# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**

Corso di Laurea Triennale in
MATEMATICA

# LEGAMI STOCASTICI, T-NORME E LOGICA FUZZY

Relatore:
**Chiar.mo Prof.**
**Josef Eschgfäller**

Laureanda:
**Monica Gazzetta**

Anno Accademico 2006-2007

# Indice

# Introduzione

L'argomento di questa tesi sono due classi di funzioni binarie aventi valori nell'intervallo unitario, i *legami stocastici* e le *t-norme*, nate originariamente nell'ambito della teoria degli spazi metrici probabilistici, su cui si basano matematicamente la *logica fuzzy* e, in misura sempre maggiore, la recente teoria dei *rischi collegati* in matematica finanziaria e attuariale.

Nel primo capitolo vengono descritte le distribuzioni di probabilità multivariate, nel secondo i legami stocastici con alcune delle loro proprietà algebriche fondamentali.

Il *teorema di Sklar*, presentato in modo dettagliato nel terzo capitolo, permette di ottenere ogni distribuzione di probabilità multivariata dalle sue distribuzioni marginali attraverso un legame stocastico. In questo modo si possono studiare in modo sistematico forme molto generali di dipendenza, ad esempio di rischi.

Nel quarto capitolo si danno le definizioni di t-norma e si studiano alcuni tipi fondamentali di t-norme. Nella logica fuzzy le t-norme sono usate per modellare l'intersezione di insiemi sfumati.

Nel capitolo 5 sono definite le *t-conorme* (o s-norme), ovvero le applicazioni duali alle t-norme. Esse nella logica fuzzy sono usate per definire l'unione di insiemi sfumati.

Nel capitolo 7 facciamo vedere come ogni t-norma continua ed archimedea possa essere ottenuta da una *generatrice*, trattando in un primo tempo il caso di t-norme cancellative ed in un secondo quello generale. Le proprietà di unicità delle generatrici sono argomento del capitolo ottavo. Il capitolo 9 contiene rappresentazioni grafiche di molte t-norme e delle loro generatrici.

Mediante le generatrici si possono costruire numerose famiglie di t-norme: nei capitoli 12 e 13 otteniamo così le *t-norme di Frank* e le *t-norme di Yager*, molto popolari nelle applicazioni.

La teoria degli insiemi sfumati (presentata nel capitolo 10) e la logica fuzzy sono state introdotte da Lotfi Zadeh nel 1965. La logica fuzzy, di cui alcuni principi base sono discussi nel capitolo 11, viene applicata soprattutto nel controllo automatico. Ne diamo alcuni esempi nel capitolo 15, in cui viene anche definito il concetto di *sistema di regole fuzzy*. Alla fine del capitolo facciamo vedere come la logica fuzzy rientra in un argomento classico della matematica astratta, la ricomposizione (in questo caso approssimata) di una funzione globale da dati locali.

Per la modellazione delle funzioni di appartenenza usiamo alcune tecniche di composizione di funzioni, presentate con dettaglio nel capitolo 14, e le trasformazioni di Möbius dell'intervallo unitario, introdotte all'inizio del capitolo 15.

# I. LEGAMI STOCASTICI E T-NORME

## 1. Distribuzioni di probabilità multivariate

**Situazione 1.1.** Denotiamo con $\mathbb{R}_m$ l'insieme dei vettori riga reali di dimensione m. Per $a \in \mathbb{R}_m$ denotiamo con $a_i$ l'i-esima componente di a, quando non indicato diversamente. Per uno spazio topologico $X$ sia $\mathrm{borel(X)}$ la $\sigma$-algebra generata dagli aperti di $X$. Per i concetti specifici del calcolo delle probabilità rimandiamo ad esempio a Tucker; per un'esposizione più elementare a Dall'Aglio.

Per $a, b \in \mathbb{R}_m$ scriviamo $a \le b$ se $a_i \le b_i$ per ogni $i$. Poniamo:

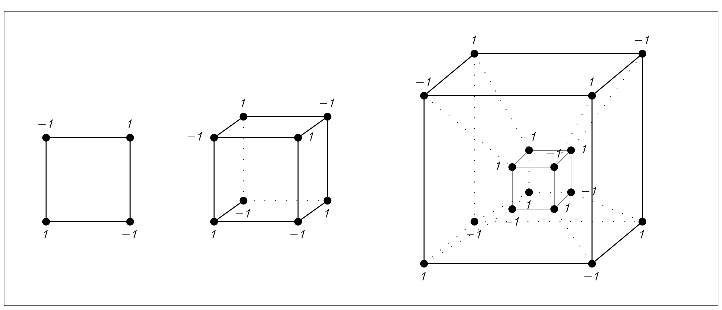
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R}_m \mid a \le x \le b\} = [a_i, b_i] \times ... \times [a_m, b_m].$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R}_m \mid a_i \le x \le b_i \text{ per ogni } i\} = (a_i, b_i] \times ... \times (a_m, b_m].$$
$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R}_m \mid x \le a\}.$$

Evidentemente $[a,b] \neq \emptyset \iff a \le b$ e $(a,b] \neq \emptyset \iff a_i \le b_i$ per ogni $i$.

**Definizione 1.2.** Siano $a, b \in \mathbb{R}_m$ con $a \le b$. I vertici dell'intervallo $[a,b]$ sono allora i punti $v \in \mathbb{R}_m$, per cui $v_i \in [a_i, b_i]$ per ogni $i$. Denotiamo con $\mathrm{vertici(a,b)}$ l'insieme dei vertici di $[a,b]$. Il segno $\mathrm{sgn(v|a,b)}$ di un vertice $v$ in $[a,b]$ è definito nel modo seguente:

$$\mathrm{sgn}(v|a,b) := \begin{cases} 1 & \text{se } |\{i \mid v_i = a_i\}| \text{ è pari} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti in particolare che $\mathrm{sgn}(a|a,b) = (-1)^m$ e che $\mathrm{sgn}(b|a,b)) = 1$.
È anche chiaro che due vertici adiacenti hanno sempre segno opposto.

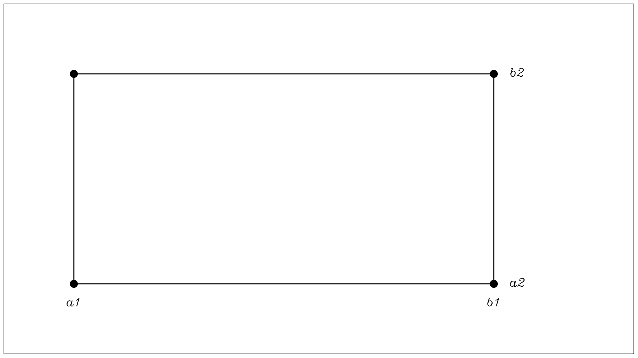


**Definizione 1.3.** Siano $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione ed $a, b \in \mathbb{R}_m$ con $a \le b$. Definiamo

$$\mathrm{Vol}([a,b], F) := \sum_{v \in vertici(a,b)} \mathrm{sgn}(v|a,b) F(v)$$

Un'esposizione dettagliata delle proprietà di questo operatore si trova in Elstrodt, pagg. 44-48, Renyi, pag. 149, Dall'Aglio, pagg. 90-95.

**Osservazione 1.4.** Si noti che per il semplice prodotto numerico $F(x_1, ..., x_m) := x_1 \cdots x_m$ l'espressione $\mathrm{Vol}([a, b], F)$ coincide proprio con il volume $(b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$ dell'intervallo dato. Infatti questo prodotto è una somma di fattori della forma $\pm v_1, \ldots, \pm v_m$ con $v_j \in \{a_j, b_j\}$ in cui il segno è $-1$ se e solo se il numero degli $a_j$ è dispari:




$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = b_1 b_2 - b_1 a_2 - a_1 b_2 + a_1 a_2$$

Similmente

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = {} & b_1 b_2 b_3 - b_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 b_3 + b_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 \\ & + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 - a_1 a_2 a_3\end{aligned}$$

**Definizione 1.5.** Una funzione $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *geometricamente crescente*, se per ogni $a, b \in \mathbb{R}_m$ con $a \leq b$ si ha che $\mathrm{Vol}([a, b], F) \geq 0$.

**Definizione 1.6.** $(\Omega, A, p)$ sia uno spazio di probabilità ed $X = (X_1, ..., X_n)$ una variabile aleatoria con valori in $\mathbb{R}_m$ definiti in esso, cioè una funzione $\mathcal{A}$-$\mathrm{borel}(\mathbb{R}_m)$-misurabile $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_m$. La distribuzione di probabilità di $X$ è allora la funzione $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(a) := p(X \leq a)$$

dove utilizziamo, come d'uso, le abbreviazioni $p(X \leq a) = p((X \leq a))$ e $(X \leq a) = \{w \in \Omega \mid X(w) \leq a\}$.

Scriveremo anche $p(X_1 \leq a_1, ..., X_m \leq a_m) := p(X \leq a)$.

**Definizione 1.7.** Una funzione $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *continua a destra*, se per ogni $a \in \mathbb{R}_m$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}_m$ con $x \geq a$ e $|a - x| < \delta$ si abbia $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$.

**Definizione 1.8.** Una funzione $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ si chiama una *funzione di distribuzione* (o per il teorema 1.9, una *distribuzione di probabilità*), se possiede le seguenti proprietà:

(1) $0 \leq F \leq 1$.
(2) $F$ è continua a destra.

(3) Per ogni $i \in \{1, ..., m\}$ la funzione $\underset{t}{\bigcirc} F(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_m)$ è crescente.

(4) Per ogni $i \in \{1, ..., m\}$ si ha $\lim\limits_{t \to -\infty} (a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_m) = 0$.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
$x \to \infty$ significa naturalmente $x_1 \to \infty, ..., x_m \to \infty$.

(6) $F$ è geometricamente crescente.

**Teorema 1.9.** *Per una funzione $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ sono equivalenti:*

*(1) $F$ è una funzione di distribuzione.*

*(2) Esistono uno spazio di probabilità $(\Omega, A, p)$ e una variabile aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_m$ tali che $F$ coincide con la distribuzione di probabilità di $X$.*

*(3) Esiste una misura di probabilità $p$ su $\mathrm{borel}(\mathbb{R}_m)$ tale che $F(a) = p((-\infty, a])$ per ogni $a \in \mathbb{R}_m$.*

Dimostrazione. Elstrodt, pagg. 61-62, Tucker, pagg. 26-27.

**Osservazione 1.10.** $p$ sia una misura di probabilità su $\mathrm{borel}(\mathbb{R}_m)$ ed $F : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(a) := p((-\infty, a])$. Allora con $\Omega := \mathbb{R}_m$ possiamo considerare l'identità $I : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}$ come variabile aleatoria e siccome $(I \leq a) = (-\infty, a]$ vediamo che $F$ è la distribuzione di probabilità di $I$.

# 2. Legami stocastici

**Nota 2.1.** A differenza del capitolo precedente, $a, b, c, d$ da ora in avanti saranno in genere gli elementi di $[0,1]$. Per funzioni $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ useremo spesso la notazione operazionale, in preferenza il simbolo $\otimes$ (che quindi non denota un prodotto tensoriale).

**Definizione 2.2.** Una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ si dice *crescente in ogni suo argomento*, se per $a, b, c, d \in [0,1]$ valgono le implicazioni

$$a \le c \Longrightarrow a \otimes d \le c \otimes d$$
$$b \le d \Longrightarrow a \otimes b \le a \otimes d$$

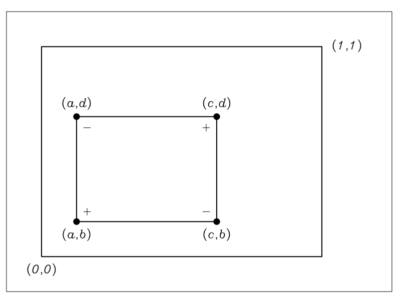
**Osservazione 2.3.** La funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia crescente in ogni suo argomento. Siano $a, b, c, d \in [0,1]$ con $a \le c$ e $b \le d$.
Allora $a \otimes b \le c \otimes d$.

Dimostrazione. Infatti $a \otimes b \le a \otimes d \le c \otimes d$.

**Definizione 2.4.** In analogia con la definizione 1.8 una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ si dice *geometricamente crescente*, se per $a, b, c, d \in [0,1]$ vale l'implicazione

$$a \le c \text{ e } b \le d \Longrightarrow a \otimes b + c \otimes d - a \otimes d - c \otimes b \ge 0$$

Con la notazione della definizione 1.8 la condizione può essere scritta nella forma $\mathrm{Vol}([a,c] \times [b,d], \otimes) \ge 0$.




**Definizione 2.5.** Un *legame stocastico* (o più brevemente un *legame*) è una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$.
$a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ per ogni $a \in [0,1]$.
(2) $\otimes$ è geometricamente crescente.

Nella letteratura inglese si usa il termine *copula* proposto da Sklar nel 1959. Come vedremo nel prossimo capitolo, ogni coppia $X, Y$ di variabili aleatorie reali può essere legata da un legame $\otimes$ nel senso che

$$p(X \le u, Y \le v) = p(X \le u) \otimes p(Y \le v)$$

per ogni $u, v \in \mathbb{R}$.

**Definizione 2.6.** Un *semilegame* (in inglese *semicopula*) è una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$ per ogni $a \in [0,1]$.
(2) $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento.

**Osservazione 2.7.** Ogni legame è un semilegame.

Dimostrazione. Sia $\otimes$ un legame. Dobbiamo dimostrare che $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento. Siano $a, c, d \in [0,1]$ con $a \leq c$.
Siccome $\otimes$ è geometricamente crescente e $0 \leq d$ abbiamo
$a \otimes 0 + c \otimes d - a \otimes d - c \otimes 0 \geq 0$, per cui $a \otimes d \leq c \otimes d$.
Nello stesso modo si dimostra la seconda disuguaglianza nella definizione 2.2.

**Osservazione 2.8.** $\otimes$ sia un semilegame. Allora
$a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ per ogni $a \in [0,1]$.

Dimostrazione. Infatti $0 \leq a \otimes 0 \leq 1 \otimes 0 = 0$ e nello stesso modo si dimostra che $0 \otimes a = 0$.

**Definizione 2.9.** Una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ si dice *1-Lipschitz*, se

$$|c \otimes d - a \otimes b| \leq |c - a| + |d - b|$$

per ogni $a, b, c, d \in [0,1]$.

**Osservazione 2.10.** Per una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sono equivalenti:

(1) $\otimes$ è 1-Lipschitz.
(2) $|c \otimes d - a \otimes d| \leq |c - a|$
$|a \otimes d - a \otimes b| \leq |d - b|$ per ogni $a, b, c, d \in [0,1]$.

Dimostrazione. $(1) \Longrightarrow (2)$: Prendendo $b = d$ nella definizione 2.9 abbiamo $|c \otimes d - a \otimes d| \leq |c - a| + |d - d| = |c - a|$. Nello stesso modo otteniamo la seconda disuguaglianza.

$(2) \Longrightarrow (1)$: $|c \otimes d - a \otimes b| \leq |c \otimes d - a \otimes d| + |a \otimes d - a \otimes b| \leq |c - a| + |d - b|$.

**Lemma 2.11.** *Per una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sono equivalenti:*

*(1) $\otimes$ è 1-Lipschitz e crescente in ogni suo argomento.*
*(2) Per $a, b, c, d \in [0,1]$ vale l'implicazione*
$a \leq c$ e $b \leq d \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq c \otimes d - a \otimes b \leq c - a + d - b$
*(3) Per $a, b, c, d \in [0,1]$ valgono le implicazioni*
$a \leq c \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq c \otimes d - a \otimes d \leq c - a$
$b \leq d \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq a \otimes d - a \otimes b \leq d - b$

Dimostrazione. $(1) \Longrightarrow (2)$: Dall'osservazione 2.3 abbiamo
$0 \leq c \otimes d - a \otimes b \leq |c - a| + |d - b| = c - a + d - b$.

$(2) \implies (3)$: La prima implicazione segue da (2) ponendo $b = d$, la seconda ponendo $c = a$.

$(3) \implies (1)$: È chiaro che l'ipotesi implica che $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento. Siano $a, b, c, d \in [0,1]$, ad esempio $a \le c$ e $b \le d$. Allora $0 \le c \otimes d - a \otimes d \le c - a$ e $0 \le a \otimes d - a \otimes b \le d - b$ e quindi anche $|c \otimes d - a \otimes d| \le |c - a|$ e $|a \otimes d - a \otimes b| \le |d - b|$.

Per l'osservazione 2.10 ciò implica che $\otimes$ è 1-Lipschitz.

**Osservazione 2.12.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia 1-Lipschitz. Allora $\otimes$ è continua.

**Definizione 2.13.** Un *quasilegame* (in inglese *quasicopula*) è una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) $\otimes$ è un semilegame.
(2) $\otimes$ è 1-Lipschitz.

Ciò implica in particolare che $\otimes$ è continua e soddisfa le condizioni equivalenti del lemma 2.11.

Il concetto di quasilegame risale al lavoro di Alsina/Nelsen/Schweizer; la definizione che qui adottiamo, molto più semplice della definizione originale (cfr. teorema 2.24), è dovuta a Genest e.a.

**Proposizione 2.14.** *Ogni legame è un quasilegame.*

Dimostrazione. $\otimes$ sia un legame.

(1) Sappiamo dall'osservazione 2.7 che $\otimes$ è un semilegame.

(2) Dimostriamo che $\otimes$ è 1-Lipschitz. Per simmetria è sufficiente dimostrare la prima disuguaglianza nel punto (3) del lemma 2.11 che dimostriamo con $b$ al posto di $d$. Siano $a, b, c \in [0,1]$ con $a \le c$. Per ipotesi $\otimes$ è geometricamente crescente quindi, essendo $b \le 1$, abbiamo $a \otimes b + c \otimes 1 - a \otimes 1 - c \otimes b \ge 0$, ovvero $c - a \ge c \otimes b - a \otimes b \overset{(1)}{\ge} 0$.

**Osservazione 2.15.** Dalle definizioni e dai risultati precedenti si vede che un legame è essenzialmente la stessa cosa come la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria con valori in $[0,1]^2$, le cui distribuzioni marginali sono uniformi.

**Osservazione 2.16.** Le seguenti funzioni $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sono legami:

$$\min := \bigcirc_{(x,y)} \min(x,y)$$

$$T_P := \bigcirc_{(x,y)} xy \qquad \text{(legame prodotto)}$$

$$T_L := \bigcirc_{(x,y)} \max(x+y-1, 0) \qquad \text{(legame di Lukasiewicz).}$$

Dimostrazione. È chiaro che le tre funzioni sono semilegami. Dobbiamo dimostrare che esse sono geometricamente crescenti.
Siano $x, y, u, v \in [0,1]$ con $x \le u$ e $y \le v$.

(1) Consideriamo in primo luogo la funzione $\min$. Sia $x \leq y$. Allora
$\min(x,y) + \min(u,v) - \min(x,v) - \min(u,y) =$
$x + \min(u,v) - x - \min(u,y) \geq 0$.

Sia invece $y \leq x$. Allora
$\min(x,y) + \min(u,v) - \min(x,v) - \min(u,y) =$
$y + \min(u,v) - \min(x,v) - y \geq 0$.

(2) Consideriamo ora la funzione $T_P$. Abbiamo
$xy + uv - xv - uy = (u-x)(v-y) \geq 0$
essendo entrambi i fattori $\geq 0$.

(3) Infine consideriamo la funzione $T_L$. Sia
$A := \max(x+y-1,0) + \max(u+v-1,0) - \max(x+v-1,0)$
$-\max(u+y-1,0)$.

Se $x+v \leq 1$, allora $x+y \leq 1$ ed $A = \max(u+v-1,0) - \max(u+y-1,0) \geq 0$;
similmente anche $u+y \leq 1$ implica $A \geq 0$.
Siano invece $x+v > 1$ e $u+y > 1$. Ciò implica $u+v > 1$, per cui
$A = \max(x+y-1,0) + u+v-1-(x+v-1)-(u+y-1) =$
$\max(x+y-1,0) + 1 - (x,y) \geq x+y-1+1-(x+y) = 0$.

**Proposizione 2.17.** *$\otimes$ sia un quasilegame ed $a, b \in [0,1]$.*
*Allora $\max(a+b-1,0) \leq a \otimes b \leq \min(a,b)$.*

Dimostrazione. (1) Per il lemma 2.11 vale $1 \otimes 1 - a \otimes b \leq 1 - a + 1 - b$ e quindi $a+b-1 \leq a \otimes b$. Però $a \otimes b \geq 0$, cosicchè $\max(a+b-1,0) \leq a \otimes b$.

(2) $a \otimes b \leq a \otimes 1 = a$ e similmente $a \otimes b \leq b$.

**Lemma 2.18.** *$\otimes$ sia un quasilegame.*

(1) *Siano $a, c \in [0,1]$ con $a \leq c$.*
*Allora esiste $u \in [0,1]$ tale che $a = u \otimes c$.*
(2) *Siano $b, d \in [0,1]$ con $b \leq d$.*
*Allora esiste $v \in [0,1]$ tale che $b = d \otimes v$.*

Dimostrazione.

(1) Siccome $\otimes$ è continua, è continua anche l'applicazione $f := \underset{x}{\bigcirc} x \otimes c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Questa applicazione è anche monotona e siccome $f(0) = 0 \otimes c = 0$, $f(1) = 1 \otimes c = c$, per il teorema del valor medio esiste un numero $u \in [0,1]$ tale che $a = f(u)$.
(2) Nello stesso modo.

**Proposizione 2.19.** *Un quasilegame associativo è un legame.*

Dimostrazione. $\otimes$ sia un quasilegame associativo ed $a, b, c, d \in [0,1]$ con $a \leq c$ e $b \leq d$.

Dobbiamo dimostrare che $a \otimes b + c \otimes d \geq a \otimes d + c \otimes b$ (*).

