.10. Per $\ddot{x} \in \beta\mathbb{N}$ ed $F \subset \mathbb{N}$ sia $F - \ddot{x} := \{a \in \mathbb{N} \mid F \in a + \ddot{x}\}$.

Si noti che $F - \ddot{x} \subset \mathbb{N}$.

Osservazione 6.11. *Siano* $a \in \mathbb{N}$ *ed* $F \subset \mathbb{N}$. *Allora* $F - a^+ = F - a$.

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}$ sono equivalenti:

$n \in F - a^+$.
$F \in a^+ + n = (a+n)^+ = (n+a)^+$.
$n + a \in F$.
$n \in F - a$.

Definizione 6.12. Per $\ddot{x}, \ddot{y} \in \beta\mathbb{N}$ sia

$$\ddot{x} + \ddot{y} := \{F \subset \mathbb{N} \mid F - \ddot{y} \in \ddot{x}\}$$

Per $F \subset \mathbb{N}$ abbiamo quindi $F \in \ddot{x} + \ddot{y} \iff F - \ddot{y} \in \ddot{x}$.

Vedremo adesso che $\ddot{x} + \ddot{y} \in \beta\mathbb{N}$ e che l'operazione che così si ottiene à associativa, ma (come si potrebbe dimostrare) altamente non commutativa.

Lemma 6.13. *Siano* $F, G \subset \mathbb{N}$ *ed* $\ddot{y} \in \beta\mathbb{N}$. *Allora:*

(1) $(F - \ddot{y}) \cap (G - \ddot{y}) = (F \cap G) - \ddot{y}$.

(2) $(F - \ddot{y}) \cup (G - \ddot{y}) = (F \cup G) - \ddot{y}$.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{N}$. Sappiamo che $a + \ddot{y} \in \beta\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(1)\ a \in (F - \ddot{y}) \cap (G - \ddot{y}) &\iff F \in a + \ddot{y} \text{ e } g \in a + \ddot{y} \\ &\iff f \cap G \in a + \ddot{y} \iff a \in (f \cap G) - \ddot{y}\end{aligned}$$

.

(2) Sia $a \in (F - \ddot{y}) \cup (G - \ddot{y})$, ad esempio $a \in F - \ddot{y}$. Allora $F \in a + \ddot{y}$ e quindi anche $F \cup G \in a + \ddot{y}$, cioè $a \in (F \cup G) - \ddot{y}$.

Sia invece $a \in (F \cup G) - \ddot{y}$, cioè $F \cup G \in a + \ddot{y}$. Siccome $a + \ddot{y}$ è un ultrafiltro, ad esempio $F \in a + \ddot{y}$, per cui $a \in F - \ddot{y} \subset (F - \ddot{y}) \cup (G - \ddot{y})$.

Proposizione 6.14. *Siano* $\ddot{x}, \ddot{y} \in \beta\mathbb{N}$. *Allora* $\ddot{x} + \ddot{y} \in \beta\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Verifichiamo le condizioni dell'osservazione 2.8:

(1) $\mathbb{N} - \ddot{y} = \{a \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \in a + \ddot{y}\} = \mathbb{N} \in \ddot{x}$, per cui $\mathbb{N} \in \ddot{x} + \ddot{y}$.

(2) Siano $F, G \in \ddot{x} + \ddot{y}$, cioè $F - \ddot{y} \in \ddot{x}$ e $G - \ddot{y} \in \ddot{x}$. Per il lemma 6.13 abbiamo $(F \cap G) - \ddot{y} = (F - \ddot{y}) \cap (G - \ddot{y}) \in \ddot{x}$.

(3) Siano $F, G \subset \mathbb{N}$ con $F \cup G \in \ddot{x} + \ddot{y}$. Ancora per il lemma 6.13 ciò significa $(F \cup G) - \ddot{y} = (F - \ddot{y}) \cup (G - \ddot{y}) \in \ddot{x}$, per cui ad esempio $F - \ddot{y} \in \ddot{x}$ e quindi $F \in \ddot{x} + \ddot{y}$.

Osservazione 6.15. *Per* $a \in \mathbb{N}$ *ed* $\ddot{x} \in \beta\mathbb{N}$ *si ha*

$a + \ddot{x} = a^+ + \ddot{x} = \ddot{x} + a^+ = \ddot{x} + a$

Dimostrazione. Per definizione $a + \ddot{x} = \ddot{x} + a$. Sia $F \subset \mathbb{N}$. Allora sono equivalenti:

$F \in a^+ + \ddot{x}$.
$F - \ddot{x} \in a^+$.
$a \in F - \ddot{x}$.
$F \in a + \ddot{x}$. .
$F - a \in \ddot{x}$.
$F - a^+ \in \ddot{x}$ (per l'osservazione 6.11).
$F \in \ddot{x} + a^+$.

Nota 6.16. Dalle osservazioni 6.4 e 6.15 segue che possiamo considerare $(\mathbb{N}, +)$ come sottogruppoide (o sottomonoide, perché dimostriamo adesso che l'operazione $+$ è commutativa) di $(\beta\mathbb{N}, +)$ e che $\mathbb{N}$ è contenuto nel *centro* di $(\beta\mathbb{N}, +)$, cioè nell'insieme di quegli elementi di $\beta\mathbb{N}$ che commutano (rispetto all'operazione $+$) con tutti gli altri elementi di $\beta\mathbb{N}$.

Si può anche dimostrare che il centro di $(\beta\mathbb{N}, +)$ coincide con $\mathbb{N}$ (cfr. Hindman / Strauss, theorem 6.10 a pag. 109).

È anche chiaro che 0 è l'elemento neutro di $(\beta\mathbb{N}, +)$, ma nella teoria algebra di $\beta\mathbb{N}$ si fa vedere che questo monoide contiene molti altri elementi idempotenti.

Definizione 6.17. Per $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$ sia $\alpha_{\ddot{n}} := \bigcirc_{\ddot{x}} \ddot{x} + \ddot{n} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ l'addizione a destra. Per $a \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha_a = \beta\,\mathrm{add_a}$.

Proposizione 6.18. *Sia* $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$. *Allora l'applicazione* $\alpha_{\ddot{n}} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ *è continua.*

Dimostrazione. Ciò è immediato. Siano infatti $\ddot{x} \in \beta\mathbb{N}$ e $B \in \ddot{x} + \ddot{n}$, cioè $B - \ddot{n} \in \ddot{x}$, cosicchè $\overline{B - \ddot{n}} \in \mathcal{U}(\ddot{x})$. Dimostriamo che $\alpha_{\ddot{n}}(\overline{B - \ddot{n}}) \subset \overline{B}$. Ma per $\ddot{z} \in \overline{B - \ddot{n}}$ abbiamo $B - \ddot{n} \in \ddot{z}$ e quindi $B \in \ddot{z} + \ddot{n}$, cioè $\ddot{z} + \ddot{n} \in \overline{B}$.

Teorema 6.19. *Il gruppoide* $(\beta\mathbb{N}, +)$ *è un monoide.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato nella nota 6.16 che 0 è un elemento neutro di $(\beta\mathbb{N}, +)$. Dobbiamo però dimostrare che l'operazione $+$ introdotta nella definizione 6.12 è associativa. Siano $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \in \beta\mathbb{N}$.

(1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\ddot{y} + \ddot{z}) &= \alpha_{\ddot{y}+\ddot{z}}(\ddot{x}) \\ (\ddot{x} + \ddot{y}) + \ddot{z} &= (\alpha_{\ddot{z}} \circ \alpha_{\ddot{y}})(\ddot{x}) \end{aligned}$$

Dalla proposizione 6.18 sappiamo che le applicazioni $\alpha_{\ddot{y}+\ddot{z}}$ e $\alpha_{\ddot{z}} \circ \alpha_{\ddot{y}}$ sono continue; per il lemma 4.24 è sufficiente dimostrare che esse coincidono su $\mathbb{N}$.

(2) Sia $a \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned} (\alpha_{\ddot{y}} \circ \alpha_{\ddot{z}})(a) &= \alpha_{\ddot{y}}(a + \ddot{z}) = (\alpha_{\ddot{y}} \circ \alpha_a)(\ddot{z}) \\ \alpha_{\ddot{y}+\ddot{z}}(a) &= (\ddot{y} + \ddot{z}) + a = (\alpha_a \circ \alpha_{\ddot{y}})(\ddot{z}) \end{aligned}$$

Siccome anche l'applicazione α_a è continua è sufficiente dimostrare che le applicazioni $\alpha_{\ddot{y}} \circ \alpha_a$ e $\alpha_a \circ \alpha_{\ddot{y}}$ coincidono su $\mathbb{N}$.

(3) Sia $b \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned} (\alpha_{\ddot{y}} \circ \alpha_a)(b) &= \alpha_{\ddot{y}}(a + b) = (a + b) + \ddot{y} = \alpha_{a+b}(\ddot{y}) \\ (\alpha_a \circ \alpha_{\ddot{y}})(b) &= a + (\ddot{y} + b) = (\alpha_a \circ \alpha_b)(\ddot{y}). \end{aligned}$$

Vediamo così che è sufficiente dimostrare che α_{a+b} e $\alpha_a \circ \alpha_b$ coincidono su $\mathbb{N}$.