Per il lemma 2.18 esiste $v \in [0,1]$ tale che $b = d \otimes v$.
Utilizzando l'associatività di $\otimes$ abbiamo

$$c\otimes b - a\otimes b = c\otimes(d\otimes v) - a\otimes(d\otimes v) = (c\otimes d)\otimes v - (a\otimes d)\otimes v \overset{(1)}{\leq} c\otimes d - a\otimes d$$

e ciò è equivalente alla (*). Qui abbiamo usato che $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento e che quindi $c \otimes d \geq a \otimes d$, cosicché dal lemma 2.11 segue la $\overset{(1)}{\leq}$.

**Definizione 2.20.** Una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ si dice *geometricamente crescente sul bordo*, se per ogni $a, b, c, d \in [0,1]$ con $a \leq c$ e $b \leq d$ e tali che almeno uno dei quattro numeri $a, b, c, d$ sia uguale a $0$ o a $1$ (questa condizione significa che il rettangolo corrispondente possiede un lato sul bordo di $[0,1]^2$) si ha $a \otimes b + c \otimes d - a \otimes d - c \otimes b \geq 0$.

**Lemma 2.21.** *Per una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sono equivalenti:*

*(1) $\otimes$ è 1-Lipschitz e crescente in ogni suo argomento.*
*(2) $\otimes$ è geometricamente crescente sul bordo.*

Dimostrazione. (1)$\Longrightarrow$(2): $\otimes$ sia 1-Lipschitz e crescente in ogni suo argomento. Siano $a, b, c, d \in [0,1]$ con $a \leq c$ e $b \leq d$ e tali che almeno uno dei quattro numeri $a, b, c, d$ sia uguale a $0$ o a $1$. Consideriamo quindi separatamente i quattro casi $a = 0$, $c = 1$, $b = 0$ e $d = 1$. Sia $a = 0$. Allora l'espressione $a \otimes b + c \otimes d - a \otimes d - c \otimes b$ diventa $0\otimes b + c\otimes d - 0\otimes d - c\otimes b = c\otimes d - c\otimes b \geq 0$, dato che $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento. Sia $c = 1$. Allora l'espressione $a\otimes b + c\otimes d - a\otimes d - c\otimes b$ diventa $a\otimes b + 1\otimes d - a\otimes d - 1\otimes b = a\otimes b + d - a\otimes d - b \geq 0$, per il terzo punto del lemma 2.11. In maniera analoga si trattano i casi $b = 0$ e $d = 1$. Pertanto $\otimes$ è geometricamente crescente sul bordo.

(2)$\Longrightarrow$(1): $\otimes$ sia geometricamente crescente sul bordo e siano $a, b, c, d \in [0,1]$ con $a \leq c$ e $b \leq d$. Per ipotesi quindi si ha che $a \otimes b + c \otimes d - a \otimes d - c \otimes b \geq 0$. Ponendo prima $a = 0$ e poi $b = 0$ nell'espressione si ottiene rispettivamente $c \otimes d - c \otimes b \geq 0$ e $c \otimes d - a \otimes d \geq 0$, da cui segue che $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento. Ponendo invece $c = 1$ e $d = 1$, otteniamo $a \otimes d - a \otimes b \leq d - b$ e $c \otimes b - a \otimes b \leq c - a$, cioè $|a \otimes d - a \otimes b| \leq |d - b|$ e $|c \otimes b - a \otimes b| \leq |c - a|$. Per l'osservazione 2.10 concludiamo che $\otimes$ è 1-Lipschitz.

**Corollario 2.22.** *Una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ è un quasilegame se e solo se soddisfa le seguenti due condizioni:*

*(1) $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$ per ogni $a \in [0,1]$.*
*(2) $\otimes$ è geometricamente crescente sul bordo.*

**Definizione 2.23.** Una *curva distribuzionale continua* in $[0,1]^2$ è una coppia di applicazioni continue e crescenti $F, G : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tali che $F(0) = G(0) = 0$ e $F(1) = G(1) = 1$.

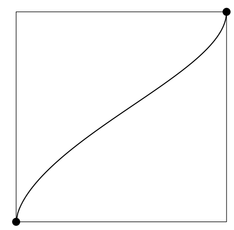
**Teorema 2.24.** *Per una funzione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sono equivalenti:*

*(1) $\otimes$ è un quasilegame.*

*(2) Per ogni curva distribuzionale continua* $(F, G)$ *in* $[0, 1]^2$ *esiste un legame* $\boxtimes$ *tale che* $F(t) \otimes G(t) = F(t) \boxtimes G(t)$ *per ogni* $t \in [0, 1]$.

Dimostrazione. La dimostrazione, piuttosto lunga, si trova in Genest e.a.

**Esempio 2.25.** Il grafico di una curva distribuzionale continua:



$F(t) = \sin \pi t/2 \qquad G(t) = t^{0.6}$

# 3. Il teorema di Sklar

**Situazione 3.1.** Denotiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $[-\infty, \infty]$ con il naturale ordine totale e la naturale topologia. All'inizio di questo capitolo presentiamo alcuni risultati ausiliari che in parte generalizzano quanto visto precedentemente.

**Definizione 3.2.** Siano $C, D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ed $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$. Generalizzando le definizioni 2.2, 2.4 e 2.9 diciamo che

(1) $F$ è *crescente in ogni suo argomento* se, per $a, c \in C$ e $b, d \in D$ valgono le implicazioni
$a \leq c \Longrightarrow F(a, d) \leq F(c, d)$
$b \leq d \Longrightarrow F(a, b) \leq F(a, d)$
(2) $F$ è *geometricamente crescente* se, per $a, c \in C$ e $b, d \in D$ vale l'implicazione
$a \leq c$ e $b \leq d \Longrightarrow F(a, b) + F(c, d) - F(a, d) - F(c, b) \geq 0$
(3) $F$ è *1-Lipschitz* se, per $a, c \in C$ e $b, d \in D$ si ha
$|F(c, d) - F(a, b)| \leq |c - a| + |d - b|$.

**Osservazione 3.3.** Siano $C, D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ed $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$.
Allora sono equivalenti:

(1) $F$ è geometricamente crescente.
(2) Per $a, c \in C$ con $a \leq c$ l'applicazione $\underset{y}{\bigcirc} F(c, y) - F(a, y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente.
(3) Per $b, d \in D$ con $b \leq d$ l'applicazione $\underset{x}{\bigcirc} F(x, d) - F(x, b) : C \longrightarrow \mathbb{R}$ é crescente.

Dimostrazione. L'equivalenza delle tre condizioni è praticamente contenuta nelle definizioni. Infatti l'applicazione
$\underset{y}{\bigcirc} F(c, y) - F(a, y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente per $a, c \in C$ con $a \leq c$ se e solo se per ogni $a, c \in C$ e $b, d \in D$ con $a \leq c$ e $b \leq d$ si ha

$$(F(c, d) - F(a, d)) - (F(c, b) - F(a, b)) \geq 0$$

cioè

$$F(c, d) - F(a, d) - F(c, b) + F(a, b) \geq 0.$$

Ma ciò significa proprio che $F$ è geometricamente crescente.

**Lemma 3.4.** *Siano $C, D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ed $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$. Assumiamo che $C$ possieda un elemento più piccolo $c_0$ e $D$ un elemento più piccolo $d_0$ e che le funzioni $\underset{x}{\bigcirc} F(x, d_0)$ e $\underset{y}{\bigcirc} F(c_0, y)$ siano costanti. La funzione $F$ sia geometricamente crescente. Allora $F$ è crescente in ogni suo argomento.*

Dimostrazione. Per simmetria è sufficiente dimostrare che $F$ è crescente nel primo argomento. Siano $a, c \in C$ con $a \leq c$ e $d \in D$.

Siccome $F$ è geometricamente crescente e $d_0 \leq d$, abbiamo
$0 \leq F(a, d_0) + F(c, d) - F(a, d) - F(c, d_0) = F(c, d) - F(a, d)$ perché per ipotesi $F(a, d_0) = F(c, d_0)$.

**Definizione 3.5.** Siano $C, D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ed $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.
$F$ si dice *ben delimitata* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $C$ e $D$ possiedono minimi $c_0$ e $d_0$ e massimi $c_1$ e $d_1$.
(2) Le funzioni $\bigcirc_x F(x, d_0)$ e $\bigcirc_y F(c_0, y)$ sono costanti.

**Proposizione 3.6.** *Siano* $C, D \subset \overline{\mathbb{R}}$ *ed* $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione geometricamente crescente e ben delimitata.*
*Siano* $c_1 := \max C$ *ed* $d_1 := \max D$. *Allora*

$$|F(c, d) - F(a, b)| \leq |F(c, d_1) - F(a, d_1)| + |F(c_1, d) - F(c_1, b)|$$

*per ogni* $a, c \in C$ *e per ogni* $b, d \in D$.

<u>Dimostrazione.</u> Per simmetria è sufficiente dimostrare il caso $a \leq c$ e $b \leq d$. La disuguaglianza triangolare implica

$$|F(c, d) - F(a, b)| \leq |F(c, d) - F(a, d)| + |F(a, d) - F(a, b)|.$$

Per il lemma 3.4 abbiamo

$$F(c, d) - F(a, d) \geq 0 \quad \text{e} \quad F(a, d) - F(a, b) \geq 0$$

e quindi

$$|F(c, d) - F(a, d)| = F(c, d) - F(a, d) \text{ e}$$
$$|F(a, d) - F(a, b)| = F(a, d) - F(a, b).$$

Siccome $F$ è geometricamente crescente, dall'osservazione 3.3 si ha così

$$0 \leq F(c, d) - F(a, d) \leq F(c, d_1) - F(a, d_1) \text{ e}$$
$$0 \leq F(a, d) - F(a, b) \leq F(c_1, d) - F(c_1, b)$$

Da ciò si ottiene l'enunciato.

**Corollario 3.7.** *Nelle ipotesi della proposizione 3.6 si abbia inoltre*

$F(x, d_1) = x$ *per ogni* $x \in C$ *ed* $F(c_1, y) = y$ *per ogni* $y \in D$.

*Allora* $F$ *è 1-Lipschitz.*

**Definizione 3.8.** Un *legame parziale* (in inglese *subcopula*) è una funzione $S : C \times D \longrightarrow R$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) $C, D \subset [0, 1]$.
(2) $0, 1 \in C \cap D$.
(3) $S(a, 0) = S(0, b) = 0$ per ogni $a \in C$ e per ogni $b \in D$.

(4) $S(a,1) = a$ ed $S(1,b) = b$ per ogni $a \in C$ e per ogni $b \in D$.
(5) $S$ è geometricamente crescente.

**Osservazione 3.9.** Siano $C, D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ed $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Assumiamo che $0, 1 \in C \cap D$ e che $F(a,1) = a$ ed $F(1,b) = b$ per ogni $a \in C$ e per ogni $b \in D$. Le funzioni $\underset{x}{\bigcirc} F(x,0)$ e $\underset{y}{\bigcirc} F(0,y)$ siano costanti. Allora $F(a,0) = F(0,b) = 0$ per ogni $a \in C$ e per ogni $b \in D$.

Dimostrazione. Infatti $F(a,0) = F(1,0) = 0$ e similmente $F(0,b) = 0$.

**Osservazione 3.10.** $S_0$ sia un legame parziale. Allora $S_0$ è 1-Lipschitz.

Dimostrazione. Per definizione $S_0$ soddisfa le ipotesi della proposizione 3.6 e del corollario 3.7.

**Osservazione 3.11.** $S : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ sia un legame parziale. Allora:

(1) $S$ è ben delimitata.
(2) $0 \leq S(a,b) \leq \min(a,b) \leq 1$ per ogni $a \in C$ e per ogni $b \in D$. $S$ può essere quindi considerata come funzione $S : C \times D \longrightarrow [0,1]$.
(3) $S$ è un legame se e solo se $C = D = [0,1]$.

Dimostrazione. (1) Chiaro.

(2) Dal lemma 3.4 segue che $S$ è crescente in ogni suo argomento; perciò $0 = S(a,0) \leq S(a,b) \leq S(1,b) = b \leq 1$.
Similmente $0 \leq S(a,b) \leq a \leq 1$.

(3) Chiaro.

**Osservazione 3.12.** $S : C \times D \longrightarrow [0,1]$ sia un legame parziale. Allora

$$\max(a+b-1, 0) \leq S(a,b) \leq \min(a,b)$$

per ogni $a \in C$ e per ogni $b \in D$.

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato la seconda disuguaglianza già nell'osservazione 3.11. La dimostrazione della prima è analoga a quella della proposizione 2.17; potremmo anche utilizzare direttamente l'ipotesi che $S$ sia un legame parziale:
$S(1,1) + S(a,b) - S(a,1) - S(1,b) \geq 0$ e quindi $S(a,b) \geq a + b - 1$.
Inoltre $S(a,b) \geq 0$ per l'osservazione 3.11.

**Lemma 3.13.** *$(X,d)$ sia uno spazio metrico ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione tale che $|f(x_1) - f(x_2)| \leq d(x_1,x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$. Siano $x \in X$ ed $y, y' \in \mathbb{R}$. Assumiamo che esistano successioni $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ e $\underset{n}{\bigcirc} a'_n$ tali che $\lim_{n\to\infty} |a_n - a'_n| = 0$ e $\underset{n}{\bigcirc} f(a_n) \longrightarrow y$, $\underset{n}{\bigcirc} f(a'_n) \longrightarrow y'$.*

*Allora $y = y'$.*

Dimostrazione. Per ogni $n$ abbiamo
$|y - y'| \leq |y - f(a_n)| + |f(a_n) - f(a'_n)| + |f(a'_n) - y'| \leq$

$\leq |y - f(a_n)| + |a_n - a'_n| + |f(a'_n) - y'|$.
Ciò implica l'enunciato.

**Lemma 3.14.** $S_0 : C \times D \longrightarrow [0,1]$ *sia un legame parziale. Allora esiste un unico legame parziale* $S : \overline{C} \times \overline{D} \longrightarrow [0,1]$ *che su* $C \times D$ *coincide con* $S_0$.

Dimostrazione. (1) Sia $(x,y) \in \overline{C} \times \overline{D}$. Allora esistono $\underset{n}{\bigcirc} a_n \longrightarrow x$ e $\underset{n}{\bigcirc} b_n \longrightarrow y$ con $(a_n, b_n) \in C \times D$ per ogni $n$.
Per l'osservazione 3.10 $S_0$ è 1-Lipschitz e quindi

$$|S_0(a_n, b_n) - S_0(a_m, b_m)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$$

per ogni $n, m$ e vediamo che la successione $\underset{n}{\bigcirc} S_0(a_n, b_n)$ è una successione di Cauchy. Per il lemma 3.13 o per un noto risultato della topologia generale (Schubert, pag. 55) possiamo porre $S(x,y) := \lim\limits_{n \to \infty} S_0(a_n, b_n)$, ottenendo così un'applicazione $S : \overline{C} \times \overline{D} \longrightarrow [0,1]$ che su $C \times D$ coincide con $S_0$. È chiaro che $S$ è univocamente determinata.

(2) Le condizioni della definizione 3.8 sono di natura algebrica e seguono quindi direttamente dalle stesse condizioni per $S_0$. Dimostriamo ad esempio che $S$ è geometricamente crescente:

Siano $x, x' \in \overline{C}$ ed $y, y' \in \overline{D}$ con $x \leq x'$ ed $y \leq y'$. Allora possiamo trovare successioni $\underset{n}{\bigcirc} a_n \longrightarrow x$, $\underset{n}{\bigcirc} a'_n \longrightarrow x'$, $\underset{n}{\bigcirc} b_n \longrightarrow y$, $\underset{n}{\bigcirc} b'_n \longrightarrow y'$ con $a_n \leq a'_n$ e $b_n \leq b'_n$ per ogni $n$. Siccome $S_0$ è geometricamente crescente, abbiamo

$$S_0(a_n, b_n) + S_0(a'_n, b'_n) - S_0(a_n, b'_n) - S_0(a'_n, b_n) \geq 0$$

per ogni $n$ e ciò implica chiaramente che anche
$S(x,y) + S(x',y') - S(x,y') - S(x',y) \geq 0$.

**Teorema 3.15.** $S : C \times D \longrightarrow [0,1]$ *sia un legame parziale. Allora esiste un legame* $\otimes$ *che su* $C \times D$ *coincide con* $S$.

Dimostrazione. Per il lemma 3.14 possiamo assumere che $C$ e $D$ siano chiusi. Dimostriamo ora che possiamo estendere $S$ ad una funzione $\otimes$ definita in $[0,1]^2$ nel modo seguente: sia $(a,b) \in [0,1]^2$ un punto arbitrario e siano $a_1$ e $a_2$ rispettivamente il piú piccolo e il piú grande elemento di $\overline{C}$ soddisfacente la disuguaglianza $a_1 \leq a \leq a_2$; similmente, siano $b_1$ e $b_2$ rispettivamente il piú piccolo e il piú grande elemento di $\overline{D}$ soddisfacente la disuguaglianza $b_1 \leq b \leq b_2$. Notiamo che se $a \in \overline{C}$, allora $a_1 = a = a_2$, e se $b \in \overline{D}$ allora $b_1 = b = b_2$.

Definiamo ora $\lambda_1$ e $\mu_1$ tramite le relazioni

$$\lambda_1 := \begin{cases} \frac{a-a_1}{a_2-a_1} & \text{se } a_1 < a_2 \\ 1 & \text{se } a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$\mu_1 := \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1} & \text{se } b_1 < b_2 \\ 1 & \text{se } b_1 = b_2 \end{cases}$$

Infine poniamo

$$\begin{aligned} a \otimes b := &(1-\lambda_1)(1-\mu_1)S(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1 S(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)S(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_1 S(a_2,b_2) \qquad (*) \end{aligned}$$

L'interpolazione definita in (*) è lineare in ogni argomento perché $\lambda_1$ e $\mu_1$ sono lineari rispettivamente in $a$ e $b$. È evidente che in questo modo $\otimes$ è definita su $[0,1]^2$ e che $a \otimes b = S(a,b)$ per ogni $(a,b) \in \overline{C} \times \overline{D}$ e che $\otimes$ soddisfa la prima condizione della definizione 2.5. Rimane da dimostrare che $\otimes$ è geometricamente crescente.

Sia $(c,d)$ un altro punto in $[0,1]^2$ tale che $c \geq a$ e $d \geq b$ e siano $c_1, d_1, c_2, d_2, \lambda_2, \mu_2$ definiti per $c$ e $d$ come $a_1, b_1, a_2, b_2, \lambda_1, \mu_1$ per $a$ e $b$. Per calcolare $a \otimes b + c \otimes d - a \otimes d - c \otimes b$ (**) bisognerà considerare più casi a seconda che in $\overline{C}$ ci sia oppure no un punto strettamente compreso tra $a$ e $c$ e che in $\overline{D}$ ci sia oppure no un punto strettamente compreso tra $b$ e $d$.

(1) Nel più semplice dei casi non esiste alcun punto $x \in \overline{C}$ tale che $a < x < c$ e allo stesso tempo non esiste alcun punto $y \in \overline{D}$ tale che $b < y < d$. Quindi $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, $d_1 = b_1$ e $d_2 = b_2$. Come nella definizione 2.4 al posto di (**) scriviamo $\mathrm{Vol}([a,c] \times [b,d], \otimes)$ e otteniamo così

$$\mathrm{Vol}([a,c] \times [b,d], \otimes) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)\,\mathrm{Vol}([a_1,a_2] \times [b_1,b_2], \otimes) \geq 0$$

dal momento che $\lambda_2 \geq \lambda_1$ e $\mu_2 \geq \mu_1$.

(2) Il caso più complicato si ha per $a < a_2 \leq c_1 < c$ e $b < b_2 \leq d_1 < d$; allora si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}([a,c] \times [b,d], \otimes) = &(1-\lambda_1)\mu_2\,\mathrm{Vol}([a_1,a_2] \times [d_1,d_2], \otimes) \\ &+ \mu_2\,\mathrm{Vol}([a_2,c_1] \times [d_1,d_2], \otimes) \\ &+ \lambda_2\mu_2\,\mathrm{Vol}([c_1,c_2] \times [d_1,d_2], \otimes) \\ &+ (1-\lambda_1)\,\mathrm{Vol}([a_1,a_2] \times [b_2,d_1], \otimes) \\ &+ \mathrm{Vol}([a_2,c_1] \times [b_2,d_1], \otimes) \\ &+ \lambda_2\,\mathrm{Vol}([c_1,c_2] \times [b_2,d_1], \otimes) \\ &+ (1-\lambda_1)(1-\mu_1)\,\mathrm{Vol}([a_1,a_2] \times [b_1,b_2], \otimes) \\ &+ (1-\mu_1)\,\mathrm{Vol}([a_2,c_1] \times [b_1,b_2], \otimes) \\ &+ \lambda_2(1-\mu_1)\,\mathrm{Vol}([c_1,c_2] \times [b_1,b_2], \otimes) \geq 0. \end{aligned}$$

**Osservazione 3.16.** Sia $S : \{0,1\} \times \{0,1\} \longrightarrow [0,1]$ definita da $S(0,0) = S(0,1) = S(1,0) = 0$, $S(1,1) = 1$. Si vede facilmente che $S$ è un legame parziale. Siccome però ogni legame coincide su $\{0,1\} \times \{0,1\}$ con $S$, vediamo che l'estensione $\otimes$ nel teorema 3.15 in genere non è univocamente determinata.

**Lemma 3.17.** *La funzione* $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia ben delimitata e geometricamente crescente. Siano* $x, x', y, y' \in \overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $F(x,\infty) = F(x',\infty)$ *ed* $F(\infty,y) = F(\infty,y')$.

*Allora* $F(x',y') = F(x,y)$.

Dimostrazione. Per la proposizione 3.6 si ha

$$|F(x',y') - F(x,y)| \leq |F(x',\infty) - F(x,\infty)| + |F(\infty,y') - F(\infty,y)| = 0.$$

**Corollario 3.18.** *La funzione* $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia ben delimitata e geometricamente crescente. Allora esiste, univocamente determinata, una funzione* $S : F(\overline{\mathbb{R}}, \infty) \times F(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che*

$$F(u,v) = S(F(u,\infty), F(\infty,v)) \qquad (*)$$

*per ogni* $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. (1) Siano $a \in F(\overline{\mathbb{R}}, \infty)$ e $b \in F(\infty, \overline{\mathbb{R}})$, ad esempio $a = F(u,\infty)$, $b = F(\infty, v)$. Se allora poniamo $S(a,b) := F(u,v)$, otteniamo una ben definita funzione che soddisfa l'uguaglianza (*).

(2) È chiaro che questa è l'unica scelta possibile.

**Osservazione 3.19.** La funzione $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfi le seguenti condizioni:

(1) $F$ è crescente in ogni suo argomento.
(2) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.
(3) $F(\infty, \infty) = 1$.

Allora $0 \leq F(x,y) \leq 1$ per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. $0 = F(-\infty, y) \leq F(x,y) \leq F(x,\infty) \leq F(\infty,\infty) = 1$.

**Proposizione 3.20.** *La funzione* $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *soddisfi le seguenti condizioni:*

*(1)* $F$ *è geometricamente crescente.*
*(2)* $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ *per ogni* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.
*(3)* $F(\infty, \infty) = 1$.
*(4)* $F(\overline{\mathbb{R}}, \infty) = F(\infty, \overline{\mathbb{R}}) = [0,1]$.

*Allora esiste, univocamente determinato, un legame* $\otimes$ *tale che*

$$F(u,v) = F(u,\infty) \otimes F(\infty,v)$$

*per ogni* $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Per il corollario 3.18 esiste, univocamente determinata, una funzione $\otimes : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(u,v) = F(u,\infty) \otimes F(\infty,v)$ per ogni $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$. Per l'osservazione 3.19 (e il lemma 3.4) $F(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}) = [0,1]$ e ciò implica, per definizione di $\otimes$, che $a \otimes b \in [0,1]$ per ogni $a, b \in [0,1]$.

Dimostriamo che $\otimes$ è un legame. Sia $a \in [0,1]$. Per l'ipotesi (4) dell'enunciato esiste $u \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $a = F(u,\infty)$. Perciò $a \otimes 1 = F(u,\infty) \otimes F(\infty,\infty) = F(u,\infty) = a$.

Nello stesso modo si dimostra $1 \otimes a = a$.

Similmente $a \otimes 0 = F(u,\infty) \otimes F(\infty,-\infty) = F(u,-\infty) = 0$ e nello stesso modo $0 \otimes a = 0$.

Dimostriamo ora che $\otimes$ è geometricamente crescente.
Siano $a, a', b, b' \in [0,1]$ con $a \leq a'$ e $b \leq b'$. Di nuovo esistono

$u, u', v, v' \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $a = F(u, \infty)$, $a' = F(u', \infty)$, $b = F(\infty, v)$ e $b' = F(\infty, v')$. Assumiamo prima che $u \le u'$ e $v \le v'$.
In tal caso, siccome $F$ è geometricamente crescente, abbiamo $F(u, v) + F(u', v') - F(u, v') - F(u', v) \ge 0$.
Però $F(u, v) = F(u, \infty) \otimes F(\infty, v) = a \otimes b$, per cui $a \otimes b + a' \otimes b' - a \otimes b' + a' \otimes b \ge 0$. Potrebbe però essere che $u' \le u$. Siccome $F$ è crescente in ogni suo argomento, abbiamo allora $F(u', \infty) \le F(u, \infty)$, cioè $a' \le a$. Per ipotesi però $a \le a'$, cosicchè $a = a'$. In tal caso $a \otimes b + a' \otimes b' - a \otimes b' + a' \otimes b = a \otimes b + a \otimes b' - a \otimes b' + a \otimes b = 0$.

Nello stesso modo si tratta il caso $v' \le v$.

**Nota 3.21.** La funzione $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfi le seguenti condizioni:

(1) $F$ è geometricamente crescente.
(2) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.
(3) $F(\infty, \infty) = 1$.
(4) Le applicazioni $\underset{x}{\bigcirc} F(x, \infty)$ e $\underset{y}{\bigcirc} F(\infty, y)$ siano continue.

Allora $F(\overline{\mathbb{R}}, \infty) = F(\infty, \overline{\mathbb{R}}) = [0, 1]$; perciò, per la proposizione 3.20, esiste, univocamente determinata, un legame $\otimes$ tale che

$$F(u, v) = F(u, \infty) \otimes F(\infty, v)$$

per ogni $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>Dimostrazione.</u> Dobbiamo solo dimostrare che $F(\overline{\mathbb{R}}, \infty) = F(\infty, \overline{\mathbb{R}}) = [0, 1]$. Ma $0 = F(-\infty, \infty)$ e $F(\infty, \infty) = 1$.
La continuità di $F$ implica però che $F(\overline{\mathbb{R}}, \infty)$ è convesso e da ciò segue $F(\overline{\mathbb{R}}, \infty) = [0, 1]$. Necessariamente si vede che $F(\infty, \overline{\mathbb{R}}) = [0, 1]$.

**Proposizione 3.22.** *La funzione $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfi le seguenti condizioni:*

*(1) $F$ è geometricamente crescente.*
*(2) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.*
*(3) $F(\infty, \infty) = 1$.*

*Allora esiste, univocamente determinato, un legame parziale $S : F(\overline{\mathbb{R}}, \infty) \times F(\infty, \overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow [0, 1]$ tale che*

$$F(u, v) = S(F(u, \infty), F(\infty, v))$$

*per ogni $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.*

<u>Dimostrazione.</u> Notiamo in primo luogo che per l'osservazione 3.19 (e il lemma 3.4) gli insiemi $C := F(\overline{\mathbb{R}}, \infty)$, $D := F(\infty, \overline{\mathbb{R}})$ ed $F(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}})$ sono tutti sottoinsiemi di $[0, 1]$. Inoltre $0, 1 \in C \cap D$ per le condizioni (2) e (3) dell'enunciato. Per il corollario 3.18 esiste, univocamente determinata, una funzione $S : C \times D \longrightarrow [0, 1]$ tale che $F(u, v) = S(F(u, \infty), F(\infty, v))$ per ogni $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$. Come nella dimostrazione della proposizione 3.21 si verifica facilmente che $S$ è un legame parziale.

**Corollario 3.23.** *La funzione* $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *soddisfa le seguenti condizioni:*

*(1)* $F$ *è geometricamente crescente.*
*(2)* $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ *per ogni* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.
*(3)* $F(\infty, \infty) = 1$.

*Allora esiste, in genere non univocamente determinato, un legame* $\otimes$ *tale che*

$$F(u, v) = F(u, \infty) \otimes F(\infty, v)$$

*per ogni* $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Siano $C := F(\overline{\mathbb{R}}, \infty)$ e $D := F(\infty, \overline{\mathbb{R}})$. Per la proposizione 3.22 possiamo trovare un legame parziale $S : C \times D \longrightarrow [0, 1]$ tale che $F(u, v) = F(u, \infty) \otimes F(\infty, v)$ per ogni $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$. Per il teorema 3.15 esiste un legame $\otimes$ che su $C \times D$ coincide con $S$. Quest'ultima condizione implica che $F(u, \infty) \otimes F(\infty, v) = F(u, v)$ per ogni $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Teorema 3.24 (teorema di Sklar).** $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *sia uno spazio di probabilità ed* $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *dua variabili aleatorie (cioè funzioni* $\mathcal{A}$-$borel(\mathbb{R})$*-misurabili). Allora esiste un legame* $\otimes$ *tale che*

$$p(X \leq u, Y \leq v) = p(X \leq u) \otimes p(Y \leq v)$$

*per ogni* $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. Definiamo $F : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite $F(u, v) := p(X \leq u, Y \leq v)$. Per il teorema 1.9, la restrizione di $F$ ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è una funzione di distribuzione. Le condizioni della definizione 1.8 implicano in modo evidente che $F$ soddisfa le ipotesi del corollario 3.23. Infine, siccome $p(X \leq u) = p(X \leq u, Y \leq \infty) = F(u, \infty)$ e similmente $p(Y \leq v) = F(\infty, v)$, otteniamo l'enunciato.

Si noti che, utilizzando il corollario 3.23, non abbiamo avuto bisogno della condizione (2) nella definizione 1.8 (la continuità a destra di $F$).

**Definizione 3.25.** Nella situazione della proposizione 3.22 diciamo che $\otimes$ è un *legame* per $X, Y$. Quando le funzioni $\underset{u}{\bigcirc}\, p(X \leq u)$ e $\underset{v}{\bigcirc}\, p(Y \leq v)$ sono continue, per la nota 3.21 questo legame è univocamente determinato da $X$ ed $Y$.

# 4. t-norme

**Definizione 4.1.** Una *norma triangolare* (in breve *t-norma*) è un'operazione binaria $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ che gode delle seguenti proprietà :

(A) $([0,1], \otimes)$ è un semigruppo commutativo in cui $1$ funge da elemento neutro.

(B) La composizione $\otimes$ è monotona, rende cioè $([0,1], \otimes)$ un semigruppo ordinato: $a \leq b$ implica $a \otimes c \leq b \otimes c$ per ogni $a, b, c \in [0,1]$.

In altre parole, una t-norma è un'applicazione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ tale che per ogni $x, y, z \in [0,1]$ valgono le seguenti condizioni:

(1) $x \otimes y = y \otimes x$.

(2) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.

(3) $y \leq z$ implica $x \otimes y \leq x \otimes z$.

(4) $x \otimes 1 = x$.

t-norme possono essere interpretate come *leggi di intersezione* per insiemi sfumati.

**Proposizione 4.2.** *Per una funzione* $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *sono equivalenti:*

*(1)* $\otimes$ *è una t-norma.*

*(2)* $\otimes$ *è un semilegame associativo e commutativo.*

Dimostrazione. Ciò segue dall'osservazione 2.8.

**Definizione 4.3.** Le seguenti t-norme *fondamentali* sono molto importanti: il *minimo* $\min$, il *prodotto* $T_P = \bigcirc_{(x,y)} xy$, la *t-norma di Lukasiewicz* $T_L = \bigcirc_{(x,y)} \max(x+y-1, 0)$ e il *prodotto drastico* $\Box$.

Le prime tre sono state introdotte nell'osservazione 2.16, il prodotto drastico è così definito:

$$x \Box y = \begin{cases} 0 & \text{per } x, y < 1 \\ x & \text{per } y = 1 \\ y & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

**Lemma 4.4.** *Siano* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Allora* $a + \max(b, c) = \max(a+b, a+c)$.

**Osservazione 4.5.** $\min, T_P, T_L, \Box$ sono t-norme.

Dimostrazione. Per $\min$ e $T_P$ chiaro. Dimostriamo l'enunciato per $T_L$ e $\Box$. È evidente che $T_L$ e $\Box$ soddisfano le condizioni (1) e (4) della definizione 4.1. Siano $x, y, z \in [0,1]$. Dimostriamo l'associatività prima per $T_L$ e poi per $\Box$.

$$\begin{aligned} T_L(x, T_L(y,z)) &= T_L(x, \max(y+z-1, 0)) \\ &= \max(x + \max(y+z-1, 0) - 1, 0) \end{aligned}$$

Per il lemma 4.4 si ha

$$\begin{aligned}\max(x + \max(y + z - 1, 0) - 1, 0) &= \max(\max(y + z - 1 + x - 1, x - 1), 0) \\ &= \max(y + z + x - 2, 0)\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}T_L(T_L(x, y), z) &= T_L(\max(x + y - 1, 0), z) \\ &= \max(\max(x + y - 1, 0) + z - 1, 0)\end{aligned}$$

Sempre per il lemma 4.4 abbiamo

$$\begin{aligned}\max(\max(x + y - 1, 0) + z - 1, 0) &= \max(\max(x + y - 1 + z - 1, z - 1), 0) \\ &= \max(x + y + z - 2, 0)\end{aligned}$$

$T_L$ quindi è associativa.

Consideriamo ora $\Box$. Dobbiamo distinguere 4 casi.

(1) Siano $x, y, z < 1$. Allora
$x\Box(y\Box z) = x\Box 0 = 0$
$(x\Box y)\Box z = 0\Box z = 0$
(2) Sia $x = 1$. Allora
$x\Box(y\Box z) = 1\Box(y\Box z) = y\Box z$
$(x\Box y)\Box z = (1\Box y)\Box z = y\Box z$
(3) Sia $y = 1$. Allora
$x\Box(y\Box z) = x\Box(1\Box z) = x\Box z$
$(x\Box y)\Box z = (x\Box 1)\Box z = x\Box z$
(4) Sia $z = 1$. Allora
$x\Box(y\Box z) = x\Box(y\Box 1) = x\Box y$
$(x\Box y)\Box z = (x\Box y)\Box 1 = x\Box y$

Anche $\Box$ è quindi associativa.

Infine dimostriamo il punto (3) della definizione 4.1.
Sia $y \leq z$. Per $T_L$ abbiamo:

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \leq \max(x + z - 1, 0) = T_L(x, z).$$

Consideriamo ora $\Box$. Distinguiamo 4 casi.

(1) Siano $x, y, z < 1$. Allora $x\Box y = x\Box z = 0$.
(2) Sia $x = 1$. Allora $x\Box y = y$ e $x\Box z = z$.
(3) Sia $y = 1$. In questo caso anche $z = 1$ e si ha $x\Box y = x\Box z = x$.
(4) Sia $z = 1$. Allora $x\Box y \leq x = x\Box z$.

Pertanto $\Box$ è monotona.

**Definizione 4.6.** $\otimes_1$ e $\otimes_2$ siano due t-norme. Scriviamo allora $\otimes_1 \leq \otimes_2$ se

$$\otimes_1(x, y) \leq \otimes_2(x, y)$$

per ogni $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ e $\otimes_1 < \otimes_2$ se $\otimes_1 \leq \otimes_2$, ma $\otimes_1 \neq \otimes_2$.

**Proposizione 4.7.** *Il prodotto drastico* $\square$ *e il minimo* $\min$ *sono rispettivamente la più piccola e la più grande t-norma.*

*Per ogni t-norma* $\otimes$ *abbiamo quindi* $\square \leq \otimes \leq \min$.

Dimostrazione. Sia $T$ una t-norma. Dimostriamo in primo luogo che $\square \leq T$. Dobbiamo distinguere tre casi:

(1) Per $x, y < 1$ si ha $x \square y = 0 \leq x \otimes y$.
(2) Per $y = 1$ abbiamo $x \square y = x \square 1 = x = x \otimes 1$ per la proprietà (4) della definizione 4.1. Quindi $x \square y \leq x \otimes y$.
(3) Per $x = 1$ si ha $x \square y = 1 \square y = y = 1 \otimes y$ e quindi $x \square y \leq x \otimes y$.

Dimostriamo adesso che $\otimes \leq \min$. Dobbiamo distinguere due casi:

(1) Per $x \leq y$ si ha $\min(x, y) = x = x \otimes 1 \geq x \otimes y$, sfruttando le proprietà di monotonia della definizione 4.1.
(2) Per $x \geq y$ invece $\min(x, y) = y = y \otimes 1 \geq y \otimes x = x \otimes y$.

**Osservazione 4.8.** Tra le quattro t-norme fondamentali sussistono le seguenti disuguaglianze strette: $\square < T_L < T_P < \min$.

Dimostrazione. Abbiamo $\square \leq T_L$ e $T_P \leq \min$ per la proposizione precedente.

(1) Dimostriamo prima che $T_L \leq T_P$, cioè che $\max(x + y - 1, 0) \leq xy$ per ogni $x, y \in [0, 1]$. Distinguiamo due casi:
    (1) Sia $x + y - 1 \leq 0$. Allora $T_L(x, y) = 0 \leq xy = T_P(x, y)$.
    (2) Sia $x + y - 1 > 0$. Allora $T_L(x, y) = x + y - 1 \leq x + y - 1 + (1 - x) \cdot (1 - y) = xy$
(2) Dimostriamo ora che $\square \neq T_L$, $T_L \neq T_P$ e $T_P \neq \min$. È sufficiente osservare che:

$$\begin{aligned} 0.6 \square 0.6 &= 0 \\ T_L(0.6, 0.6) &= 0.2 \\ T_P(0.6, 0.6) &= 0.36 \\ \min(0.6, 0.6) &= 0.6 \end{aligned}$$

**Definizione 4.9.** $\otimes : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ sia un'applicazione. Un elemento $e \in [0, 1]$ si dice $\otimes$-*idempotente* se $e \otimes e = e$, e si dice un $\otimes$-*idempotente interno* se inoltre $0 < e < 1$.

**Proposizione 4.10.** *Il minimo* $\min$ *è l'unica t-norma per cui ogni elemento* $x \in [0, 1]$ *è idempotente.*

Dimostrazione. $\otimes$ sia una t-norma per cui ogni elemento $x \in [0, 1]$ è $\otimes$-idempotente. Siano $x, y \in [0, 1]$ con, ad esempio, $x \leq y$. Allora $x = x \otimes x \leq x \otimes y \leq \min(x, y) = x$, da cui segue che $x \otimes y = \min(x, y)$.

**Definizione 4.11.** Una funzione $\otimes : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ che soddisfa, per ogni $x, y, z \in [0, 1]$, le proprietà (1)-(3) della definizione 4.1 e la disuguaglianza $x \otimes y \leq \min(x, y)$ è chiamata *t-sottonorma*.

**Osservazione 4.12.** Chiaramente (come si vede dalla proposizione 4.10) ogni t-norma è anche una t-sottonorma, ma non vale il viceversa; per esempio la funzione zero è una t-sottonorma, ma non una t-norma.

**Osservazione 4.13.** Ogni t-sottonorma può essere trasformata in una t-norma ridefinendo (se necessario) i suoi valori sul lato superiore e sul lato destro del quadrato unitario.

**Osservazione 4.14.** $\otimes$ sia una t-sottonorma. Allora $x \otimes y = 1$ implica $x = y = 1$.

Dimostrazione. Infatti $1 = x \otimes y \leq \min(x, y)$ implica $x = y = 1$.

**Proposizione 4.15.** *Se* $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *è una t-sottonorma, allora la funzione* $\overline{\otimes} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *definita da*

$$x \overline{\otimes} y = \begin{cases} x \otimes y & \textit{se } x, y \neq 1 \\ \min(x, y) & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

*è una t-norma.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $\overline{\otimes}$ è una t-norma dobbiamo dimostrare che $\overline{\otimes}$ soddisfa le proprietà (1)-(4) della definizione 4.1. Innanzitutto $\overline{\otimes}$ soddisfa (1), cioè la simmetria, in maniera evidente. Per dimostrare la proprietà (2) dobbiamo distinguere quattro casi:

(1) Siano $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$. Per l'osservazione precedente in questo caso $x \otimes y < 1$, quindi

$$\begin{aligned} x \overline{\otimes} (y \overline{\otimes} z) &= x \overline{\otimes} (y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \\ &= (x \overline{\otimes} y) \otimes z = (x \overline{\otimes} y) \overline{\otimes} z. \end{aligned}$$

(2) Sia $x = 1$. Allora $1 \overline{\otimes} (y \overline{\otimes} z) = y \overline{\otimes} z = (1 \overline{\otimes} y) \overline{\otimes} z$.

(3) Sia $y = 1$. Allora $x \overline{\otimes} (1 \overline{\otimes} z) = x \overline{\otimes} z = (x \overline{\otimes} 1) \overline{\otimes} z$.

(4) Sia $z = 1$. Allora $x \overline{\otimes} (y \overline{\otimes} 1) = x \overline{\otimes} y = (x \overline{\otimes} y) \overline{\otimes} 1$.

L'associatività è così dimostrata. Per dimostrare la proprietà (3) assumiamo $y \leq z$. Dobbiamo distinguere 3 casi:

(1) Sia $x = 1$. Allora $x \overline{\otimes} y = 1 \overline{\otimes} y = y \leq z = 1 \overline{\otimes} z = x \overline{\otimes} z$.

(2) Siano $x < 1$ e $y < 1$. Allora $x \otimes y \leq x \overline{\otimes} y \leq x \overline{\otimes} z = x \otimes z$.

(3) Siano $x < 1$ e $y = 1$. Allora anche $z = 1$ e quindi $x \overline{\otimes} y = x \overline{\otimes} 1 = \min(x, 1) = \min(x, z) = x = x \overline{\otimes} z$.

Anche la monotonia è dunque dimostrata.

La proprietà (4) è di verifica immediata in quanto $x \overline{\otimes} 1 = x$ per definizione.

**Nota 4.16.** La funzione $\overline{\otimes}$ nella proposizione 4.15 può anche essere riscritta nel modo seguente:

$$x \overline{\otimes} y = \begin{cases} x \otimes y & \text{se } x, y \neq 1 \\ x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Come abbiamo già osservato, la definizione implica che $x \otimes y \leq x \overline{\otimes} y$ per ogni $x, y$.

**Definizione 4.17.** Un'applicazione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ si dice *continua in ogni suo argomento*, se per ogni $a \in [0,1]$ le applicazioni $\bigcirc_x x \otimes a : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $\bigcirc_x a \otimes x : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ sono continue.

**Definizione 4.18.** Per un'applicazione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definiamo la *diagonale* $\delta_\otimes : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tramite $\delta_\otimes x := x \otimes x$. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\delta_\otimes^n$ come la n-esima iterata di $\delta_\otimes$, con $\delta_\otimes^0$ :=identità. Si noti che i punti fissi di $\delta_\otimes$ sono esattamente gli idempotenti di $\otimes$.

**Definizione 4.19.** Per un'applicazione associativa $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definiamo le potenze $p_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tramite

$p_n(x) := \underbrace{x \otimes ... \otimes x}_{n}$ per $n \in \mathbb{N}+1$, mentre $p_0(x) := 1$.

In particolare $p_1$ =identità e $p_2 = \delta_\otimes$.

**Lemma 4.20.** *$\otimes$ sia una t-norma. Allora:*

*(1)* $\delta_\otimes(0) = 0$.
$\delta_\otimes(1) = 1$.
*(2)* $\delta_\otimes$ *è un'applicazione monotona.*
*(3)* $\delta_\otimes x \leq x$ *per ogni* $x \in [0,1]$.
*(4)* *Per ogni* $x \in [0,1]$ *la successione* $\bigcirc_n \delta_\otimes^n x$ *è decrescente e per* $x \neq 1$ *si ha* $0 \leq \lim_{n\to\infty} \delta_\otimes^n x < 1$.
*(5)* *Per ogni* $n \in \mathbb{N}+1$ *ed* $x \in [0,1]$ *si ha* $\delta_\otimes^n x = \underbrace{x \otimes ... \otimes x}_{2^n} = p_{2^n}(x)$.