(4) Per $c \in \mathbb{N}$ abbiamo però

$$\begin{aligned} \alpha_{a+b}(c) &= (a + b) + c \\ (\alpha_a \circ \alpha_b)(c) &= a + b + c \end{aligned}$$

Ma in $\mathbb{N}$ vale che $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Lemma 6.20. *Siano $\ddot{m} \in \beta\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, X$ uno spazio topologico ed $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ un'applicazione. Allora*

$$(\bigcirc_m f(n + m))(\ddot{m}) = f(n + \ddot{m})$$

Dimostrazione. (1) Sia $g := \bigcirc_m f(n + m) = f \circ \mathrm{add_n}$. Dobbiamo dimostrare che $g(\ddot{m}) = f(n + \ddot{m})$. Ma per $A \subset X$ abbiamo

$$\begin{aligned} A \in g(\ddot{m}) &\iff g^{-1}(A) = {\mathrm{add_n}}^{-1}(f^{-1}(A)) \in \ddot{m} \\ &\iff f^{-1}(A) \in n + \ddot{m} \iff A \in f(n + \ddot{m}) \end{aligned}$$

.

(2) Si potrebbe anche usare direttamente la nota 1.16. L'enunciato del lemma equivale infatti a $(f \circ \mathrm{add_n})(\ddot{m}) = f(\mathrm{add_n}(\ddot{m}))$.

Proposizione 6.21. *Siano $\ddot{n}, \ddot{m} \in \beta\mathbb{N}, X$ uno spazio topologico compatto e di Hausdorff ed $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ un'applicazione. Allora*

$$\lim(\bigcirc_n \lim(\bigcirc_m f(n+m)))(\ddot{m})(\ddot{n}) = \lim f(\ddot{n}+\ddot{m})$$

<u>Dimostrazione.</u> Seguiamo Hindman/Strauss, pag 74 (theorem 4.5).

(1) Per il lemma 6.20 abbiamo $(\bigcirc_m f(m+n))(\ddot{m}) = f(n+\ddot{m})$, per cui l'enunciato è equivalente a $\lim(\bigcirc_n \lim f(n+\ddot{m}))(\ddot{n}) = f(n+\ddot{m})$.

(2) Introduciamo le seguenti notazioni:
$y = \lim f(\ddot{n}+\ddot{m})$.
$g(n) := \lim f(n+\ddot{m})$ per ogni n, cosicché otteniamo un'applicazione $g : \mathbb{N} \longrightarrow X$.
$x := \lim g(\ddot{n})$.

(3) Dobbiamo perciò dimostrare che $x = y$.

(4) Sia $x \neq y$. Allora esistono $U \in \mathcal{U}(x)$ e $V \in \mathcal{U}(y)$ con $U \cap V \neq \emptyset$. Possiamo assumere che U sia aperto.

(5) Siano $A := f^{-1}(V)$ e $B := g^{-1}(U)$.
Allora $f(\ddot{n}+\ddot{m}) \longrightarrow y$ implica $V \in f(\ddot{n}+\ddot{m})$, per cui $A \in \ddot{n}+\ddot{m}$, mentre $g(\ddot{n}) \longrightarrow x$ implica $U \in g(\ddot{n})$, cosicché $B \in \ddot{n}$.
In particolare vediamo che $\overline{A} \in \mathcal{U}(\alpha_{\ddot{m}}(\ddot{n}))$ e dalla continuità di $\alpha_{\ddot{m}}$ (proposizione 6.18) segue che $C \in \ddot{n}$ con $\alpha_{\ddot{m}}(\overline{C}) \subset \overline{A}$.

(6) Abbiamo quindi $B \cap C \in \ddot{n}$, per cui $B \cap C \neq \emptyset$. Possiamo scegliere $i \in B \cap C$. Fissato questo i, sia $h := \bigcirc_m f(i+m) : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Dal lemma 6.20 abbiamo $h(\ddot{m}) = f(i+\ddot{m})$ e quindi $h(\ddot{m}) \longrightarrow g(i)$.
In primo luogo $i \in B$, per cui $g(i) \in U$. Siccome U è aperto, abbiamo $U \in \mathcal{U}(g(i)) \subset h(\ddot{m})$, cosicché $D := h^{-1}(U) \in \ddot{m}$.

(7) D'altra parte $i \in C$, quindi $i+\ddot{m} \in \overline{A}$ ed $\overline{A} \in \mathcal{U}(i+\ddot{m})$. Per la continuità di α esiste $E \in \ddot{m}$ con $\alpha_i(\overline{E}) \subset \overline{A}$.

(8) Allora $D \cap E \in \ddot{m}$, per cui $D \cap E \neq \emptyset$. Possiamo scegliere $j \in D \cap E$. $j \in D$ implica $h(j) = f(i+j) \in U$. D'altra parte $j \in E$ e ciò implica $i+j \in A$, per cui $f(i+j) \in V$.
Ma allora $f(i+j) \in U \cap V = \emptyset$, una contraddizione.