Dimostrazione. Chiaro.

**Definizione 4.21.** Un semilegame $\otimes$ si dice *archimedeo*, se è associativo e se per ogni $a, b \in (0,1)$ esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $p_m(a) < b$.

**Lemma 4.22.** *Per un semilegame associativo $\otimes$ sono equivalenti:*

*(1)* $\otimes$ *è archimedeo.*
*(2)* *Per ogni* $a \in [0,1)$ *vale* $\lim_{n\to\infty} p_n(a) = 0$.
*(3)* *Per ogni* $a \in [0,1)$ *vale* $\lim_{n\to\infty} \delta_\otimes^n a = 0$.
*(4)* *Per ogni* $a, b \in (0,1)$ *esiste un* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $\delta_\otimes^m a < b$.

Dimostrazione. Le potenze $p_n$ sono state definite nella definizione 4.19.

(1)$\Longrightarrow$(2) : $\otimes$ sia archimedea. Per $a = 0$ l'enunciato è banale perchè in tal caso $p_n(a) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Sia perciò $a \in (0,1)$. $p_n(a)$ è una funzione decrescente: infatti $p_{n+1}(a) = p_n(a) \otimes a \leq p_n(a) \otimes 1 = p_n(a)$. Esiste quindi $\lim_{n\to\infty} p_n(a) = b$. Supponiamo per assurdo che $b > 0$.
Allora $p_n(a) \geq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ in contraddizione con l'ipotesi che $\otimes$ sia archimedea.

(2)$\Longrightarrow$(3) : Chiaro.

(3)$\Longrightarrow$(4) : Chiaro.

(4)$\Longrightarrow$(1) : Chiaro perchè $\delta_{\otimes}^{m} a = p_{2^m}(a)$.

**Osservazione 4.23.** Sia $\delta_L$ la diagonale associata alla t-norma di Lukasiewicz, ovvero $\delta_L(a) = \max(2a-1, 0)$ per ogni $a \in [0,1]$. Allora per ogni $p \in \mathbb{N}+1$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq p$ vale
$\delta_L\left(\dfrac{p-k}{p}\right) = \max\left(\dfrac{p-2k}{p}, 0\right)$.

<u>Dimostrazione.</u> Infatti
$\delta_L\left(\dfrac{p-k}{p}\right) = \max\left(2\left(\dfrac{p-k}{p}\right) - 1, 0\right) = \max\left(\dfrac{p-2k}{p}, 0\right)$.

**Proposizione 4.24.** *Il prodotto* $\bigcirc_{x,y} xy$ *e la t-norma* $T_L$ *sono t-norme archimedee (evidentemente continue).*

<u>Dimostrazione.</u> (1) È chiaro che il prodotto soddisfa la condizione del lemma 4.22.

(2) Dimostriamo che $T_L$ è archimedea. Sia $a \in [0,1)$. Allora esiste $p$ con $p \in \mathbb{N}+1$ tale che $a < \frac{p-1}{p}$. Per la monotonia basta quindi dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_L^n\left(\frac{p-1}{p}\right) = 0$. Per l'osservazione 4.23 otteniamo una successione $\frac{p-1}{p} \longrightarrow \frac{p-2}{p} \longrightarrow \frac{p-4}{p} \longrightarrow \frac{p-8}{p} \longrightarrow \ldots$ in cui possiamo fermarci quando arriviamo ad un valore negativo. Per $p = 20$ abbiamo ad esempio $\frac{19}{20} \longrightarrow \frac{18}{20} \longrightarrow \frac{16}{20} \longrightarrow \frac{12}{20} \longrightarrow \frac{4}{20} \longrightarrow 0$.

**Proposizione 4.25.**

*(1) Un semilegame archimedeo non possiede idempotenti interni.*

*(2) Se $\otimes$ è una t-norma che non possiede idempotenti interni e tale che l'applicazione diagonale $\delta_{\otimes}$ è continua, allora $\otimes$ è archimedea.*

<u>Dimostrazione.</u> (1) Sia $\otimes$ un semilegame archimedeo ed $e$ un $\otimes$-idempotente $\neq 1$. Per il punto (3) del lemma 4.22 allora $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\otimes}^n e = e$. Ma $\delta_{\otimes}^n e = e$ per ogni $n \in \mathbb{N}+1$; ciò implica $e = 0$.

(2) $\otimes$ non possegga idempotenti interni; la diagonale $\delta_{\otimes}$ sia continua. Sia $a \in [0,1)$. Come osservato nel lemma 4.20 il limite $y := \lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\otimes}^n a$ esiste. Essendo per il punto (3) $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\otimes}^n a < 1$, se $\delta_{\otimes}$ è continua è chiaro che $y$ è un punto fisso di $\delta_{\otimes}$, cioè un idempotente. Siccome $y < 1$, per ipotesi $y = 0$, cosicchè è soddisfatta la condizione (3) del lemma 4.22.

**Corollario 4.26.** *Una t-norma continua è archimedea se e solo se non possiede idempotenti interni, cioè se e solo se $a \otimes a < a$ per ogni $a \in (0,1)$.*

**Proposizione 4.27.** *$\otimes$ sia una t-norma archimedea ed $a \in [0,1)$, $b \in (0,1]$. Allora $a \otimes b < b$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $a \otimes b = b$. Definiamo le potenze $p_n$ come nella definizione 4.19. Sfruttando l'associatività di $\otimes$ si trova che $p_m(a) \otimes b = b$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Per ipotesi $\otimes$ è archimedea, quindi è possibile trovare un $n \in \mathbb{N}$ per cui $p_n(a) < b$. Allora però anche $b = p_n(a) \otimes b < b$, una contraddizione.

**Teorema 4.28.** *Una t-norma è un legame se e solo se è 1-Lipschitz.*

Dimostrazione. (1) Sappiamo dalla proposizione 2.14 che un legame è un quasilegame e quindi 1-Lipschitz.

(2) $\otimes$ sia una t-norma e 1-Lipschitz. Allora $\otimes$ è un quasilegame che però è anche associativo. Per la proposizione 2.19 concludiamo che $\otimes$ è un legame.

**Proposizione 4.29.** *$\otimes$ sia una t-norma ed $e \in [0,1]$. Allora $e$ è idempotente se e solo se vale l'implicazione $a \in [e,1] \Longrightarrow a \otimes e = e$.*

Dimostrazione. (1) $e$ sia idempotente ed $a \in [e,1]$.
Allora $e = e \otimes e \leq a \otimes e \leq e$.

(2) Nell'ipotesi dell'enunciato si ha in particolare $e \otimes e = e$.

**Proposizione 4.30.** *$\otimes$ sia una t-norma continua ed $e \in [0,1]$.
Allora sono equivalenti:*

*(1)* *$e$ è idempotente.*
*(2)* *$a \otimes e = \min(a,e)$ per ogni $a \in [0,1]$.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sia $a \in [0,1]$. Se $a \geq e$, allora per la proposizione 4.29 si ha $a \otimes e = e$. Sia invece $a \leq e$. Dobbiamo dimostrare che $a \otimes e = a$. Per ipotesi $\otimes$ è continua e quindi anche la funzione $\underset{x}{\bigcirc} x \otimes e : [0,e] \longrightarrow [0,1]$ è continua. Siccome $0 = 0 \otimes e \leq a \leq 1 \otimes e = e$, dall'ipotesi che l'applicazione $\underset{x}{\bigcirc} x \otimes e$ sia continua, segue che esiste $u \in [0,1]$ tale che $a = u \otimes e$.
Allora $a \otimes e = (u \otimes e) \otimes e = u \otimes (e \otimes e) = u \otimes e = a = \min(a,e)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Chiaro.

**Definizione 4.31.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia un'applicazione associativa e commutativa. Le potenze $p_n$ siano definite come nella definizione 4.19. Un elemento $a \in [0,1]$ si dice

(1) $\otimes$-*nilpotente*, se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $p_m(a) = 0$;
(2) un $\otimes$-*zerodivisore*, se esiste $b \in (0,1]$ tale che $a \otimes b = 0$.

**Osservazione 4.32.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia un'applicazione associativa, commutativa e crescente in ogni suo argomento. Se esiste un $\otimes$-zerodivisore $a \neq 0$, allora esiste anche un elemento $x \neq 0$ con $x \leq a$ tale che $x \otimes x = 0$.

Dimostrazione. Sia $a \in (0,1]$ un $\otimes$-zerodivisore. Per la definizione 4.31 esiste quindi $b \in (0,1]$ tale che $a \otimes b = 0$. Allora si ha $a \leq b$ oppure

$b \leq a$. Nel primo caso $a \otimes a = 0$ e possiamo prendere $x = a$; nel secondo caso $b \otimes b = 0$ e possiamo prendere $x = b$.

**Definizione 4.33.** Una t-norma $\otimes$ si dice *cancellativa* (o *strettamente monotona*) se per ogni $a \neq 0$ vale l'implicazione

$$a \otimes x = a \otimes y \Longrightarrow x = y$$

È chiaro che $\otimes$ è cancellativa se e solo se per ogni $a \neq 0$ vale l'implicazione $x < y \Longrightarrow a \otimes x < a \otimes y$.

Una t-norma si dice *stretta* (in inglese *strict*), se è cancellativa e continua.

**Osservazione 4.34.** Una t-norma cancellativa non possiede idempotenti interni.

**Corollario 4.35.** *Una t-norma stretta è archimedea.*

Dimostrazione. Osservazione 4.34 e corollario 4.26.

**Definizione 4.36.** La t-norma $\otimes$ si dice *regolare* se non possiede nilpotenti $\neq 0$. Per l'osservazione 4.32 sono equivalenti:

(1) $\otimes$ è regolare.
(2) $p_n(a) \neq 0$ per ogni $a > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(3) $p_2(a) \neq 0$ per ogni $a > 0$.
(4) $\otimes$ non possiede zerodivisori $\neq 0$.

**Lemma 4.37.** *$\otimes$ sia una t-norma archimedea e continua. Allora sono equivalenti:*

*(1) $\otimes$ è stretta.*
*(2) $\otimes$ è cancellativa.*
*(3) $\otimes$ è regolare.*

Dimostrazione. (1) $\Longleftrightarrow$ (2): Per definizione ($\otimes$ è continua per ipotesi).

(2) $\Longrightarrow$ (3): Per quanto visto nella definizione 4.36 è sufficiente dimostrare che $\otimes$ non possiede zerodivisori $\neq 0$. Siano $a, b \neq 0$ ed $a \otimes b = 0$. Ma anche $a \otimes 0 = 0$ e quindi per ipotesi $b = 0$, una contraddizione.

(3) $\Longrightarrow$ (2): Sia $a \neq 0$ ed $a \otimes x = a \otimes y$ con $x < y$. Per la continuità di $\otimes$ (è sufficiente la continuità in ogni argomento) esiste $u \in [0,1]$ tale che $x = y \otimes u$. Abbiamo allora $a \otimes y \otimes u = a \otimes y$. Necessariamente $u < 1$ e se fosse $a \otimes y > 0$, per la proposizione 4.27 si avrebbe la contraddizione $a \otimes y = a \otimes y \otimes u < a \otimes y$. Perciò $a \otimes y = 0$ e vediamo che esiste uno zerodivisore $\neq 0$.

**Proposizione 4.38.** *$\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia un'applicazione crescente in ogni suo argomento. Allora sono equivalenti:*

*(1) $\otimes$ è continua.*

*(2)* $\otimes$ *è continua in ogni suo argomento.*

Dimostrazione. seguiamo Klement/Mesiar/Pap, pagg. 15-16.
(1)$\Longrightarrow$(2): Chiaro.

(2)$\Longrightarrow$(1): $\otimes$ sia continua in ogni suo argomento.
Fissiamo $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$. Sia $\varepsilon > 0$ e siano $\underset{n}{\bigcirc} x_n$ e $\underset{n}{\bigcirc} y_n$ due successioni definite in $[0,1]$ convergenti rispettivamente a $x_0$ e $y_0$. Ora possiamo costruire quattro successioni monotone $\underset{n}{\bigcirc} a_n$, $\underset{n}{\bigcirc} b_n$, $\underset{n}{\bigcirc} c_n$ e $\underset{n}{\bigcirc} d_n$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $a_n \leq x_n \leq b_n$ e $c_n \leq y_n \leq d_n$ in modo tale che $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ sia una successione crescente convergente a $x_0$, $\underset{n}{\bigcirc} b_n$ sia una successione decrescente convergente a $x_0$, $\underset{n}{\bigcirc} c_n$ una successione crescente convergente a $y_0$ e $\underset{n}{\bigcirc} d_n$ una successione decrescente convergente a $y_0$. Per ipotesi $\otimes$ è continua nella seconda variabile, quindi la funzione $f := \underset{y}{\bigcirc} x_0 \otimes y$ è continua; perciò esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha

$$x_0 \otimes y_0 - \varepsilon < x_0 \otimes c_N \leq x_0 \otimes y_n \leq x_0 \otimes d_N < x_0 \otimes y_0 + \varepsilon$$

dove abbiamo sfruttato l'ipotesi sulla monotonia.

Analogamente, $\otimes$ è continua anche nella prima variabile, quindi la funzione $g := \underset{x}{\bigcirc} x \otimes y_0$ è continua; perciò esiste un $M \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m \geq M$ si ha

$$x_0 \otimes y_0 - \varepsilon < a_M \otimes y_0 \leq x_m \otimes y_0 \leq b_M \otimes y_0 < x_0 \otimes y_0 + \varepsilon$$

Combinando le due espressioni otteniamo

$$x_0 \otimes c_N - \varepsilon < a_M \otimes c_N \leq x_m \otimes y_n \leq b_M \otimes d_N < x_0 \otimes d_N + \varepsilon$$

Poniamo $K = \max(M, N)$. Allora per ogni $k \geq K$ abbiamo

$$x_0 \otimes y_0 - 2\varepsilon < x_k \otimes y_k < x_0 \otimes y_0 + 2\varepsilon$$

e vediamo che $\underset{k}{\bigcirc} x_k \otimes y_k$ converge a $x_0 \otimes y_0$, quindi $\otimes$ è continua in $(x_0, y_0)$.

**Lemma 4.39.** *Per una t-norma* $\otimes$ *sono equivalenti:*

*(1)* $\otimes$ *è continua.*
*(2)* $\otimes$ *è continua in ogni suo argomento.*
*(3) Per* $a, b, c, d, x \in [0,1]$ *con* $a \leq c$, $b \leq d$ *ed* $a \otimes b \leq x \leq c \otimes d$, *esiste* $r \in [a,c]$ *ed* $s \in [b,d]$ *tali che* $x = r \otimes s$.

Dimostrazione. (1) $\Longleftrightarrow$ (2): Proposizione 4.38.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Siccome $a \otimes b \leq a \otimes d \leq c \otimes d$, abbiamo $a \otimes b \leq x \leq a \otimes d$ oppure $a \otimes d \leq x \leq c \otimes d$. Nel primo caso usiamo la continuità della funzione $\underset{t}{\bigcirc} a \otimes t$, nel secondo caso la continuità di $\underset{t}{\bigcirc} t \otimes d$.

(3) $\Longrightarrow$ (2): La funzione $\bigcirc_t a \otimes t$ non sia continua. Questa funzione è però crescente e quindi deve avere una discontinuità a salto.
Ciò contraddice l'ipotesi al punto (3).
Nello stesso modo si dimostra che $\bigcirc_t t \otimes b$ è continua per ogni $b \in [0,1]$.

**Lemma 4.40.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *sia un'applicazione associativa e continua in ogni suo argomento tale che* $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ *per ogni* $a \in [0,1]$ *e per cui* $1$ *sia idempotente. Allora* $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$ *per ogni* $a \in [0,1]$.

Dimostrazione. Sia $a \in [0,1]$. L'applicazione $f : \bigcirc_x x \otimes 1$ è continua con $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Perciò esiste $x \in [0,1]$ tale che $a = f(x) = x \otimes 1$. Usando l'associatività di $\otimes$ abbiamo

$$a \otimes 1 = (x \otimes 1) \otimes 1 = x \otimes (1 \otimes 1) = x \otimes 1 = a$$

In maniera analoga si dimostra che $1 \otimes a = a$.

**Proposizione 4.41.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *sia un'applicazione associativa e continua tale che* $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ *per ogni* $a \in [0,1]$ *e per cui* $1$ *sia idempotente. Allora* $\otimes$ *è un semilegame.*

Dimostrazione. Per il lemma 4.40 dobbiamo solo dimostrare che $\otimes$ è crescente in ogni suo argomento. Seguiamo Alsina/Frank/Schweizer pag 24.

(1) Fissato $a \in [0,1]$, sia

$$\alpha := \sup\{t \in [0,1] \mid u \otimes v \leq a \quad \text{per ogni} (u,v) \in [0,t] \times [0,1]\} \quad (*)$$

L'insieme alla destra è non vuoto perchè per ipotesi $0 \otimes v = 0 \leq a$ per ogni $v \in [0,1]$, quindi $\alpha$ è ben definito. Dalla continuità (qui è sufficiente la continuità nel primo argomento) di $\otimes$ segue che $\alpha \otimes v \leq a$ per ogni $v \in [0,1]$. Il $\sup$ in $(*)$ è quindi in verità un massimo.

(2) Con $a$ ed $\alpha$ come al punto (1), assumiamo inoltre che $\alpha < 1$ e dimostriamo che esiste $z \in [0,1]$ tale che $\alpha \otimes z = a$. Per $a = 0$ necessariamente $\alpha = 0$ e possiamo scegliere $z$ in modo arbitrario. Perciò assumiamo $a > 0$ e supponiamo, per assurdo, che si abbia $\alpha \otimes v < a$ per ogni $v \in [0,1]$. Dal momento che $\otimes$ è continua nella prima variabile e $\alpha \otimes 0 = 0$, segue che $\max \alpha \otimes v < \alpha$, per ogni $v \in [0,1]$. Adesso usiamo la continuità di $\otimes$ come applicazione $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$. Questa, per la compattezza di $[0,1]$, implica anche l'uniforme continuità, per cui esiste $\beta \in (\alpha, 1]$ tale che $\max \beta \otimes v < a$ per $v \in [0,1]$; qui usiamo l'ipotesi $\alpha < 1$. Ma ciò contraddice la massimalità di $\alpha$.

(3) Con $a, \alpha$ e $z$ come al punto (2) abbiamo adesso, per ogni $b \in [0,1]$, $a \otimes b = (\alpha \otimes z) \otimes b = \alpha \otimes (z \otimes b) \leq a$.

(4) Siano invece $a$ ed $\alpha$ come al punto (1), e assumiamo stavolta che $\alpha = 1$. Ciò significa che $u \otimes v \leq a$ per ogni $(u,v) \in [0,1]$ e quindi anche $a \otimes b \leq a$ per ogni $b \in [0,1]$.

(5) Vediamo così che $a \otimes b \leq a$ per ogni $a, b \in [0,1]$; in maniera analoga $a \otimes b \leq b$ e quindi $a \otimes b \leq \min(a,b)$ per ogni $a, b \in [0,1]$. Infine, supponiamo $0 \leq a \leq c \leq 1$. Per ipotesi e per il lemma 4.40 allora $0 \otimes c = 0$ e $1 \otimes c = c$; per cui la continuità di $\otimes$ nella prima variabile implica di sicuro che esiste $z \in [0,1]$ tale che $z \otimes c = a$. Per ogni $b \in [0,1]$ abbiamo quindi $a \otimes b = (z \otimes c) \otimes b = z \otimes (c \otimes b) \overset{(5)}{\leq} c \otimes b$. In maniera analoga si dimostra che $\otimes$ è crescente nel secondo argomento.

**Osservazione 4.42.** L'applicazione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia definita da

$$a \otimes b := 1 - a - b + 2ab$$

La funzione $\otimes$ è evidentemente commutativa e continua e, come si verifica facilmente, anche associativa. Inoltre si ha
$a \otimes 1 = 1 - a - 1 + 2a = a$, per ogni $a \in [0,1]$.

Ma $0 \otimes 0 = 1$ e $0 \otimes 1 = 1 - 1 = 0$, per cui vediamo che $\otimes$ non è crescente in ogni suo argomento. La condizione $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$ nella proposizione 4.41 è perciò necessaria.

**Osservazione 4.43.** L'applicazione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia definita da

$$a \otimes b := 2\min(a, 1-a)\min(b, 1-b)$$

Anche in questo caso la funzione è continua, commutativa e associativa. Inoltre $a \otimes 0 = 2\min(a, 1-a)\min(0,1) = 0$ per ogni $a \in [0,1]$.

Però $1 \otimes 1 = 2\min(1,0)\min(1,0) = 0$

inoltre

$$0.5 \otimes 0.5 = 2\min(0.5, 0.5)\min(0.5, 0.5) = 0.5$$

Vediamo quindi che $\otimes$ non è crescente in ogni suo argomento. La condizione $1 \otimes 1 = 1$ nella proposizione 4.41 è perciò necessaria.

**Nota 4.44.** Le norme triangolari (o t-norme) sono state originariamente introdotte per poter formulare una legge che corrisponde alla disuguaglianza triangolare nell'ambito della teoria degli spazi metrici probabilistici. In questo contesto si assume che siano dati un insieme $X$ e per ogni $x, y \in X$ una funzione $F_{xy} : [0, \infty) \longrightarrow [0,1]$ tale che per $\varepsilon \geq 0$ si possa interpretare $F_{xy}(\varepsilon)$ come la probabilità che $x$ ed $y$ abbiano una distanza $\leq \varepsilon$. La disuguaglianza triangolare si esprime poi nella forma $F_{xz}(\varepsilon + \delta) \geq F_{xy}(\varepsilon) \otimes F_{yz}(\delta)$ con una t-norma $\otimes$. A questa teoria è dedicata la monografia di Schweizer/Sklar.

# 5. s-norme

**Definizione 5.1.** Una *s-norma* (o *t-conorma*) è un'applicazione $\ovee : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ tale che per ogni $x, y, z \in [0,1]$ siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $x \ovee y = y \ovee x$.
(2) $x \ovee (y \ovee z) = (x \ovee y) \ovee z$.
(3) $x \ovee 0 = x$
    $x \ovee 1 = 1$.
(4) $\ovee$ è crescente in ogni suo argomento.

Nella logica fuzzy le s-norme sono interpretate come unioni generalizzate per insiemi sfumati.

**Osservazione 5.2.** L'applicazione $\ovee : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia crescente in ogni suo argomento e tale che $x \ovee 0 = 0 \ovee x = x$ per ogni $x \in [0,1]$. Allora $x \ovee 1 = 1 \ovee x = 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Vediamo in particolare che nella definizione 5.1 la seconda delle due condizioni al punto (3) segue dalle altre.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $x \in [0,1]$. Siccome $1 = 0 \ovee 1 \leq x \ovee 1$, abbiamo $x \ovee 1 = 1$ e similmente $1 \ovee x = 1$.

**Definizione 5.3.** Per un'applicazione $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definiamo $\widehat{\otimes} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ tramite $x \widehat{\otimes} y := 1 - (1-x) \otimes (1-y)$. Dalla relazione $(1-x)\widehat{\otimes}(1-y) = 1 - x \otimes y$ si vede che $\widehat{\otimes}$ è ben definita, cioè che $x \widehat{\otimes} y \in [0,1]$ per ogni $x, y \in [0,1]$.

**Osservazione 5.4.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sia un'applicazione.
Allora $\widehat{\widehat{\otimes}} = \otimes$.

<u>Dimostrazione.</u> Per $x, y \in [0,1]$ abbiamo
$x \widehat{\widehat{\otimes}} y = 1 - (1-x)\widehat{\otimes}(1-y) = 1 - (1 - x \otimes y) = x \otimes y$.

**Lemma 5.5.** $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *sia un'applicazione. Allora:*

*(1)* $\otimes$ *è commutativa se e solo se* $\widehat{\otimes}$ *è commutativa.*
*(2)* $\otimes$ *è associativa se e solo se* $\widehat{\otimes}$ *è associativa.*
*(3)* $\otimes$ *è crescente in ogni suo argomento se e solo se* $\widehat{\otimes}$ *è crescente in ogni suo argomento.*

<u>Dimostrazione.</u> Per l'osservazione 5.4, in ciascun caso è sufficiente dimostrare una direzione. Siano $x, y, z \in [0,1]$.

(1) $\otimes$ sia commutativa. Allora

$$x \widehat{\otimes} y = 1 - (1-x) \otimes (1-y) = 1 - (1-y) \otimes (1-x) = y \widehat{\otimes} x$$

(2) $\otimes$ sia associativa. Allora

$$
\begin{aligned}
1-(x\widehat{\otimes}y)\widehat{\otimes}z &= (1-x\widehat{\otimes}y)\otimes(1-z)\\
&= (1-x)\otimes(1-y)\otimes(1-z)\\
&= (1-x)\otimes(1-y\widehat{\otimes}z)\\
&= 1-x\widehat{\otimes}(y\widehat{\otimes}z)
\end{aligned}
$$

(3) Sia $x \le y$. Allora $1-y \le 1-x$ e quindi $(1-y)\otimes(1-z) \le (1-x)\otimes(1-z)$. Ciò significa $1-y\widehat{\otimes}z \le 1-x\widehat{\otimes}z$, cioè $x\widehat{\otimes}z \le y\widehat{\otimes}z$. Pertanto $\widehat{\otimes}$ è crescente nel primo argomento.

**Proposizione 5.6.**

*(1)* $\otimes$ *sia una t-norma. Allora* $\widehat{\otimes}$ *è una s-norma.*

*(2)* $\varovee$ *sia una s-norma. Allora* $\widehat{\varovee}$ *è una t-norma.*

<u>Dimostrazione.</u>

(1) $\otimes$ sia una t-norma. Sia $x \in [0,1]$. Per il lemma 5.5 e l'osservazione 5.2 è sufficiente dimostrare che $x\widehat{\otimes}0 = z$. Però

$$x\widehat{\otimes}0 = 1-(1-x)\otimes(1-0) = 1-(1-x)\otimes 1 = 1-(1-x) = x$$

(2) $\varovee$ sia una s-norma. Sia $x \in [0,1]$. Per il lemma 5.5 è sufficiente dimostrare che $x\widehat{\varovee}1 = x$. Però

$$x\widehat{\varovee}1 = 1-(1-x)\varovee(1-1) = 1-(1-x)\varovee 0 = 1-(1-x) = 0$$

**Corollario 5.7.** *Un'applicazione* $\otimes : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *è una t-norma se e solo se* $\widehat{\otimes}$ *è una s-norma.*

<u>Dimostrazione.</u> Proposizione 5.6 e osservazione 5.4.

**Proposizione 5.8.** *Per le quattro t-norme fondamentali abbiamo:*

$$\widehat{\min}(x,y) = \max(x,y)$$

$$\widehat{x\cdot y} = x+y-xy$$

$$\widehat{T_L}(x,y) = \min(x+y,-1)$$

$$x\widehat{\square}y(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x,y \neq 0 \\ \max(x,y) & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

<u>Dimostrazione.</u> La verifica è immediata.

## 6. Isomorfismi di intervalli.

**Situazione 6.1.** $a, b, ..., x, y, ... \in \mathbb{R}$, quando non indicato diversamente.

**Lemma 6.2.** *Siano* $a < b$ *ed* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua ed iniettiva. Se* $f(a) < f(b)$*, allora* $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ *per ogni* $x \in [a, b]$*, altrimenti* $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ *per ogni* $x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo $f(a) < f(b)$.

(1) Sia $x \in [a, b]$ tale che $f(x) < f(a)$. Consideriamo la funzione $g = \underset{x}{\bigcirc} \alpha - f(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Come si vede, $g$ è continua in $[a, b]$ e si ha $g(a) = \alpha - f(a) > 0$ e $g(b) = \alpha - f(b) < 0$. Per il teorema del valor medio esiste allora $t \in [x, b]$ tale che $f(t) = f(a)$. Tuttavia, dal momento che $a < x \leq t \leq b$, necessariamente $t \neq a$, in contraddizione all'ipotesi che $f$ sia iniettiva.

(2) Analogamente si può dimostrare che non si verifica $f(x) > f(b)$.

**Proposizione 6.3.** *Siano* $a < b$ *ed* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua ed iniettiva. Se* $f(a) < f(b)$*, allora* $f$ *è strettamente crescente, altrimenti* $f$ *è strettamente decrescente.*

Dimostrazione. Assumiamo che $f(a) < f(b)$. Siano $\alpha, \beta$ con $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Per il lemma 6.2 allora $f(a) < f(\beta) \leq f(b)$. La restrizione di $f$ all'intervallo $[a, \beta]$ è ancora continua ed iniettiva. Dal lemma 6.2 segue che $f(a) \leq f(\alpha) \leq f(\beta)$ e quindi $f(\alpha) < f(\beta)$ per l'iniettività di $f$.

**Definizione 6.4.** Un'applicazione $f : I \longrightarrow J$ tra due insiemi parzialmente ordinati si dice un *isomorfismo d'ordine* (o un *isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati*), se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f$ è biettiva.
(2) $f$ ed $f^{-1}$ sono entrambe monotone (ovvero crescenti).

**Osservazione 6.5.** $I$ sia un insieme totalmente ordinato, $J$ un insieme parzialmente ordinato ed $f : I \longrightarrow J$ un'applicazione.
Allora sono equivalenti:

(1) $f$ è un isomorfismo d'ordine.
(2) $f$ è biettiva e monotona.
(3) $f$ è suriettiva e strettamente crescente.

Dimostrazione. (1)$\Longrightarrow$(2): Chiaro.

(2)$\Longrightarrow$(3): Chiaro.

(3)$\Longrightarrow$(1): Siano $x, y \in I$ con $x \neq y$. Siccome $I$ è totalmente ordinato, si ha ad esempio $x < y$. Per ipotesi $f(x) < f(y)$ e ciò mostra che $f$ è iniettiva e quindi biettiva. Dimostriamo che $f^{-1}$ è monotona. Siano dati $u, v \in J$ con $u \leq v$. Posto $x := f^{-1}(u)$, $y := f^{-1}(v)$, dobbiamo dimostrare che $x \leq y$. Usando ancora l'ipotesi che $I$ sia totalmente ordinato, se non valesse $x \leq y$ avremmo $y < x$. Però allora $f(y) < f(x)$, cioè $v < u$, una contraddizione.

**Lemma 6.6.** *$X$ sia uno spazio topologico compatto, $Y$ uno spazio topologico di Hausdorff ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione biettiva e continua. Allora $f$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Questo è un risultato ben noto della topologia generale. La dimostrazione si trova ad esempio in Chiodera, pag. 20.

**Proposizione 6.7.** *Siano $a < b$ e $c < d$ ed $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ un'applicazione suriettiva. Allora sono equivalenti:*

*(1) $f$ è iniettiva e continua.*
*(2) $f$ è strettamente crescente o strettamente decrescente.*
*(3) $f$ è un isomorfismo o un antiisomorfismo d'ordine.*
*(4) $f$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Possiamo assumere $f(a) < f(b)$.

(1)$\Longrightarrow$(2): Proposizione 6.3.

(2)$\Longrightarrow$(1): Avendo assunto $f(a) < f(b)$, la $f$ deve essere strettamente crescente e quindi sicuramente iniettiva. Dobbiamo dimostrare che $f$ è continua. Sia $a < x_0 < b$ (per $x_0 = a$ o $x_0 = b$ la dimostrazione è simile). Per ipotesi $f$ è suriettiva e si ha $f(x_0) \in (c, d)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ per cui si abbia $[f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon] \subset [c, d]$, esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_0 < x_2$ e $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$. Poniamo $\delta := \min(x_0 - x_1, x_2 - x_0)$. Sia $|x - x_0| < \delta$. Allora $x_1 < x < x_2$ e quindi $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$, da cui segue che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(2)$\Longleftrightarrow$(3): Osservazione 6.5.

(1)$\Longleftrightarrow$(4): Lemma 6.6.

# 7. Generatrici

**Situazione 7.1.** $\otimes$ sia una t-norma *continua ed archimedea*,
$n, m \in \mathbb{N}$. Come nella definizione 4.19 per ogni $n \in \mathbb{N}$ è definita la potenza $p_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Mediante uno studio dettagliato di queste funzioni otteniamo il teorema fondamentale di rappresentazione.
Seguiamo Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 26-33.

$x, y, a, b, \ldots \in [0,1]$. Denotiamo con $(\mathbb{Q} > 0)$ l'insieme dei numeri razionali $> 0$.

**Osservazione 7.2.** La funzione $p_n$ è continua e crescente.
Per $n \in \mathbb{N} + 1$, inoltre, $p_n(0) = 0$ e $p_n(1) = 1$; in questo modo vediamo che per $n \geq 1$ la funzione $p_n$ è suriettiva.

**Osservazione 7.3.**

$$p_{nm} = p_n \circ p_m$$

$$p_{n+m}(a) = p_n(a) \otimes p_m(a)$$

**Osservazione 7.4.** $p_{n+1} \leq p_n$.

Dimostrazione. $p_{n+1}(x) = x \otimes p_n(x) \leq p_n(x)$.

**Lemma 7.5.**

(1) *Sia* $0 < p_n(x) < 1$. *Allora* $p_{n+1}(x) < p_n(x)$.
(2) *Sia* $0 < p_{n+1}(x) < 1$. *Allora* $p_{n+1}(x) < p_n(x)$.

Dimostrazione. (1) L'ipotesi implica $0 < x < 1$. Dalla proposizione 4.27 segue che $p_{n+1} = x \otimes p_n < p_n$.

(2) Anche qui l'ipotesi implica $0 < x < 1$ e quindi $p_n(x) < 1$, mentre $0 < p_n(x)$ per l'osservazione 7.4. L'enunciato segue dal punto (1).

**Osservazione 7.6.** $p_n(a \otimes b) = p_n(a) \otimes p_n(b)$.

Dimostrazione. L'enunciato è banale per $n = 1$. Sia $n \geq 1$.
Allora, usando la commutatività e l'associatività di $\otimes$, abbiamo
$p_n(a \otimes b) = a \otimes b \otimes \ldots \otimes a \otimes b = a \otimes \ldots \otimes a \otimes b \otimes \ldots \otimes b = p_n(a) \otimes p_n(b)$.

**Osservazione 7.7.** Siano $a < 1$ e $p_n(b) > 0$. Per $n \geq 1$ allora

$$p_n(a \otimes b) < p_n(b).$$

Dimostrazione. $a < 1$ implica $p_n(a) < 1$, se $n \geq 1$.
Utilizzando l'osservazione 7.6 e la proposizione 4.27 si ottiene
$p_n(a \otimes b) = p_n(a) \otimes p_n(b) < p_n(b)$.

**Lemma 7.8.** *Siano* $p_n(y) > 0$ *ed* $x < y$. *Per* $n \geq 1$ *allora*

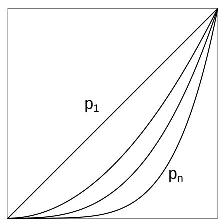
$$p_n(x) < p_n(y).$$

Dimostrazione. Per la continuità di $\otimes$ esiste $z \in [0,1)$ tale che
$x = z \otimes y$. Per l'osservazione 7.7 abbiamo $p_n(x) = p_n(z \otimes y) < p_n(y)$.

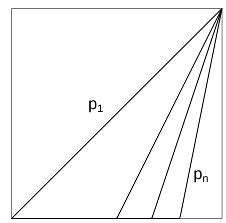
**Proposizione 7.9.** *Se esiste un elemento $\otimes$-nilpotente in $(0,1)$, allora tutti gli elementi di $[0,1)$ sono $\otimes$-nilpotenti.*

Dimostrazione. Sia $a \in (0,1)$ $\otimes$-nilpotente e $b \in (0,1)$. Allora esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $p_n(a) = 0$ e $p_m(b) < a$.
Allora $p_{nm}(b) = p_n(p_m(b)) \leq p_n(a) = 0$ e quindi $p_{nm}(b) = 0$.

**Osservazione 7.10.** Dai risultati finora dimostrati si vede che i grafici delle funzioni $p_n$ sono disposti nel quadrato unitario in uno dei due modi illustrati nelle figure.




$x \otimes y = xy$




$x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$

In entrambi i casi, il grafico di $p_n$ è (per $n \geq 1$) strettamente crescente alla destra dell'ultimo valore $z$ per cui $p_n(z) = 0$ (proposizione 7.8).
I grafici decrescono in modo stretto nei valori interni (lemma 7.5).

In accordo con la proposizione 7.9 osserviamo che o (come a sinistra) i grafici non toccano l'asse delle x nei punti interni, oppure (come a destra) per ogni punto interno $x$ esiste un $n$ con $p_n(x) = 0$.

**Osservazione 7.11.** Per rendere più trasparente la costruzione, dimostriamo il teorema di rappresentazione considerando prima il caso che $\otimes$ sia cancellativa. Non sarebbe difficile tuttavia trattare subito il caso generale, come mostrato in Alsina/Frank/Schweizer. Useremo le equivalenze formulate nella definizione 4.36 e nel lemma 4.37.

**Definizione 7.12.** $\otimes$ sia cancellativa. Per il lemma 7.8 allora la funzione $p_n$ è strettamente crescente e quindi un omeomorfismo (proposizione 6.7) per ogni $n \geq 1$. Denotiamo con $q_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ l'inversa di $p_n$. Naturalmente anche $q_n$ è strettamente crescente e un omeomorfismo. Si noti che $q_n$ è definita solo per $n \geq 1$.

**Proposizione 7.13.** *$\otimes$ sia cancellativa. Siano $x \in (0,1)$ ed $n \geq 1$. Allora $q_{n+1}(x) > q_n(x)$.*

Dimostrazione. Sia $q_{n+1}(x) \leq q_n(x)$.
Allora $p_n(q_{n+1}(x)) \leq p_n(q_n(x)) = x$.

D'altra parte $0 < x = p_{n+1}(q_{n+1}(x)) < 1$, per cui il lemma 7.5 implica $x = p_{n+1}(q_{n+1}(x)) < p_n(q_{n+1}(x)) \leq x$, una contraddizione.

La condizione di cancellatività era necessaria solo affinché la funzione $q_n$ sia definita. Infatti l'enunciato della proposizione rimane valido anche nel caso generale, come vedremo.

**Proposizione 7.14.** $\otimes$ *sia cancellativa. Per* $x > 0$ *allora* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(x) = 1$.

Dimostrazione. Per la proposizione 7.13 la successione $\bigcirc_x q_n(x)$ è crescente (anche per x=1) e quindi esiste $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(x) := a$. Assumiamo che $a < 1$. Allora, ancora per la proposizione 7.13, $q_n(x) \leq a$ per ogni $n \geq 1$, per cui $x = p_n(q_n(x)) \leq p_n(a)$. Ciò implica in primo luogo che $x, a \in (0,1)$. Ma allora abbiamo una contraddizione all'ipotesi che la t-norma $\otimes$ sia archimedea.

**Osservazione 7.15.** $\otimes$ sia cancellativa.

Allora $q_{nm} = q_n \circ q_m$ per ogni $n, m \geq 1$.

Dimostrazione. Ciò segue direttamente dall'osservazione 7.3.

**Lemma 7.16.** $\otimes$ *sia cancellativa e* $k, n, m \geq 1$.

*Allora* $p_m \circ q_n = p_{km} \circ q_{kn}$.

Dimostrazione. Dalle osservazioni 7.15 e 7.3 abbiamo
$p_{km} \circ q_{kn} = p_m \circ p_k \circ q_k \circ q_n = p_m \circ q_n$.

**Definizione 7.17.** $\otimes$ sia cancellativa. Per $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N} + 1$ poniamo $p_\alpha := p_m \circ q_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

Per il lemma 7.16 $p_\alpha$ è ben definita per ogni $\alpha \in (\mathbb{Q} > 0)$; la definizione non dipende cioè dalla scelta di $m$ ed $n$ e siccome $p_1 = \mathrm{id}$ vediamo che la nuova definizione coincide con quella usata prima nel caso $\alpha = m \in \mathbb{N} + 1$.

È chiaro che $p_\alpha$ è strettamente crescente ed un omeomorfismo.

**Lemma 7.18.** $\otimes$ *sia cancellativa ed* $\alpha, \beta \in (\mathbb{Q} > 0)$. *Allora:*

*(1)* $0 < p_\alpha(x) < 1 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$.
*(2) Sia* $\alpha \leq \beta$. *Allora* $p_\beta(x) \leq p_\alpha(x)$.
*(3) Sia* $\alpha < \beta$. *Allora* $p_\beta(x) < p_\alpha(x)$ *per ogni* $x \in (0,1)$.

Dimostrazione. (1) Chiaro perchè $p_\alpha$ è un isomorfismo d'ordine.

(2) Abbiamo ad esempio $\alpha = \frac{m}{n}$ e $\beta = \frac{r}{s}$ con $m, n, r, s \in \mathbb{N} + 1$ e quindi $\alpha = \frac{ms}{ns}$, $\beta = \frac{nr}{ns}$ con $ms \leq nr$. Per l'osservazione 7.4 si ha allora $p_\alpha = p_{ms} \circ q_{ns} \geq p_{nr} \circ q_{ns} = p_\beta$.

(3) Siano $\alpha, \beta, m, n, r, s$ come nel punto (2) con $ms < nr$. Per $x \in (0,1)$ allora $0 < q_{ns}(x) < 1$ e quindi, usando il punto (1) e il lemma 7.5,
$p_\alpha(x) = p_{ms}(q_{ns}(x)) > p_{nr}(q_{ns}(x)) = p_\beta(x)$.

**Osservazione 7.19.** $\otimes$ sia cancellativa ed $m, n \in \mathbb{N} + 1$.
Allora $p_m \circ p_n^{-1} = p_n^{-1} \circ p_m$.

Dimostrazione. Usando l'osservazione 7.3 abbiamo $p_m \circ p_n = p_n \circ p_m$ e quindi $p_n^{-1} \circ p_m \circ p_n = p_m$ e $p_n^{-1} \circ p_m = p_m \circ p_n^{-1}$.

**Osservazione 7.20.** $\otimes$ sia cancellativa ed $\alpha, \beta \in (0,1)$. Allora:

(1) $p_\alpha^{-1} = p_{1/\alpha}$.
(2) $p_{\alpha\beta} = p_\alpha \circ p_\beta$.
Come nell'osservazione 7.19 ciò implica $p_\alpha \circ p_\beta^{-1} = p_\beta^{-1} \circ p_\alpha$.
(3) $p_{\alpha+\beta}(x) = p_\alpha(x) \otimes p_\beta(x)$ per ogni $x \in [0,1]$.

Dimostrazione. Siano $\alpha = \frac{m}{n}$, $\beta = \frac{r}{s}$ con $m, n, r, s \in \mathbb{N} + 1$.

(1) $p_\alpha^{-1} = (p_m \circ q_n)^{-1} = q_n^{-1} \circ p_m^{-1} = p_n \circ q_m = p_{\frac{n}{m}} = p_{\frac{1}{\alpha}}$.

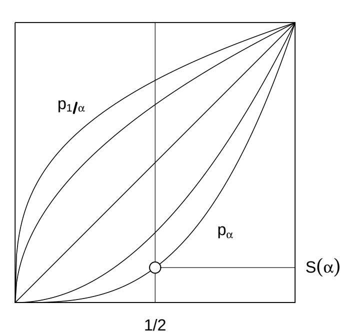
(2)
$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta} &= p_{\frac{mr}{ns}} = p_{mr} \circ q_{ns} = p_m \circ p_r \circ (p_{ns})^{-1} = p_m \circ p_r \circ p_s^{-1} \circ p_n^{-1} \\ &= p_m \circ p_n^{-1} \circ p_r \circ p_s^{-1} = p_{\frac{m}{n}} \circ p_{\frac{r}{s}} = p_\alpha \circ p_\beta. \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} p_{\alpha+\beta}(x) &= p_{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}(x) = p_{\frac{ms+nr}{ns}}(x) = p_{ms+nr}(q_{ns}(x)) \\ &= p_{ms}(q_{ns}(x)) \otimes p_{nr}(q_{ns}(x)) = p_m(q_n(x)) \otimes p_r(q_s(x)) \\ &= p_\alpha \otimes p_\beta. \end{aligned}$$

**Definizione 7.21.** $\otimes$ sia cancellativa. Definiamo la funzione $S : (\mathbb{Q} > 0) \longrightarrow [0,1]$ ponendo $S(\alpha) := p_\alpha(\frac{1}{2})$.