7. SISTEMI DINAMICI COMPATTI

Situazione 7.1. X sia uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e $T : X \longrightarrow X$ un'applicazione continua. Diciamo allora che $X = (X, T)$ è *un sistema dinamico compatto*. x ed y siano elementi di X quando non indicato diversamente. Solo per ragioni formali, per rendere non ambigua la notazione φ_x della definizione 7.3, assumiamo inoltre che $X \bigcap \mathbb{Z} = \emptyset$.

Definizione 7.2. Un sottoinsieme $A \subset X$ è detto *invariante* se $TA \subset A$.

Definizione 7.3. Per $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in X$ siano $\varphi_n(x) := \varphi_x(n) := T^n x$. Otteniamo così applicazioni $\varphi : \mathbb{N} \times X \longrightarrow X$, $\varphi_n : X \longrightarrow X$ e $\varphi_x : \mathbb{N} \longrightarrow X$.
Poniamo poi

$$\varphi(K, A) := \bigcup_{n \in K} \varphi_n(A) = \{T^n x \mid n \in K, x \in A\}$$

$$\varphi^{-1}(K, A) := \bigcup_{n \in K} \varphi_n^{-1}(A) = \{y \in X \mid \text{ esiste } n \in K \text{ con } T^n y \in A\}$$

In particolare

$$\varphi^{-1}(n, A) := \varphi_n^{-1}(A) := \{y \in X \mid T^n y \in A\}$$
$$\varphi^{-1}(n, x) := \{y \in X \mid T^n y = x\}$$

Definizione 7.4. L'insieme $\varphi(\mathbb{N}, x)$ si chiama *l'orbita* di x, $\varphi(\mathbb{Z}, x) := \varphi(\mathbb{N}, x) \bigcup \varphi^{-1}(\mathbb{N}, x)$ *l'orbita bilaterale* di x.

Definizione 7.5. Poniamo

$$\omega(x) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi(\mathbb{N} + k, x)}$$
$$\alpha(x) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{N} + k, x)}$$
$$\omega(X) := \bigcup_{x \in X} \omega(x)$$
$$\alpha(X) := \bigcup_{x \in X} \alpha(x)$$

Osservazione 7.6.

(1) $y \in \omega(x)$ *se e solo se per ogni* $U \in \mathcal{U}(y)$ *e per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *esiste* $n \geq k$ *tale che* $T^n x \in U$.

(2) $y \in \alpha(x)$ *se e solo se per ogni* $U \in \mathcal{U}(y)$ *e per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *esistono* $n \geq k$ *e* $z \in U$ *tali che* $T^n z = x$.

Proposizione 7.7. *Gli insiemi* $\alpha(x)$ *e* $\omega(x)$ *sono chiusi e invarianti.*

Dimostrazione. $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ sono insiemi chiusi perchè intersezioni di insiemi chiusi. Per dimostrare che $\omega(x)$ è invariante, si osserva che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$T\overline{\varphi(\mathbb{N}+k,x)} \subset \overline{T\varphi(\mathbb{N}+k,x)} = \overline{\varphi(\mathbb{N}+k+1,x)} \subset \omega(x)$$

utilizzando nella prima inclusione la continuità di T.

Anche $\alpha(x)$ è invariante, infatti per $k \geq 1$, si ha

$$T\overline{\varphi^{-1}(\mathbb{N}+k,x)} \subset \overline{T\varphi^{-1}(\mathbb{N}+k,x)} = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{N}+k-1,x)} \subset \alpha(x).$$

Definizione 7.8. x è chiamato *ricorrente* se $x \in \omega(x)$. Per l'osservazione 7.6 ciò significa che per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq k$ tale che $T^n x \in U$. Denotiamo $R(X,T)$ l'insieme dei punti ricorrenti.

Osservazione 7.9. $\omega(Tx) = \omega(x)$ *e* $\alpha(Tx) = \alpha(x)$.

Dimostrazione. Siccome $\varphi(\mathbb{N}+1,x) \subset \varphi(\mathbb{N},x)$ abbiamo

$$\omega(x) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi(\mathbb{N}+k,x)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\varphi(\mathbb{N}+k,x)} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi(\mathbb{N}+k,Tx)} = \omega(Tx).$$

Nello stesso modo si vede che $\alpha(Tx) = \alpha(x)$.

Osservazione 7.10. $R(X,T)$ *un insieme invariante.*

Dimostrazione. Sia $x \in R(X,T)$, cioè $x \in \omega(x)$. Per la proposizione 7.7 e l'osservazione 7.9 abbiamo $Tx \in \omega(x) = \omega(Tx)$.