Dalla proposizione 7.18 segue che $S$ è strettamente decrescente.

**Osservazione 7.22.** $\otimes$ sia cancellativa. Da quanto visto finora, i grafici delle funzioni $p_\alpha$ per $\alpha \in (\mathbb{Q} > 1)$ si susseguono al di sotto della diagonale $y = x$ come nella figura; le funzioni $p_\beta$ per $\beta \in (0 < \mathbb{Q} < 1)$ si ottengono dalle prime tramite riflessione rispetto alla diagonale; ciò è evidente perchè sappiamo che $p_{1/\alpha} = p_\alpha^{-1}$.




Per definizione $S(\alpha) = p_\alpha(\frac{1}{2})$ è uguale alla coordinata $y$ dell'intersezione del grafico di $p_\alpha$ con la retta verticale $x = \frac{1}{2}$.

**Proposizione 7.23.** *$\otimes$ sia cancellativa ed $\alpha, \beta \in (\mathbb{Q} > 0)$.*

*Allora $S(\alpha + \beta) = S(\alpha) \otimes S(\beta)$.*

Dimostrazione. Dall'osservazione 7.20 abbiamo
$S(\alpha+\beta) = p_{\alpha+\beta}(\frac{1}{2}) = p_\alpha(\frac{1}{2}) \otimes p_\beta(\frac{1}{2}) = S(\alpha) \otimes S(\beta)$.

**Definizione 7.24.** $X$ ed $Y$ siano spazi topologici, $A \subset X$ ed $f : A \longrightarrow Y$ un'applicazione. Siano $x \in X$ ed $y \in Y$. Diciamo allora che $f$ converge su $A$ ad $x$ e scriviamo $\lim\limits_{a\to x, a\in A} f(a) = y$ se per ogni $V \in \mathcal{U}(y)$ esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $f(A \cap U) \subset V$.

La condizione è naturalmente soddisfatta se $x \notin \overline{A}$; tipicamente si usa questa definizione per $x \in \overline{A}$, ad esempio quando $\overline{A} = X$.

**Osservazione 7.25.** $\otimes$ sia cancellativa. Allora

(1) $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0, \alpha\in(\mathbb{Q}>0)} S(\alpha) = 1$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow \infty, \alpha\in(\mathbb{Q}>0)} S(\alpha) = 0$.

Dimostrazione. (1) Per la proposizione 7.13 è sufficiente dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} S(\frac{1}{n}) = 1$. Però $S(\frac{1}{n}) = q_n(\frac{1}{2})$ e l'enunciato segue dalla proposizione 7.14.

(2) Anche qui è sufficiente dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 0$.
Però $S(n) = p_n(\frac{1}{2})$ e l'enunciato segue dal lemma 4.22.

**Definizione 7.26.** $\otimes$ sia cancellativa. Poniamo $S(0) := 1$. In questo modo $S$ diventa una funzione $(\mathbb{Q} \geq 0) \longrightarrow [0,1]$.

È chiaro che anche la funzione così estesa è strettamente decrescente e che la proposizione 7.23 rimane valida per $\alpha, \beta \in (\mathbb{Q} \geq 0)$.

**Proposizione 7.27.** *$\otimes$ sia cancellativa. La funzione $S : (\mathbb{Q} \geq 0) \longrightarrow [0,1]$ è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dal momento che $\otimes$ è uniformemente continua su $[0,1]^2$, esiste $\delta > 0$ tale che $|x\otimes y - u\otimes v| < \varepsilon$ se $|x-u| < \delta$ e $|y-v| < \delta$. Scegliamo $h \in (\mathbb{Q} > 0)$ in modo tale che $0 < 1 - S(h) < \delta$. Allora, siccome $S$ è strettamente decrescente, per la proposizione 7.23 abbiamo
$0 \leq S(r) - S(r+h) = S(r)\otimes S(0) - S(r)\otimes S(h) = S(r)\otimes 1 - S(r)\otimes S(h) < \varepsilon$
per ogni $r \in (\mathbb{Q} \geq 0)$. Per $r \geq h$ si ha

$$\begin{aligned} 0 \leq S(r-h) - S(r) &= S(r-h) - S(r-h+h) \\ &= S(r-h)\otimes 1 - S(r-h)\otimes S(h) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Per $r < h$, dal momento che $S$ è strettamente decrescente, si ha $S(r) \geq S(h)$ e quindi $1 - S(r) < \delta$, da cui
$S(r-h) - S(r) \leq 1 - S(r) = 1\otimes 1 - 1\otimes S(r) < \varepsilon$. Pertanto, per ogni $r \in (\mathbb{Q} \geq 0)$ otteniamo $S(r-h) - \varepsilon \leq S(r) \leq S(r+h) + \varepsilon$, $h$ è sufficientemente piccolo.

**Lemma 7.28.** *$X$ sia uno spazio topologico ed $Y$ uno spazio regolare e di Hausdorff (ad esempio uno spazio compatto e di Hausdorff). Siano $A \subset X$ ed $f : A \longrightarrow X$ un'applicazione continua. Per ogni $x \in X$ esista* *il limite* $\lim\limits_{a \longrightarrow x, a \in A} f(x)$. *Allora* $f$ *può essere estesa in un unico modo ad un'applicazione continua* $X \longrightarrow Y$.

Dimostrazione. Schubert, pag. 55.

**Nota 7.29.** $\otimes$ sia cancellativa. Consideriamo la funzione $S : (\mathbb{Q} \geq 0) \longrightarrow [0,1]$.

Per la monotonia di $S$ è chiaro che il limite $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow x, \alpha \in (\mathbb{Q} > 0)} S(\alpha)$ esiste per ogni $x \in [0, \infty]$. Tenendo conto della proposizione 7.27, dal lemma 7.28 segue che possiamo estendere $S$ ad un'applicazione continua $[0, \infty] \longrightarrow [0,1]$ che denotiamo ancora con $S$.

Si noti che $S(0) = 1$ ed $S(\infty) = 0$.

**Proposizione 7.30.** *L'applicazione* $S : [0, \infty] \longrightarrow [0,1]$ *è strettamente decrescente ed un omeomorfismo.*

Dimostrazione. $S$ è continua per costruzione ed è chiaro che $S$ è strettamente decrescente e quindi iniettiva. Siccome $S(0) = 1$ e $S(\infty) = 0$, dalla continuità di $S$ segue che $S$ è anche suriettiva. Il lemma 6.6 implica che $S$ è un omeomorfismo.

**Osservazione 7.31.** Si potrebbe anche, in modo forse più intuitivo, definire le potenze $p_u : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ per ogni $u \in [0, \infty]$ e porre quindi $S(u) := p_u\left(\frac{1}{2}\right)$ con la stessa interpretazione geometrica che abbiamo dato ad $S(\alpha)$ per $\alpha \in (\mathbb{Q} > 0)$ nell'osservazione 7.22.

**Proposizione 7.32.** $\otimes$ *sia cancellativa. Allora* $S(u + v) = S(u) \otimes S(v)$ *per ogni* $u, v \in [0, \infty]$.

Dimostrazione. Naturalmente poniamo $u + \infty = \infty$ per ogni $u \in [0, \infty]$. Per $u, v \in [0, \infty)$ l'enunciato segue dalla proposizione 7.23 e dalla continuità di $\otimes$ e di $S$. Per $u \in [0, \infty]$ abbiamo infine $S(u + \infty) = S(\infty) = 0$ e $S(u) \otimes S(\infty) = S(u) \otimes 0 = 0$.

**Definizione 7.33.** Una *generatrice* è una funzione continua e strettamente decrescente $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty]$ tale che $f(1) = 0$.

**Osservazione 7.34.** $f$ sia una generatrice. Allora:

(1) Poiché l'immagine di $f$ è un compatto, dal lemma 6.6 segue che $f$ induce un omeomorfismo tra $[0,1]$ ed $f([0,1])$.
(2) In particolare, $f$ è un omeomorfismo se è suriettiva.
(3) $f$ è suriettiva $\Longleftrightarrow f(0) = \infty$.

Dimostrazione. (1) e (2): Chiari.

(3): Sia $f(0) = \infty$. Siccome $f(1) = 0$, dalla continuità di $f$ segue che $f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0, \infty]$.

**Teorema 7.35.** $\otimes$ *sia cancellativa. Allora esiste una generatrice suriettiva* $g : [0,1] \longrightarrow [0, \infty]$ *tale che*

$$x \otimes y = g^{-1}(g(x) + g(y)) \qquad (*)$$

*per ogni* $x, y \in [0, 1]$. *La relazione (*) è infatti soddisfatta per* $g = S^{-1}$.

<u>Dimostrazione.</u> Dalla proposizione 7.30 segue che $g$ è strettamente decrescente ed un omeomorfismo. Inoltre $g(1) = 0$ perchè $S(0) = 1$, quindi $g$ è una generatrice suriettiva. Siano $x, y \in [0, 1]$. Con $g := S^{-1}$ siano $u = g(x)$ e $v = g(y)$, cioè $x = S(u)$ ed $y = S(v)$. Per la proposizione 7.32 risulta $x \otimes y = S(u + v) = g^{-1}(g(x) + g(y))$.

**Definizione 7.36.** Nella situazione della proposizione 7.35 $g$ si chiama una *generatrice* di $\otimes$. Generalizzeremo questo concetto a t-norme (continue ed archimedee) non cancellative; in tal caso le generatrici non saranno più suriettive.

**Esempio 7.37.** Sia $\otimes = \bigcirc_{x,y} xy$ il prodotto. $\otimes$ è una t-norma continua, archimedea e cancellativa. Per $n \in [0, \infty]$ evidentemente
$S(n) = 2^{-n}$ e quindi $g(x) = -\log_2 x$ per $x \in [0, 1]$ (e quindi $g(0) = \infty$).

Naturalmente si potrebbe verificare direttamente che $g$ è una generatrice di $\otimes$:

$$g^{-1}(g(x) + g(y)) = 2^{-(-\log_2 x - \log_2 y)} = 2^{\log_2 x + \log_2 y} = 2^{\log_2 xy} = xy$$

È chiaro che anche con $g(x) := -\log x$ (logaritmo in base $e$) si ottiene una generatrice.

**Nota 7.38.** Trattiamo adesso il caso generale in cui $\otimes$ non sia necessariamente cancellativa. Molti ragionamenti sono soltanto ovvie modifiche di quanto visto nel caso cancellativo e quindi non sempre li ripetiamo.

**Definizione 7.39.** Per $n \geq 1$ sia $\lambda_n := \sup\{x \in [0, 1] \mid p_n(x) = 0\}$. Siccome $p_n(0) = 0$, $\lambda_n$ è ben definita. Dalla continuità di $\otimes$ segue inoltre che $p_n(\lambda_n) = 0$; usando anche la monotonia di $\otimes$ abbiamo quindi

$$(p_n = 0) = [0, \lambda_n]$$

$\lambda_n$ si chiama l' *n-radicale* di $\otimes$.

**Proposizione 7.40.** *Sia* $n \geq 1$. *Allora:*

*(1)* $0 \leq \lambda_n < 1$. *È chiaro inoltre che* $\lambda_1 = 0$.
*(2)* $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$.
*(3)* $p_n$ *è strettamente crescente su* $(\lambda_n, 1]$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) e (2): Evidenti.

(3): Lemma 7.8.

**Osservazione 7.41.** Sono equivalenti:

(1) $\otimes$ è cancellativa.

(2) $\lambda_2 = 0$.
(3) $\lambda_n = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Lemma 4.37.

**Osservazione 7.42.** $\otimes$ sia cancellativa. Allora $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$.

Dimostrazione. Sia $x < 1$. L'ipotesi implica, come sappiamo dalla proposizione 7.9, che $x$ è nilpotente. Perciò esiste $n \in \mathbb{N}+1$ tale che $p_n(x) = 0$. Allora $\lambda_n \geq x$ e la monotonia della successione $\bigcirc\limits_n \lambda_n$ (punto (2) nella proposizione 7.40) implica che $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$.

**Osservazione 7.43.** Nelle figure dell'osservazione 7.10 $\lambda_n$ è la prima intersezione, partendo da destra, del grafico di $p_n$ con l'ascissa $y = 0$. L'enunciato della proposizione 7.42 dice quindi che i punti di intersezione o sono uguali a $0$ (caso cancellativo) oppure tendono a $1$.

**Definizione 7.44.** Per $n \geq 1$ sia $f_n : [\lambda_n, 1] \longrightarrow [0,1]$ la restrizione di $p_n$ all'intervallo $[\lambda_n, 1]$. Come osservato nella proposizione 7.40, $f_n$ è un isomorfismo d'ordine e quindi è biettiva. Definiamo allora le applicazioni $q_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tramite

$$q_n(x) := \begin{cases} f_n^{-1}(x) & \text{per } x \in [\lambda_n, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel caso cancellativo $f_n = p_n$ per ogni $n \geq 1$ e la norma definita è in accordo con la notazione usata in precedenza.

**Nota 7.45.** Anche nel caso generale definiamo prima $p_\alpha$ per ogni $\alpha \in (\mathbb{Q} > 0)$, ponendo $p_\alpha = p_m \circ q_n$ per $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}+1$.

Come nel caso cancellativo otteniamo poi un'applicazione $S : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ ponendo prima $S(\alpha) = p_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$ per $\alpha \in (\mathbb{Q} > 0)$ ed estendendo $S$ in modo continuo a $[0,\infty]$. Di nuovo

$$S(u+v) = S(u) \otimes S(v)$$

per ogni $u, v \in [0,\infty]$. La funzione $S$ è continua e decrescente con $S(0) = 1$ ed $S(\infty) = 0$.

Se quindi poniamo $\rho := \inf\{u \in [0,\infty] \mid S(u) = 0\}$, allora $\rho$ è ben definito, $0 < \rho \leq \infty$ e $S(u) = 0$ per ogni $u \geq \rho$.

Nell'intervallo $[0,\rho]$ la funzione $S$ è invece strettamente decrescente. La restrizione $S_0 : [0,\rho] \longrightarrow [0,1]$ di $S$ a $[0,\rho]$ è perciò un omeomorfismo (strettamente) decrescente. In particolare $S_0(0) = 1$ ed $S_0(\rho) = 0$.

Poniamo $g_0 := S_0^{-1}$ e denotiamo con $g : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ l'applicazione definita dal diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g_0 = S_0^{-1}"'] & {[0,\infty]} \arrow[r, "S"] & {[0,1]} \\
& {[0,\rho]} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "S_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

in cui $i$ è l'inclusione. Da questo diagramma si vede anche che $S \circ g = id_{[0,1]}$.

Si noti che per definizione $g(0) = g_0(0) = \rho$ e $g(1) = g_0(1) = 0$.

**Proposizione 7.46.** *Siano $x, y \in [0,1]$. Con $S$ e $g$ come nella nota 7.45 abbiamo allora $x \otimes y = S(g(x) + g(y))$.*

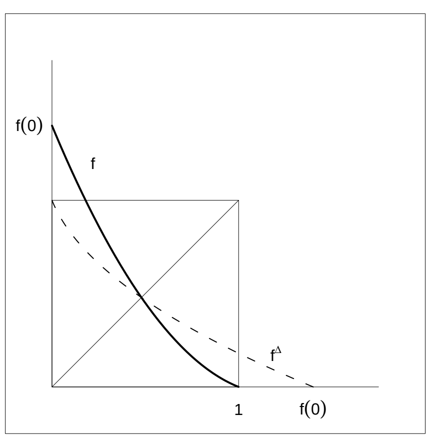
Dimostrazione. Poniamo $u := g(x)$, $v := g(y)$. Nella nota 7.45 abbiamo osservato che $S(u+v) = S(u) \otimes S(v)$, per cui
$S(g(x) + g(y)) = S(g(x)) \otimes S(g(y)) = x \otimes y$.
Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $S \circ g = id_{[0,1]}$, come visto alla fine della nota 7.45.

**Definizione 7.47.** Sia data una generatrice $f$. Come nel capitolo 6 si vede che $f([0,1]) = [0, f(0)]$ e che l'applicazione
$f_0 = \underset{x}{\bigcirc} f(x) : [0,1] \longrightarrow [0, f(0)]$ è un omeomorfismo strettamente decrescente; si noti però che può accadere che $f(0) = \infty$.

Allora l'applicazione $f^{\triangleleft} : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$
f^{\triangleleft}(u) := \begin{cases} f_0^{-1}(u) & \text{per } u \le f(0) \\ 0 & \text{per } u \ge f(0) \end{cases}
$$

si chiama la *pseudoinversa* di $f$. Si noti che in particolare $f^{\triangleleft}(0) = 1$ e $f^{\triangleleft}(\infty) = 0$. È immediato che $f^{\triangleleft}$ è continua e decrescente e su $[0, f(0)]$ un omeomorfismo.



Abbiamo di nuovo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_0"'] & {[0,\infty]} \arrow[r, "f^{\Delta}"] & {[0,1]} \\
& {[0,f(0)]} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f_0^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

da cui si vede che $f^{\triangleleft} \circ f = id_{[0,1]}$. Si osservi che $f$ è biettiva se e solo se è commutativa e che in tal caso $f^{\triangleleft} = f^{-1}$.

**Osservazione 7.48.** Nella situazione della definizione 7.47 si ha

$$f(f^{\triangleleft}(u)) = \min(u, f(0))$$

per ogni $u \in [0, \infty]$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) Sia $u \leq f(0)$. Allora $f^{\triangleleft}(u) = f_0^{-1}(u)$ e quindi $f(f^{\triangleleft}(u)) = f(f_0^{-1}(u)) = f_0(f_0^{-1}(u)) = u = \min(u, f(0))$.

(2) Sia $u \geq f(0)$. Allora $f^{\triangleleft}(u) = 0$ e quindi $f(f^{\triangleleft}(u)) = f(0) = \min(u, f(0))$.

**Osservazione 7.49.** $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty]$ sia una generatrice, $x \in [0,1]$ ed $u \in [0, \infty]$. Allora:

(1) $f^{\triangleleft}(u) = 0 \Longleftrightarrow u \geq f(0)$.
(2) $f(x) = u \Longrightarrow f^{\triangleleft}(u) = x$.
(3) Se $u < f(0)$, allora $f^{\triangleleft}(u) = x \Longleftrightarrow f(x) = u$.

**Osservazione 7.50.** Con le notazioni dell'osservazione 7.45 abbiamo:

(1) La funzione $g : [0,1] \longrightarrow [0, \infty]$ è una generatrice.
(2) $S = g^{\triangleleft}$.

<u>Dimostrazione.</u> (1): Chiaro.

(2): Abbiamo visto che $\rho = g(0)$. Sia $u \in [0, \infty]$. Se $u \leq \rho$, allora $S(u) = g_0^{-1}(u)$. Se invece $u \geq \rho$, allora $S(u) = 0$ per definizione di $\rho$.

**Teorema 7.51.** *Esiste una generatrice $g$ tale che*

$$x \otimes y = g^{\triangleleft}(g(x) + g(y))$$

*per ogni* $x, y \in [0,1]$.

<u>Dimostrazione.</u> Proposizione 7.46 ed osservazione 7.50.

**Definizione 7.52.** Nella situazione del teorema 7.51 $g$ si dice una generatrice di $\otimes$. Nel caso cancellativo questa definizione è in accordo, come si vede facilmente, con la definizione 7.36.

**Definizione 7.53.** $f$ sia una generatrice. Allora definiamo un'applicazione $\oplus_f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ mediante $x \oplus_f y := f^{\lhd}(f(x) + f(y))$.

**Proposizione 7.54.** *Nella situazione della definizione 7.53 l'applicazione $\oplus_f$ è una t-norma continua ed archimedea.*

Dimostrazione. Innanzitutto facciamo vedere che $\oplus_f$ è una t-norma. È chiaro che $\oplus_f$ è commutativa e che $x \oplus_f 1 = f^{\lhd}(f(x) + f(1)) = f^{\lhd}(f(x)) = x$. Inoltre, dal momento che $f$ e $f^{\lhd}$ sono decrescenti, $x \oplus_f$ ècrescente in ogni argomento. Facciamo vedere adesso che $x \oplus_f$ è associativa:

$$\begin{aligned} x \oplus_f (y \oplus_f z) &= f^{\lhd}(f(x) + f(y \oplus_f z)) \\ &= f^{\lhd}(f(x) + f(f^{\lhd}(f(y) + f(z)))) \\ &= f^{\lhd}(f(x) + \min(f(y) + f(z), f(0))) \end{aligned}$$

Ora, se noi applichiamo la funzione $f$ otteniamo

$$\begin{aligned} &f(f^{\lhd}(f(x) + \min(f(y) + f(z), f(0)))) = \\ &\min(f(x) + \min(f(y) + f(z), f(0)), f(0)) = \\ &\min(\min(f(x) + f(y) + f(z), f(x) + f(0)), f(0)) = \\ &\min(f(x) + f(y) + f(z), f(0)) \end{aligned}$$

In maniera analoga, se consideriamo $(x \oplus_f y) \oplus_f z$ abbiamo

$$\begin{aligned} (x \oplus_f y) \oplus_f z &= f^{\lhd}(f(x \oplus_f y) + f(z)) \\ &= f^{\lhd}(f(f^{\lhd}(f(x) + f(y))) + f(z)) \\ &= f^{\lhd}(\min(f(x) + f(y), f(0)) + f(z)) \end{aligned}$$

e applicando nuovamente la funzione $f$ otteniamo

$$\begin{aligned} &f(f^{\lhd}(\min(f(x) + f(y), f(0)) + f(z))) = \\ &\min(\min(f(x) + f(y), f(0)) + f(z), f(0)) = \\ &\min(\min(f(x) + f(y) + f(z), f(z) + f(0)), f(0)) = \\ &\min(f(x) + f(y) + f(z), f(0)) \end{aligned}$$

Pertanto $\oplus_f$ è associativa.