Definizione 7.11. Un punto x è detto *non vagante* (in inglese *non wandering*) se per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ si ha $U \bigcap \varphi^{-1}(\mathbb{N}+1,U) \neq \emptyset$. Altrimenti x si chiama *vagante*. Indicheremo con $N(X,T)$ l'insieme dei punti non vaganti.

Proposizione 7.12.

(1) $N(X,T)$ *è chiuso e invariante.*

(2) $N(X,T)$ *contiene* $\omega(x)$ *e* $\alpha(x)$ *per ogni* $x \in X$.

Dimostrazione.

(1) Per dimostrare che $N(X,T)$ è chiuso, dimostriamo che l'insieme dei punti vaganti è aperto.
Sia $x \in X \setminus N(X,T)$. Allora esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \bigcap \varphi^{-1}(\mathbb{N}+1,U) = \emptyset$. Ma U è intorno di ogni suo punto e quindi $U \subset X \setminus N(X,T)$. Ciò mostra che $N(X,T)$ è aperto.
Dimostriamo ora che $N(X,T)$ è invariante. Siano $x \in N(X,T)$ e $V \in \mathcal{U}(Tx)$. Allora per la continuità di T esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $TU \subset V$. Per ipotesi $U \bigcap \varphi^{-1}(\mathbb{N}+1,U) \neq \emptyset$. Ciò significa che

esistono $y \in U$ e $n > 0$ tali che $T^n y \in U$. Per la scelta di U abbiamo $Ty \in V$ e $T^n Ty = TT^n y \in V$, per cui $Ty \in V \bigcap \varphi^{-1}(\mathbb{N}+1, V) \neq \emptyset$. Questo insieme è perciò non vuoto.

(2) Siano $y \in \omega(x)$ e $U \in \mathcal{U}(y)$.
Siccome $y \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi(\mathbb{N}+k, x)}$, in primo luogo esiste $k \geq 0$ tale che $z := T^k x \in U$. Poi esiste però anche $n \geq k+1$ tale che $T^n z = T^{n-k} T^k z \in U$ con $n - k \geq 1$, per cui $z \in U \bigcap \varphi^{-1}(\mathbb{N}+1, U)$

Nello stesso modo si dimostra che $\alpha(x) \subset N(X,T)$.

Proposizione 7.13. $\overline{R(X,T)} \subset N(X,T)$.

Dimostrazione. Sia $x \in R(X,T)$. Allora $x \in \omega(x) \subset N(X,T)$, cosicchè vediamo che $R(X,T) \subset N(X,T)$. Perciò $\overline{R(X,T)} \subset \overline{N(X,T)} = N(X,T)$, poichè dalla proposizione 7.12 sappiamo che $N(X,T)$ è chiuso.

Lemma 7.14. *Se $y \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ e $z \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, y)}$, allora $z \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{U}(z)$, allora $U \bigcap \overline{\varphi(\mathbb{N}, y)} \neq \emptyset$.

Poichè $y \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ implica $\overline{\varphi(\mathbb{N}, y)} \subset \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$, allora anche $U \bigcap \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)} \neq \emptyset$.

Definizione 7.15. Un sottoinsieme A di X si dice *minimale* se A è chiuso, non vuoto e invariante e tale che ogni sottoinsieme invariante, chiuso e non vuoto di A coincide con A.

Il sistema dinamico $X = (X,T)$ si dice *minimale*, se X stesso è un insieme minimale.

Teorema 7.16. *X contiene un insieme minimale.*

Dimostrazione. La dimostrazione utilizza il lemma di Zorn. Sia $\mathcal{C}$ l'insieme dei sottoinsiemi chiusi, non vuoti e invarianti di X con l'ordine parziale dato dall'inclusione. Poichè $X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ non è vuoto. Sia $\mathcal{K}$ una catena di $\mathcal{C}$. Allora ogni intersezione finita di insiemi di $\mathcal{K}$ è non vuota, quindi dalla compattezza di X discende che $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \emptyset$. Perciò, grazie al lemma di Zorn, possiamo concludere che $\mathcal{C}$ contiene un elemento minimale rispetto all'inclusione insiemistica che evidentemente è un insieme minimale nel senso della definizione 7.15.

Definizione 7.17. Un sottoinsieme K di $\mathbb{N}$ si dice *relativamente denso*, se esiste un $d \in \mathbb{N}$ tale che $[n, n+d] \bigcap K \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 7.18. Un punto $x \in X$ si dice *quasiperiodico* se per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ l'insieme $\varphi_x^{-1}(U) := \{n \in \mathbb{N} \mid T^n x \in U\}$ è relativamente denso.

Osservazione 7.19. *Per $x \in X$, $U \subset X$, $K \subset \mathbb{N}$ sono equivalenti:*

(1) $\varphi_x^{-1}(U) \bigcap (K+n) \neq \emptyset$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\varphi(K+n,x)\bigcap U \neq \emptyset$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.
(3) $\varphi(\mathbb{N},x) \subset \varphi^{-1}(K,U)$.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi esiste $k \in K$ con $k+n \in \varphi_x^{-1}(U)$, cioè tale che $T^{n+k}x \in U$. Ma $T^{n+k}x \in \varphi(K+n,x)$.

(2) $\implies$ (3): Sia $y \in \varphi(\mathbb{N},x)$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $T^n x = y$. L'ipotesi (2) implica che esiste $k \in K$ con $T^{n+k}x \in U$, e ciò significa che $T^k y \in U$.

(3) $\implies$ (1): Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste $k \in K$ con $T^k T^n x \in U$. Ciò significa $n+k \in \varphi_x^{-1}(U)$.

Lemma 7.20. *Sono equivalenti:*

(1) *X è minimale.*
(2) $\overline{\varphi(\mathbb{N},x)} = X$ *per ogni* $x \in X$.
(3) *Per ogni aperto* $U \neq \emptyset$ *di* X *vale* $\varphi^{-1}(\mathbb{N},U) = X$.
(4) *Per ogni aperto* $U \neq \emptyset$ *di* X *esiste un sottoinsieme finito* F *di* $\mathbb{N}$ *con* $\varphi^{-1}(F,U) = X$.
(5) *Per ogni aperto* $U \neq \emptyset$ *di* X *esiste un sottoinsieme finito* F *di* $\mathbb{N}$ *con* $\varphi(F,x)\bigcap U \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in X$.

Dimostrazione. (1) $\iff$ (2): Ovvio, perché $\overline{(\mathbb{N},x)}$ è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e invariante di X.

(2) $\implies$ (3): Chiaro.

(3) $\implies$ (4): Per ipotesi $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{-1}(U)$. Per la continuità di T per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'unione $\varphi_n^{-1}(U) = (T^n)^{-1}(U)$ è aperto. Abbiamo perciò un ricoprimento aperto di X, che per la compattezza di X possiede un sottoricoprimento finito di X. Esiste un insieme finito $F \subset \mathbb{N}$ tale che $\varphi^{-1}(F,U) = X$.

(4) $\implies$ (3): Ovvio.

(4) $\iff$ (5) Chiaro.

Lemma 7.21. *Per* $x \in X$ *sono equivalenti:*

(1) $\overline{\varphi(\mathbb{N},x)}$ *è minimale.*
(2) $y \in \overline{\varphi(\mathbb{N},x)} \implies x \in \overline{\varphi(\mathbb{N},y)}$.
(3) *Per ogni* $U \in \mathcal{U}(x)$ *vale* $\overline{\varphi(\mathbb{N},x)} \subset \varphi^{-1}(\mathbb{N},U)$.
(4) *Per ogni* $U \in \mathcal{U}(x)$ *esiste un sottoinsieme finito* F *di* $\mathbb{N}$ *con* $\overline{\varphi(\mathbb{N},x)} \subset \varphi^{-1}(F,U)$.
(5) *Per ogni* $U \in \mathcal{U}(x)$ *esiste un sottoinsieme finito* F *di* $\mathbb{N}$ *con* $\varphi(\mathbb{N},x) \subset \varphi^{-1}(F,U)$.
(6) *Per ogni* $U \in \mathcal{U}(x)$ *esiste un sottoinsieme finito* F *di* T *con* $\varphi(F+n,x)\bigcap U \neq \emptyset$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. (1) $\iff$ (2): Ovvio.

(3) $\iff$ (4): $\overline{\varphi(\mathbb{N},x)}$ è compatto.

(4) $\implies$ (5): Ovvio.

(5) $\implies$ (4): Sia $U \in \mathcal{U}(x)$. X è compatto e di Hausdorff, quindi regolare, perciò esiste un intorno chiuso $V = \overline{V} \in \mathcal{U}(x)$ con $V \subset U$.

Per ipotesi esiste un sottoinsieme finito $F \subset T$ con $\varphi(\mathbb{N}, x) \subset \varphi^{-1}(F, U)$, perciò

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(\mathbb{N}, x)} \subset \overline{\varphi^{-1}(F, U)} &= \overline{\bigcup_{n \in F} \varphi_n^{-1}(V)} \\ &\overset{1}{=} \bigcup_{n \in F} \varphi_n^{-1}(V) \overset{2}{=} \varphi^{-1}(F, V) \subset \varphi^{-1}(F, U).\end{aligned}$$

$\overset{1}{=}$ vale perché F è finito, $\overset{2}{=}$ per la continuità di T.

(5) $\iff$ (6): Osservazione 7.19.