Infine, siccome per $a \in (0,1)$ si ha

$$a \oplus_f a = f^{\lhd}(f(a) + f(a)) = f^{\lhd}(2f(a)) < f^{\lhd}(f(a)) = a$$

per il corollario 4.26 concludiamo che $\oplus_f$ è continua ed archimedea.

**Esempio 7.55.** La funzione $g := \bigcirc_x 1 - x : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ è continua e strettamente decrescente con $g(1) = 0$.

Calcoliamo $g^{\lhd}$: abbiamo $g(0) = 1$ e per $n \leq 1$ si ha $g_0^{-1}(u) = 1 - u$, per cui $g^{\lhd}(u) = \max(1 - u, 0)$. Per $x, y \in [0,1]$ abbiamo perciò

$$\begin{aligned} x \oplus_g y &= g^{\lhd}(g(x) + g(y)) \\ &= \max(1 - g(x) - g(y), 0) \\ &= \max(1 - (1 - x) - (1 - y), 0) \\ &= \max(x + y - 1, 0) \end{aligned}$$

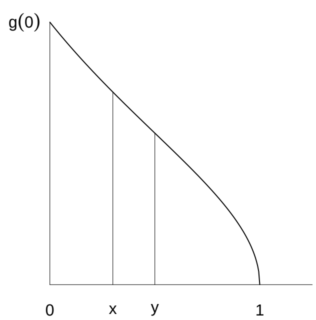
e vediamo che $\oplus_g$ è la t-norma di Lukasiewicz.

**Proposizione 7.56.** *Siano $x, y, z \in [0,1]$ e $g$ una generatrice di $\otimes$. Allora:*

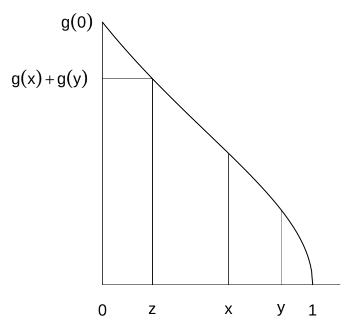
*(1)* $x \otimes y = 0 \Longleftrightarrow g(x) + g(y) \geq g(0)$.
*(2) Se $z \neq 0$, allora* $x \otimes y = z \Longleftrightarrow g(x) + g(y) = g(z)$.
*(3) $\otimes$ è quindi regolare se e solo se $g(0) = \infty$.*

Dimostrazione. Per il teorema 7.51 abbiamo $x \otimes y = g^{\lhd}(g(x) + g(y))$. L'enunciato segue dall'osservazione 7.49.

**Nota 7.57.** La proposizione 7.56 permette di costruire i prodotti $x \otimes y$ da una t-norma continua ed archimedea dal grafico di una sua generatrice, come illustrato nelle figure.




$x \otimes y = 0$




$x \otimes y = z \neq 0$

**Lemma 7.58.** *$g$ sia una generatrice di $\otimes$. Allora sono equivalenti:*

*(1) $\otimes$ è 1-Lipschitz.*
*(2) Per $u, v, w \in [0, \infty]$ con $u \leq v$ si ha*
$g^{\lhd}(u + w) - g^{\lhd}(v + w) \leq g^{\lhd}(u) - g^{\lhd}(v)$.

Dimostrazione. Seguiamo Alsina/Frank/Schweizer, pag. 44.
Prima di tutto notiamo che se uno tra $u, v, w$ è maggiore di $g(0)$, allora la disequazione nel punto (2) è verificata. Assumiamo quindi $u, v, w < g(0)$ con $u \leq v$. Allora esistono $x, y, z \in [0,1]$ con $x \leq y$ tali che

$u = g(y)$, $v = g(x)$ e $w = g(z)$. La disequazione al punto (2) è pertanto equivalente alla $g^{\triangleleft}(g(y)+g(z)) - g^{\triangleleft}(g(x)+g(z)) \leq g^{\triangleleft}(g(y)) - g^{\triangleleft}(g(x))$, cioè $y \otimes z - x \otimes z \leq y - x$. Anche il viceversa è quindi dimostrato.

**Teorema 7.59.** *$\otimes$ è un legame se e solo se possiede una generatrice convessa.*

Dimostrazione. Seguiamo Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 44-45.
Per la proposizione 4.2, la definizione 2.13 e la proposizione 2.19, una t-norma $\otimes$ è un legame se e solo se soddisfa la condizione di Lipschitz $y \otimes z - x \otimes z \leq y - x$ con $x, y, z \in [0, 1]$ e $x \leq y$. In base al lemma 7.58 è quindi sufficiente dimostrare che la generatrice $g$ è convessa se e solo se è soddisfatta la disuguaglianza

$$g^{\triangleleft}(u + w) - g^{\triangleleft}(v + w) \leq g^{\triangleleft}(u) - g^{\triangleleft}(v) \qquad (*)$$

con $u, v, w \in [0, \infty]$ e $u \leq v$.
Notiamo che $g$ è convessa se e solo se $g^{\triangleleft}$ è convessa.

Supponiamo per prima cosa che $g^{\triangleleft}$ soddisfi la disuguaglianza (*) e scegliamo $x, y \in [0, 1]$ in modo che $x < y$. Ponendo $u = x$, $v = \frac{x+y}{2}$, $w = \frac{y-x}{2}$, la (*) diventa

$$g^{\triangleleft}(x + \tfrac{y-x}{2}) - g^{\triangleleft}(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{y-x}{2}) \leq g^{\triangleleft}(x) - g^{\triangleleft}(\tfrac{x+y}{2})$$

$$g^{\triangleleft}(\tfrac{x+y}{2}) - g^{\triangleleft}(y) \leq g^{\triangleleft}(x) - g^{\triangleleft}(\tfrac{x+y}{2})$$

$$2g^{\triangleleft}(\tfrac{x+y}{2}) \leq g^{\triangleleft}(x) + g^{\triangleleft}(y)$$

e quindi, essendo $g^{\triangleleft}$ continua, è anche convessa.

Viceversa, supponiamo che $g^{\triangleleft}$ sia convessa. Fissiamo $u, v, w \in [0, \infty]$ in modo tale che $u \leq v$. Sia $\alpha = \frac{v-u}{v-u+w}$. Essendo $v = (1-\alpha)u + \alpha(v+w)$ e $u + w = \alpha u + (1-\alpha)(v+w)$ abbiamo

$$g^{\triangleleft}(v) \leq (1-\alpha)g^{\triangleleft}(u) + \alpha g^{\triangleleft}(v + w) \qquad \text{e}$$

$$g^{\triangleleft}(u + w) \leq \alpha g^{\triangleleft}(u) + (1-\alpha)g^{\triangleleft}(v + w)$$

Sommando membro a membro le 2 disuguaglianze otteniamo

$$g^{\triangleleft}(v) + g^{\triangleleft}(u + w) \leq g^{\triangleleft}(u) + g^{\triangleleft}(v + w), \qquad \text{cioè}$$

$$g^{\triangleleft}(u + w) - g^{\triangleleft}(v + w) \leq g^{\triangleleft}(u) - g^{\triangleleft}(v).$$

**Nota 7.60.** $f$ e $g$ siano generatrici. Allora:

(1) $f + g$ ed $f \circ g$ sono generatrici.
(2) $\alpha f$ è una generatrice per ogni $\alpha \in (0, \infty)$.

**Nota 7.61 (Generatrici moltiplicative).** Tramite l'antiisomorfismo naturale $\varphi := \bigcirc_u e^{-u} : [0, \infty] \longrightarrow [0, 1]$ che soddisfa le relazioni $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$ e $\varphi(u + v) = \varphi(u)\varphi(v)$ per ogni $u, v \in [0, \infty]$, la teoria fin qui svolta può essere tradotta nel linguaggio equivalente delle *m-generatrici* (talvolta dette generatrici moltiplicative). In pratica è sufficiente completare il diagramma alla fine della definizione 7.47 nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & {[0,1]} \arrow[dr, "f^{\Delta}\circ\varphi^{-1}"] & \\
{[0,1]} \arrow[ur, "\varphi\circ f"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_0"'] & {[0,\infty]} \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "f^{\Delta}"] & {[0,1]} \\
 & {[0,f(0)]} \arrow[u, "i"'] \arrow[ur, "f_0^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Adesso si può lavorare con $\varphi \circ f_0 : [0,1] \longrightarrow [e^{-f(0)}, 1]$. I dettagli si trovano in Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 38-39 e Nguyen/Walker, pagg. 83-86.

# 8. Teoremi di unicità

**Situazione 8.1.** $\otimes_1$ e $\otimes_2$ siano t-norme continue ed archimedee.
$g_1$ e $g_2$ siano generatrici di $\otimes_1$ e $\otimes_2$. Per il confronto di $\otimes_1$ e $\otimes_2$ useremo la funzione $g_1 \circ g_2^{\triangleleft} : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$. Dalla definizione 7.52 segue che questa funzione è continua e crescente; inoltre $(g_1 \circ g_2^{\triangleleft})(0) = g_1(1) = 0$, $(g_1 \circ g_2^{\triangleleft})(\infty) = g_1(0)$.

**Definizione 8.2.** Un'applicazione $\varphi : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ si dice *subadditiva*, se $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ per ogni $x, y \in [0,\infty]$.

**Osservazione 8.3.** L' applicazione $\varphi : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ sia subadditiva. Allora:

(1) $\varphi(nx) \leq n\varphi(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(2) $\varphi(x) < \infty$ e $\varphi(y) < \infty \Longrightarrow \varphi(x+y) < \infty$.
(3) Siano $x \in [0,\infty)$, $[x]$ la parte intera e $\{x\}$ la parte frazionaria di $x$. Allora $\varphi(x) \leq [x]\varphi(1) + \varphi(\{x\})$.

**Proposizione 8.4.** $\otimes_1 \leq \otimes_2 \Longleftrightarrow g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$ *è subadditiva.*

Dimostrazione. Per definizione abbiamo $x \otimes_i y = g_i^{\triangleleft}(g_i(x) + g_i(y))$ per $i = 1, 2$ ed ogni $x, y \in [0,1]$. Poniamo $\varphi := g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$. Siano $u, v \in [0,\infty]$. Osserviamo prima che sicuramente $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ se $u \geq g_2(0)$ oppure $v \geq g_2(0)$. Infatti sia ad esempio $u \geq g_2(0)$. Allora $g_2^{\triangleleft}(u) = 0$ e quindi $\varphi(u) = g_1(0)$, perciò anche $\varphi(u+v) = g_1(0) = \varphi(u) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$.

Possiamo quindi assumere che $u, v < g_2(0)$.
Siano $x := g_2^{\triangleleft}(u)$, $y := g_2^{\triangleleft}(v)$. Allora $g_2(x) = u$, $g_2(y) = v$, $g_1(x) = \varphi(u)$, $g_1(y) = \varphi(v)$.

(1) Supponiamo $\otimes_1 \leq \otimes_2$. Allora $x \otimes_1 y \leq x \otimes_2 y$, cioè
$g_1^{\triangleleft}(g_1(x) + g_1(y)) \leq g_2^{\triangleleft}(g_2(x) + g_2(y)) = g_2^{\triangleleft}(u+v)$.
Applicando la funzione decrescente $g_1$ otteniamo
$\varphi(u) + \varphi(v) = g_1(x) + g_1(y) \geq g_1(g_2^{\triangleleft}(u+v)) = \varphi(u+v)$.
Pertanto $\varphi$ è subadditiva.

(2) $\varphi$ sia subadditiva. Abbiamo in primo luogo
$\varphi(u+v) = g_1(g_2^{\triangleleft}(g_2(x) + g_2(y))) = g_1(x \otimes_2 y)$
e quindi per ipotesi
$g_1(x \otimes_2 y) = \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v) = g_1(x) + g_1(y)$.
Applicando la funzione decrescente $g_1^{\triangleleft}$ otteniamo
$x \otimes_2 y \geq g_1^{\triangleleft}(g_1(x) + g_1(y)) = x \otimes_1 y$.

**Teorema 8.5.** *Sono equivalenti:*

*(1)* $\otimes_1 = \otimes_2$.
*(2)* ***Esiste*** $c \in (0,\infty)$ ***tale che*** $g_1 = cg_2$***, cioè tale che*** $g_1(x) = cg_2(x)$ ***per ogni*** $x \in [0,1]$.

Dimostrazione. Seguiamo Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 41-43.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Se $\otimes_1 = \otimes_2$ allora $g_2$ è anche una generatrice di $\otimes_1$.
$g_1$ e $g_2$ devono quindi differire per una costante $c \in (0,\infty)$ in modo tale

che $g_1 = cg_2$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Innanzitutto dimostriamo che se la restrizione di $g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$ a $[0, g_2(0)]$ è lineare, abbiamo $\otimes_1 = \otimes_2$. Sia $f = g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$.

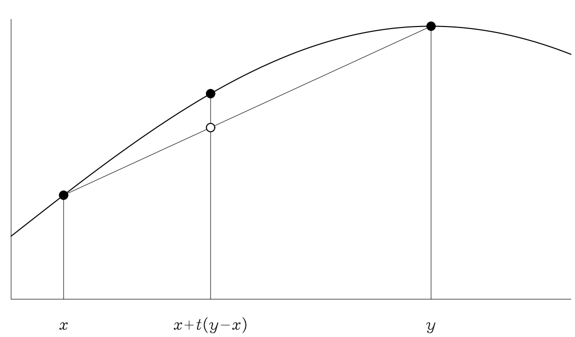
Si ha $\otimes_1 = \otimes_2$ se e solo se $f(u+v) = g_1 \circ g_1^{\triangleleft}(f(u) + f(v))$ (*) per ogni $u, v \in [0, g_2(0)]$. Dal momento che $f$ è continua, si ha $f(u) = \frac{g_1(0)}{g_2(0)} u$ da cui si ricava la (*). Se $g_1 = cg_2$, allora segue immediatamente che $g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$ ristretta a $[0, g_2(0)]$ è lineare e che quindi $\otimes_1 = \otimes_2$.

**Proposizione 8.6 (test di Cooper).** *Se la funzione $\frac{g_1}{g_2}$ è crescente su $(0,1)$, allora la funzione $g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$ è subadditiva e quindi $\otimes_1 \leq \otimes_2$.*

Dimostrazione. Seguiamo Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 41-42. Sia $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ definita da $f(u) := \frac{g_1(g_2^{\triangleleft}(u))}{u}$. È chiaro quindi che $f \circ g_2 = \frac{g_1}{g_2}$. Dal fatto che $g_2$ sia strettamente decrescente segue che $f$ è decrescente su $(0, g_2(0))$ e quindi su $(0, \infty)$. Siano $u, v \in [0, \infty]$. Allora $u[f(u+v) - f(u)] + v[f(u+v) - f(v)] \leq 0$ dal momento che entrambi gli addendi sono $\leq 0$. La disuguaglianza può anche essere riscritta nella forma $(u+v)f(u+v) \leq uf(u) + vf(v)$ e ciò mostra che la funzione $g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$ è subadditiva.

**Definizione 8.7.** Una funzione $\varphi : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ si dice *concava*, se per $x, y \in [0, \infty)$ e $t \in [0, 1]$ si ha sempre

$$\varphi(x) + t(\varphi(y) - \varphi(x)) \leq \varphi(x + t(y - x)).$$




**Lemma 8.8.** *La funzione $\varphi : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ sia concava con $\varphi(0) = 0$. Allora $\varphi$ è subadditiva.*

Dimostrazione. Seguiamo Schweizer/Sklar, pag. 24. Siano $x, y \in [0, \infty)$.

(1) Se $x = y = 0$, allora $\varphi(x+y) = \varphi(0) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

(2) Siano $x, y < \infty$ con $x + y > 0$. Allora

$$x = \left(\frac{x}{x+y}\right)(x + y - 0) + 0 \quad \text{e} \quad y = 0 + \left(\frac{y}{x+y}\right)(x + y - 0)$$

Siccome $\varphi$ è concava, abbiamo dalla prima uguaglianza

$$\varphi(x) \geq \tfrac{x}{x+y}\varphi(x+y) + \varphi(0) = \tfrac{x}{x+y}\varphi(x+y)$$

e similmente dalla seconda

$$\varphi(y) \geq \tfrac{y}{x+y}\varphi(x+y)$$

per cui

$$\varphi(x+y) = \left(\tfrac{x}{x+y} + \tfrac{y}{x+y}\right)\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

(3) Sia ad esempio $x = \infty$. Allora
$\varphi(x+y) = \varphi(\infty) \leq \varphi(\infty) + \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

**Corollario 8.9.** *Se la funzione* $g_1 \circ g_2^{\triangleleft}$ *è concava, allora* $\otimes_1 \leq \otimes_2$.

**Osservazione 8.10.** Il teorema 8.5 implica che per ogni t-norma continua, archimedea e non regolare esiste una generatrice $g$ con $g(0) = 1$.

# 9. Rappresentazioni grafiche

**Situazione 9.1.** Nel seguito, quando $g$ è una generatrice, porremo spesso $h := g^{\triangleleft}_{|[0,g(0)]} : [0, g(0)] \longrightarrow [0, 1]$. Negli esempi in questo capitolo, ogni t-norma $\otimes$ è rappresentata da quattro figure, a partire dalla sinistra:

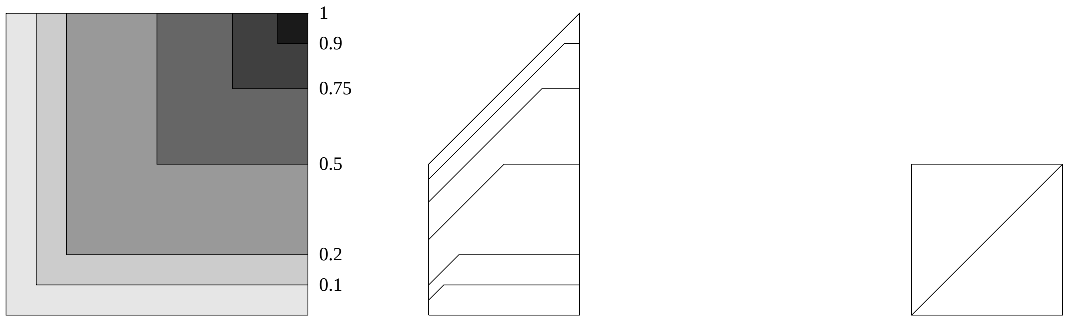
(1) Curve di livello $x \otimes y = z$ per $z = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 0.9$.
Campi più scuri corrispondono a valori di $z$ più alti.

(2) I grafici delle funzioni $F_a : [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$ definite da
$F_a(x) := a + a \otimes x$, per $a = 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 0.9, 1$.
Osserviamo qui che $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1 + x$, $F_a(0) = a$,
$F_a(1) = 2a$.

(3) Il grafico di una generatrice $g$ di $\otimes$.
Questa figura manca per $\otimes = \min$.

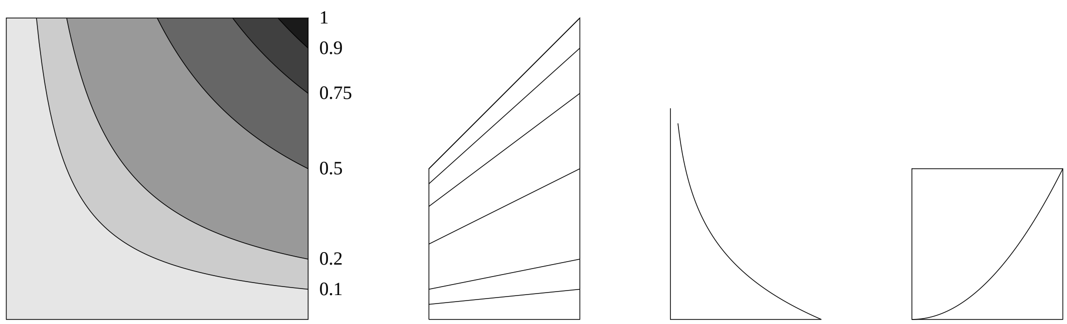
(4) Il grafico della diagonale $\delta_\otimes = \underset{x}{\bigcirc}\, x \otimes x$.