Teorema 7.22. *$\overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ è minimale se e solo se x è un punto quasiperiodico.*

<u>Dimostrazione.</u> La condizione (6) del lemma 7.21 è soddisfatta se e solo se $\varphi^{-1} - x(U)$ è relativamente denso.

Corollario 7.23. *x sia quasiperiodico. Allora ogni punto di $\overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ è quasiperiodico.*

<u>Dimostrazione.</u> Dal teorema 7.22 discende che $\overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ è minimale e per il lemma 7.20 $\overline{\varphi(\mathbb{N}, x)} = \overline{\varphi(\mathbb{N}, y)}$ per ogni $y \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ e quindi sempre per il teorema 7.22 y è quasiperiodico.

Corollario 7.24. *Se X è minimale, allora ogni punto di X è quasiperiodico.*

Corollario 7.25. *X contiene un punto quasiperiodico.*

<u>Dimostrazione.</u> Per il teorema 7.15 X contiene un sottoinsieme minimale Y. Y è non vuoto per definizione e ogni suo punto è quasiperiodico.

Osservazione 7.26. *A e B siano sottoinsiemi minimali di X. Se $A \bigcap B \neq \emptyset$, allora $A = B$.*

<u>Dimostrazione.</u> Sia $x \in A \bigcap B$. Per il lemma 7.20 abbiamo $A = \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)} = \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)} = B$.

Teorema 7.27. *Sono equivalenti:*

(1) Ogni punto di X è quasiperiodico.

(2) Le chiusure d'orbita dei punti di X formano una partizione di X.

<u>Dimostrazione.</u> (1) $\implies$ (2): È chiaro che $X = \bigcup_{x \in X} \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$.
Se ogni punto è quasiperiodico, tutte le chiusure d'orbita sono minimali e dall'osservazione 7.26 segue che esse formano una partizione.

(2) $\implies$ (1): Siano $x \in X$ ed $y \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$. Allora $\overline{\varphi(\mathbb{N}, y)} \subset \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ per il lemma 7.14. L'ipotesi che le chiusure d'orbita formino una partizione

implica che $\overline{\varphi(\mathbb{N}, y)} = \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$ e quindi $x \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, y)}$. Vediamo che x soddisfa la condizione (2) del lemma 7.21.

8. IL SISTEMA DINAMICO UNIVERSALE $(\beta\mathbb{N}, \alpha_1)$

Situazione 8.1. $X = (X, T)$ sia un sistema dinamico compatto, $x \in X$.

Nota 8.2. Abbiamo definito l'applicazione $\varphi_x = \bigcirc_n T^n x : \mathbb{N} \longrightarrow X$.
Per il teorema 4.27 abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & \beta\mathbb{N} \arrow[d, "\lim \varphi_x"] \\ & X \end{tikzcd}$$

in cui i è l'inclusione. L'applicazione $\lim \varphi_x$ è continua. Siccome $\varphi_x(n) = T^n x$ per $n \in \mathbb{N}$, per $\ddot{n} \in \mathbb{N}$ poniamo (in leggero contrasto con la definizione 1.11)

$$T^{\ddot{n}} x := \lim \varphi_x(\ddot{n}) = \lim(\bigcirc_n T^n x)(\ddot{n})$$

Proposizione 8.3. *L'applicazione* $\lim \varphi_x$ *è un omeomorfismo di sistemi dinamici* $(\beta\mathbb{N}, \alpha_1) \longrightarrow (X, T)$. *Ciò significa che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \beta\mathbb{N} \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lim \varphi_x"'] & \beta\mathbb{N} \arrow[d, "\lim \varphi_x"] \\ X \arrow[r, "T"] & X \end{tikzcd}$$

è commutativo oppure, più esplicitamente, che $TT^{\ddot{n}} x = T^{\ddot{n}+1} x$ *per ogni* $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$.

<u>Dimostrazione.</u> Siccome tutte le applicazioni che appaiono nel diagramma sono continue, è sufficiente dimostrare che i due rami del diagramma coincidono su $\mathbb{N}$. Per $n \in \mathbb{N}$ abbiamo però

$$T(\lim \varphi_x)(n) = T\varphi_x(n) = TT^n x = T^{n+1} n$$

e

$$(\lim \varphi_x)(\alpha_1(n)) = (\lim \varphi_x)(n+1) = T^{n+1} x$$

Proposizione 8.4. *La chiusura d'orbita di* x *consiste esattamente dei punti* $T^{\ddot{n}} x$ *con* $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$ *e coincide quindi con l'immagine di* $\lim \varphi_x$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) Sia $y \in \overline{\varphi(\mathbb{N}, x)}$. Allora per ogni $U \in \mathcal{U}(y)$ esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $T^{n_U} x \in U$. Sia $E_U := \{n_V \mid V \in \mathcal{U}(y) \text{ con } V \subset U\}$.
È chiaro che allora $T^n x \in U$ per ogni $n \in E_U$. Allora $\{E_U \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$ è un intreccio su $\mathbb{N}$ e quindi esiste $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$ tale che $E_U \in \ddot{n}$ per ogni $U \in \mathcal{U}(y)$.

Dimostriamo che $T^{\ddot{n}} x = y$, cioè che $\varphi_x(\ddot{n}) \longrightarrow y$. Sia infatti $U \in \mathcal{U}(y)$. Dobbiamo dimostrare che $\varphi_x^{-1}(U) \in \ddot{n}$. Ma $E_U \subset \varphi^{-1} x(U)$, perchè, come abbiamo visto, $T^n x \in U$ per ogni $n \in E_U$.

(2) Siano viceversa $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$ ed $y := T^{\ddot{n}}x$, cioè $\varphi_x(\ddot{n}) \longrightarrow y$. È sufficiente dimostrare che $\varphi(\mathbb{N}, x) \in \varphi_x(\ddot{n})$. Ma ciò è chiaro perchè $\varphi(\mathbb{N}, x) = \varphi_x(\mathbb{N})$ ed $\mathbb{N} \in \ddot{n}$.

Teorema 8.5. *Se X è transitivo, in particolare se X è minimale, allora X è immagine omomorfa di $(\beta\mathbb{N}, \alpha_1)$.*

Dimostrazione. Proposizioni 8.3 e 8.4.

Proposizione 8.6. *Siano $x \in X$ ed $\ddot{n}, \ddot{m} \in \beta\mathbb{N}$.*

Allora $T^{\ddot{n}}T^{\ddot{m}}x = T^{\ddot{n}+\ddot{m}}x$.

Dimostrazione. Usiamo la proposizione 6.21 e la nota 1.16 insieme alla continuità delle applicazioni T^n.

$$\begin{aligned} T^{\ddot{n}+\ddot{m}}x &= \lim(\bigcirc_k T^k x)(\ddot{n}+\ddot{m}) \overset{6.21}{=} \lim(\bigcirc_n \lim(\bigcirc_m T^{n+m}x)(\ddot{m}))(\ddot{n}) \\ &\overset{1.16}{=} \lim(\bigcirc_n T^n \lim(\bigcirc_m T^m x)(\ddot{m}))(\ddot{n}) = \\ &= \lim(\bigcirc_n T^n T^{\ddot{m}} x)(\ddot{n}) = T^{\ddot{n}}T^{\ddot{m}}x. \end{aligned}$$

Nota 8.7. Le applicazioni $T^{\ddot{n}} : X \longrightarrow X$ definite per $\ddot{n} \in \beta\mathbb{N}$ in genere non sono continue, così come non è continua l'applicazione

$$\begin{aligned} &\beta\mathbb{N} \times X \longrightarrow X \\ &(\ddot{n}, x) \longmapsto T^{\ddot{n}}x \end{aligned}$$

Nonostante ciò si può sviluppare una teoria algebrica profonda del monoide $\beta\mathbb{N}$ che, in virtù del teorema 8.5, mostra che la teoria dei sistemi dinamici compatti è interamente contenuta nella struttura del monoide $(\beta\mathbb{N}, +)$.

BIBLIOGRAFIA

N. Bhatia/G. Szegó: Stability theory of dynamical systems.
Springer 2002.

A. Blass: Ultrafilters - where topological dynamics = algebra = combinatorics. Top. Proc. 18(1993),33-56

M. Brin/G. Stuck: Introduction to dynamical systems.
Cambridge UP 2002.

W. Comfort: Ultrafilters - some old and some new results.
Bull. AMS 83 (1977), 471-455.

M. Denker: Einführung in die Analysis dynamischer Systeme.
Springer 2005.

E. van Douwen: The Stone-Čech compactification of a discrete groupoid.
Top. Appl. 39 (1991), 43-60.

D. Ellis/R. Ellis/M. Nerurkar: The topological dynamics of semigroup actions. Trans. AMS 353 (2000), 1297-1320.

R. Ellis: Lectures on topological dynamics. Benjamin 1969.

R. Engelking: General topology. Heldermann 1989.

H. Furstenberg: Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton UP 1981.

R. Goldblatt: Lectures on the hyperreals. Springer 1998.

W. Gottschalk/G. Hedlund: Topological dynamics. AMS 1968.

N. Hindmann/D. Strauss: Algebra in the Stone-Čech compactification. De Gruyter 1998.

M. Katětov: A theorem of mappings.
Comm. Math. Univ. Carolinae 8 (1967).

D. Landers/L. Rogge: Nichtstandard–Analysis. Springer 1994.

A. Robbinson: Non–standard analysis. Princeton UP 1996.

S. Willard: General topology. Dover 2004.