**Esempio 9.2.** $x \otimes y = \min(x, y)$.



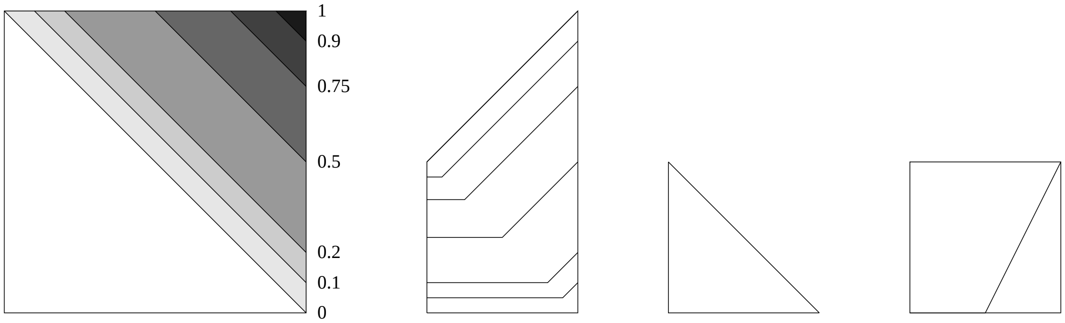

$x \otimes y = \min(x, y)$

**Esempio 9.3.** $x \otimes y = xy$. La generatrice $g(x) = -\log_2 x$ è stata calcolata nell'esempio 7.37.



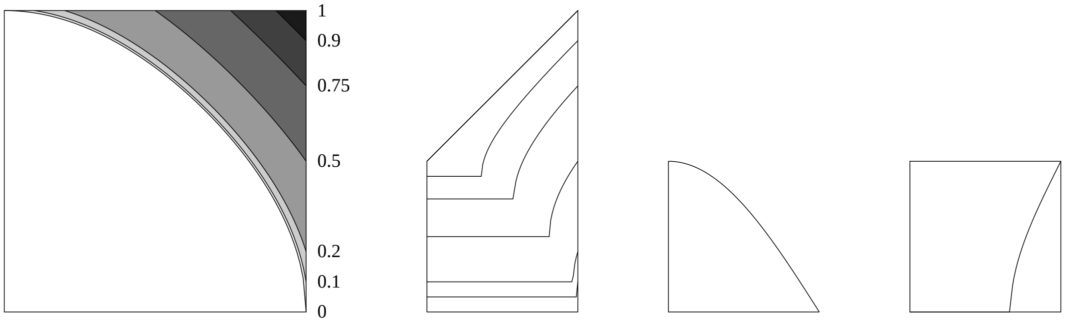

$x \otimes y = xy$

**Esempio 9.4.** $x \otimes y = \max(x+y-1, 0)$. La generatrice $g(x) = 1 - x$ è stata calcolata nell'esempio 7.55.




$x \otimes y = \max(x+y-1, 0)$

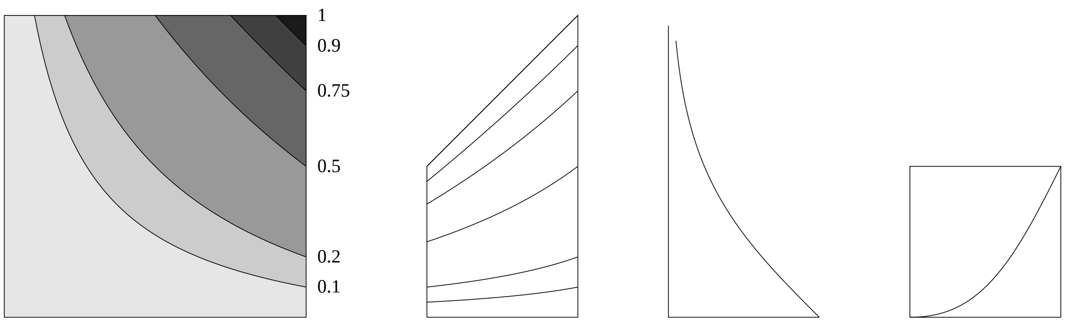
**Esempio 9.5.** $g(x) = \cos(\pi x/2)$. Allora $g(0) = 1$, $h(u) = \frac{2}{\pi}\arccos(u)$.




$g(x) = \cos(\pi x/2)$

**Esempio 9.6.** Sia $g(x) = \operatorname{artanh}(1-x)$. Allora $g(0) = \infty$ e

$$h(u) = \begin{cases} 1 - \tanh(u) & \textbf{per } u \leq g(0) \\ 0 & \textbf{per } u \geq g(0) \end{cases}$$

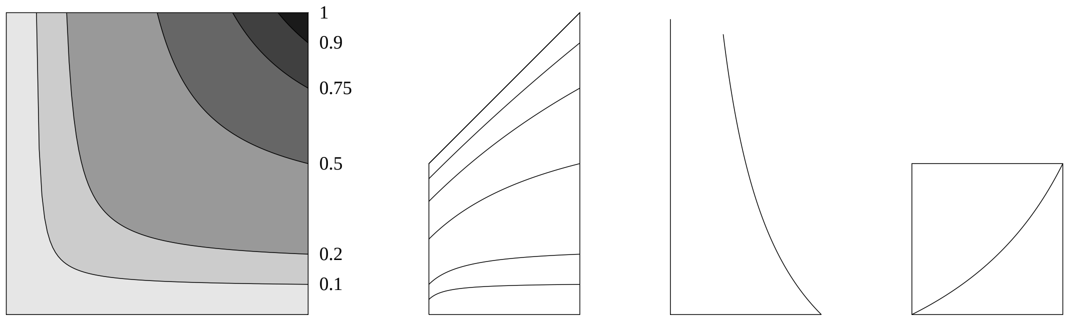



$g(x) = \operatorname{artanh}(1-x)$

**Esempio 9.7.** $g(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ \infty & \text{per } x = 0 \end{cases}$

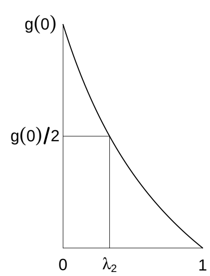
Questa t-norma è regolare e molto importante. Si ha

$$h(u) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} & \text{per } u \leq g(0) \\ \infty & \text{per } u \geq g(0) \end{cases}$$

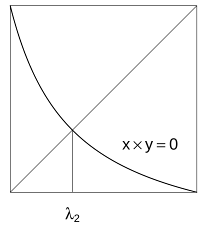



$$g(x) = \frac{1-x}{x}$$

**Nota 9.8.** $g$ sia una generatrice con $g(0) < \infty$ e $\otimes$ la t-norma continua ed archimedea associata (cioè $\otimes = \oplus_g$). Dalla proposizione 7.56 segue che $\lambda_2 = \max\{x \in [0,1] \mid x \otimes x = 0\}$ si ottiene dall'equazione $g(x) = \frac{g(0)}{2}$. Graficamente $x$ è uguale all'ascissa corrispondente all'intersezione del grafico di $g$ con la retta $y = g(0)/2$.



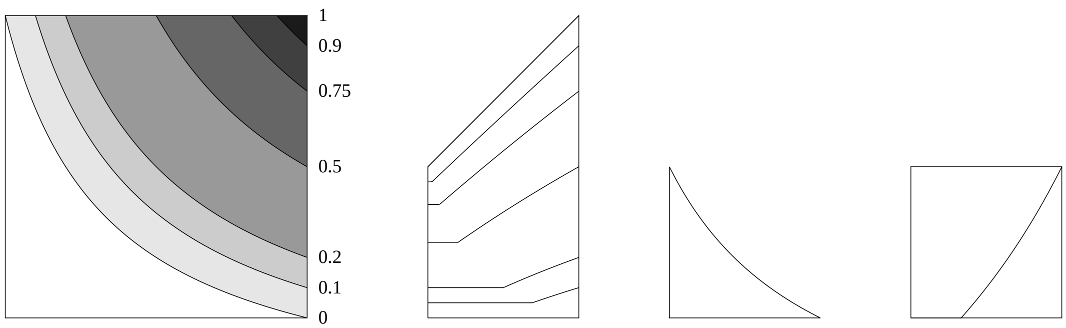

Nello stesso modo si trova $\lambda_n$ dall'equazione $g(x) = \frac{g(0)}{n}$ per ogni $n \geq 1$. $\lambda_2$ si può anche ottenere dall'intersezione della curva di livello $x \otimes y = 0$ con la diagonale del quadrato unitario. Anche qui $\lambda_2$ è l'ascissa che corrisponde all'intersezione. Nella figura $x \times y$ sta per $x \otimes y$.




$\lambda_2$ coincide naturalmente anche con il valore dell'ascissa in cui il grafico della diagonale di $\otimes$ esce dalla retta $y = 0$.

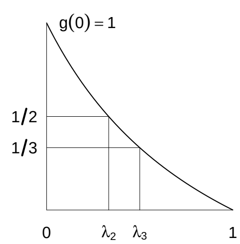
**Esempio 9.9.** Sia $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Allora $g(0) = 1$, $h = g$, $g(1) = 0$ e

$g'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0.$




$$g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Per calcolare $\lambda_n$ dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{n}$, da cui $\lambda_n = \frac{n-1}{n+1}$; quindi $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2}{4}$, $\lambda_3 = \frac{3}{5}$, ...



**Esempio 9.10.** $g(x) = \frac{1-x}{1+x+x^2}$. Allora $g(0) = 1$.

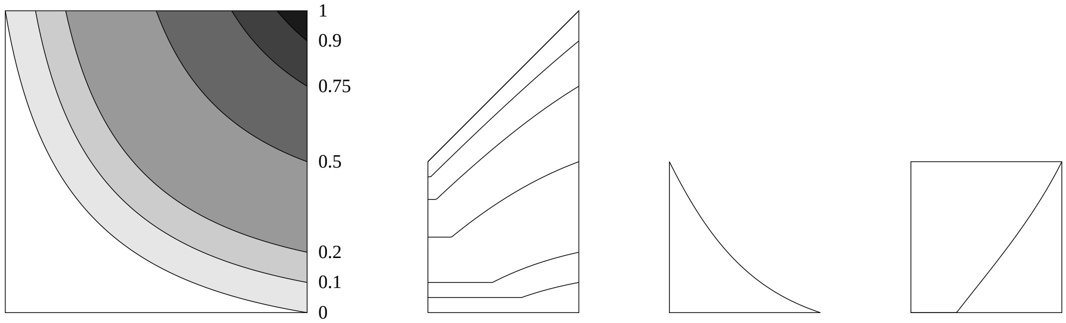
Considerando $\frac{1-x}{1+x+x^2} = u$ si trova

$$h(u) = \begin{cases} \frac{-u-1+\sqrt{-3u^2+6u+1}}{2u} & \text{per } u \neq 0 \\ 1 & \text{per } u = 0 \end{cases}$$

e

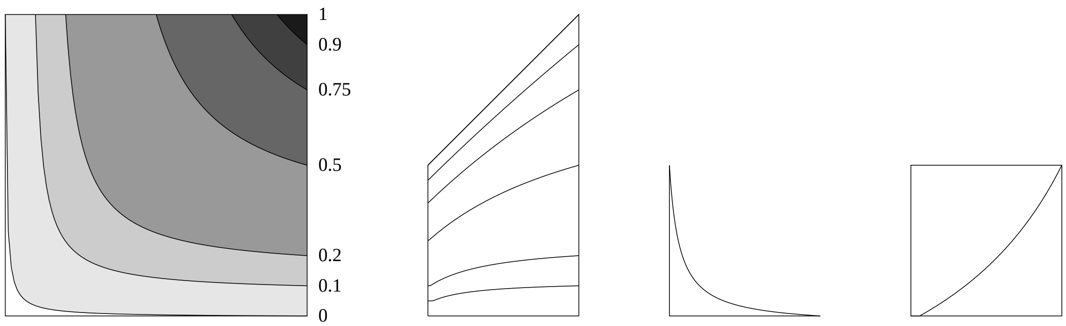
$$g'(x) = \frac{-(1+x+x^2)-(1+2x)(1-x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{x^2+1-2x}{(1+x+x^2)^2} < 0$$

per $x \in [0,1]$.

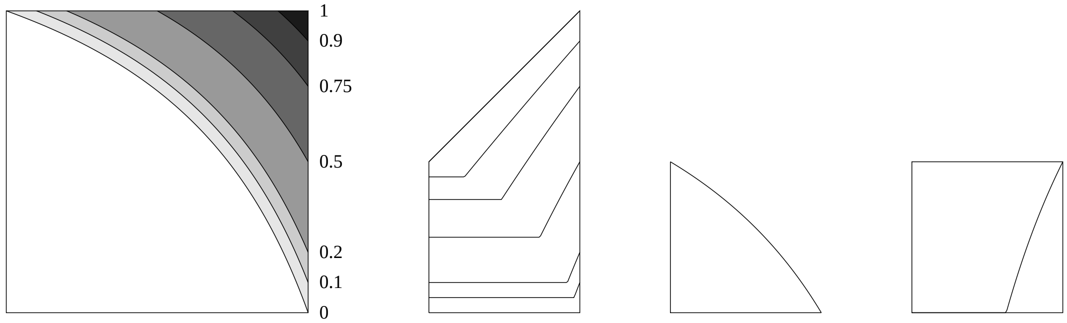



$$g(x) = \frac{1-x}{1+x+x^2}$$

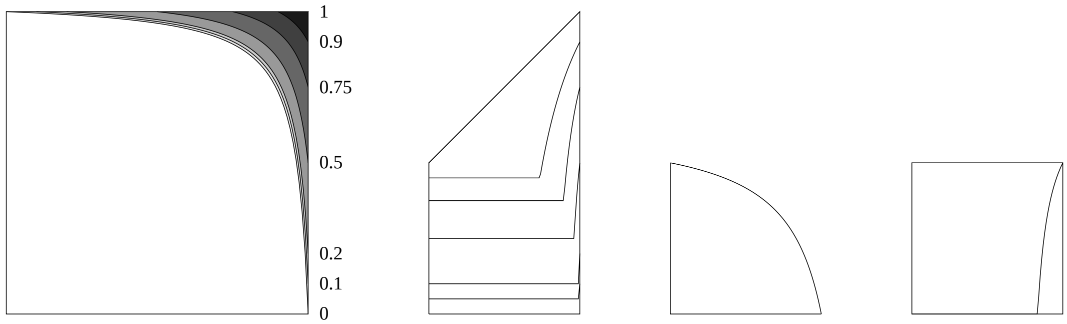
**Esempio 9.11.** $g(x) = \frac{1-x}{1+\alpha x}$ con $\alpha > -1$. Allora $g(0) = 1$, $h = g$ e $g'(x) = \frac{-1-\alpha}{(1+\alpha x)^2)} < 0$. Otteniamo così una famiglia parametrizzata di t-norme corrispondenti alla famiglia 8 in Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 72-73. Le 3 figure corrispondono ad $\alpha = 15, -0.4, -0.8$. Per $\alpha = 0$ si ottiene la t-norma di Lukasiewicz.




$$g(x) = \frac{1-x}{1+15x}$$

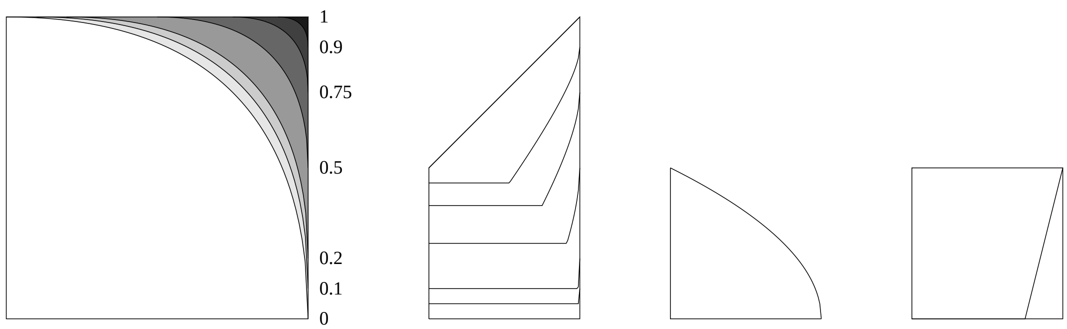



$$g(x) = \frac{1-x}{1-0.4x}$$

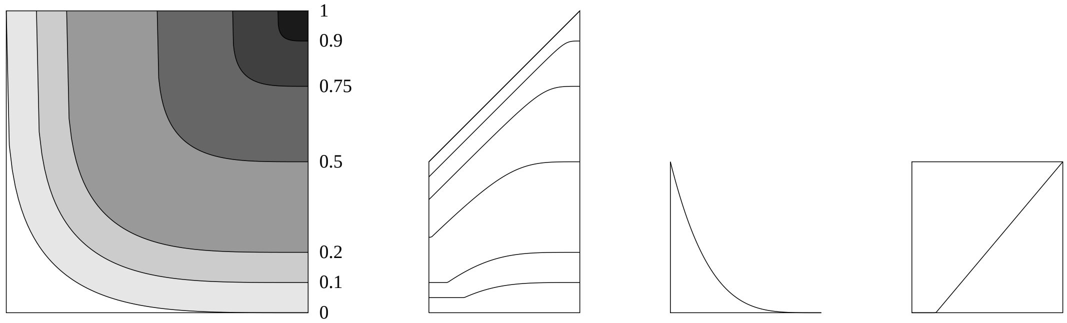



$$g(x) = \frac{1-x}{1-0.8x}$$

**Esempio 9.12.** La famiglia 2 in Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 72-73, corrisponde alle generatrici $g(x) = (1-x)^{\alpha}$ per $\alpha \in (0, \infty)$ con $x \otimes y = \max(1 - [(1-x)^{\alpha} + (1-y)^{\alpha}]^{1/\alpha}, 0)$.

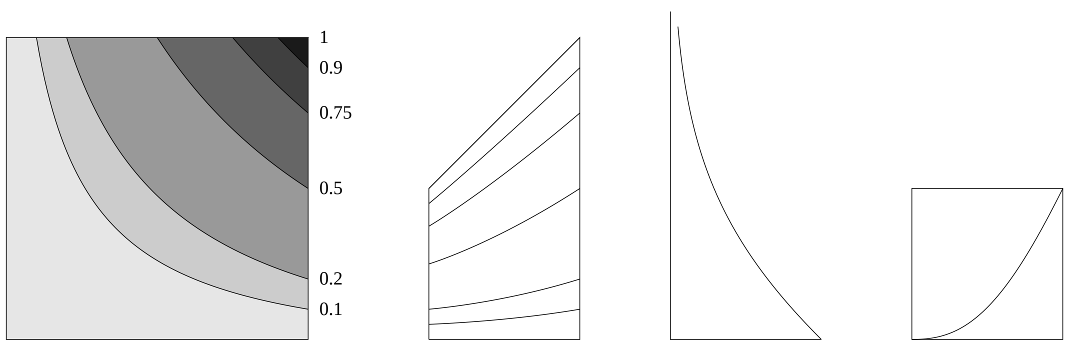



$$g(x) = \sqrt{1-x}$$



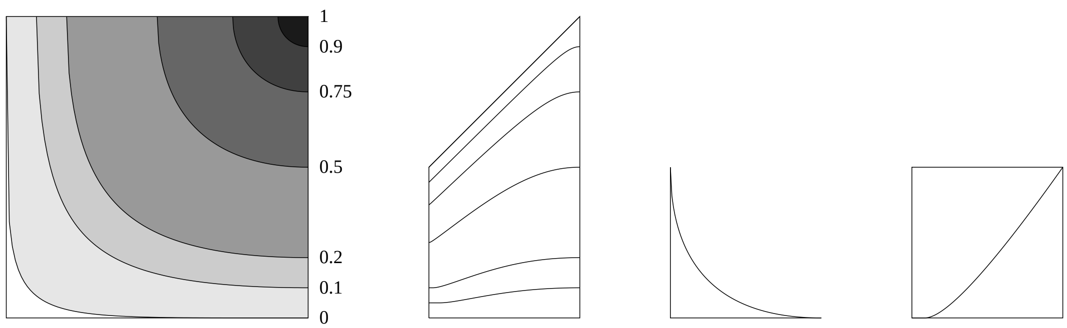

$g(x) = (1 - x)^4$

**Esempio 9.13.** La famiglia 9 in Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 72-73, corrisponde alle generatrici $g(x) = \log(2x^{-\alpha} - 1)$ per $\alpha \in (0, \infty)$ con $x \otimes y = \frac{xy}{(1+(1-x)^\alpha(1-y)^\alpha)^{1/\alpha}}$.



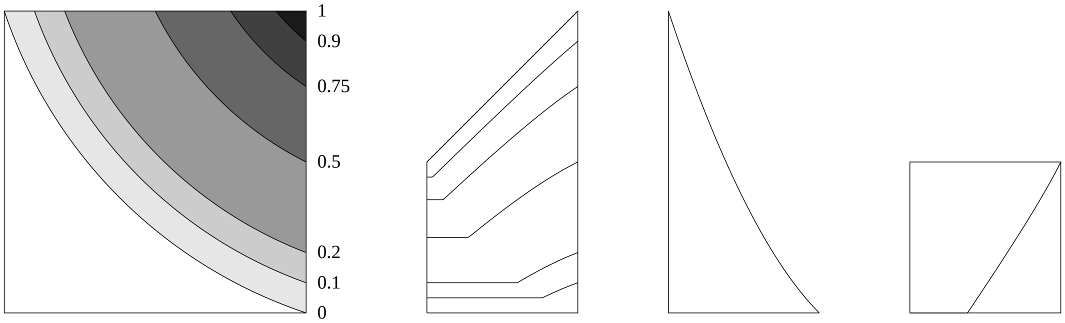

$g(x) = \log(2^{-0.5} - 1)$

**Esempio 9.14.** La famiglia 17 in Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 74-75, corrisponde alle generatrici $g(x) = (1 - x^{1/\alpha})^\alpha$ per $\alpha \in (0, \infty)$.



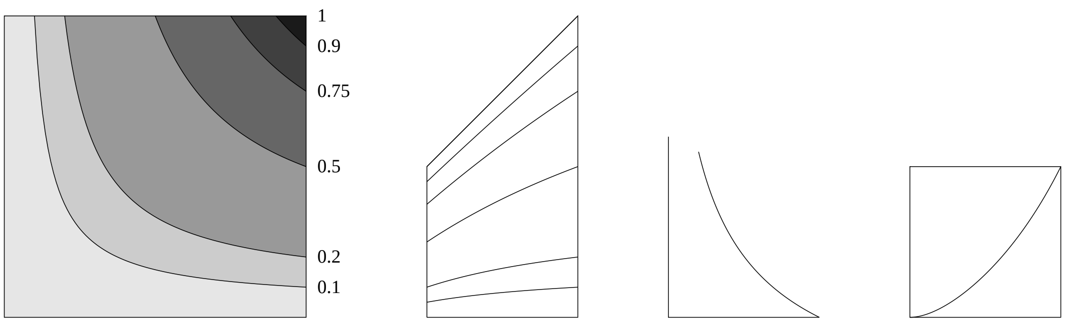

$g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$

**Esempio 9.15.** Sia $g(x) = 2 - 3x + x^2$. Allora $h(u) = \frac{3-\sqrt{1+4u}}{2}$.




$g(x) = 2 - 3x + x^2$

**Esempio 9.16.** La famiglia 3 in Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 72-73, definita dalle generatrici $g(x) = \log \frac{1-\alpha+\alpha x}{x}$ per $\alpha \in (-\infty, 1]$ è molto importante; le t-norme che appartengono ad essa si chiamano *t-norme di Hamacher*. Si ha $x \otimes y = \frac{xy}{1-\alpha(1-x)(1-y)}$.




$$g(x) = \log \frac{1+x}{2x}$$

# II. LOGICA FUZZY

## 10. La teoria classica degli insiemi sfumati

**Situazione 10.1.** $X, Y$ insiemi. Riportiamo in questo capitolo le idee contenute nel lavoro di Zadeh che ha iniziato la teoria degli insiemi sfumati.

**Nota 10.2.** Nella teoria degli insiemi un assioma postula che per ogni oggetto $x$ ed ogni insieme $A$ esattamente uno degli enunciati *$x$ appartiene ad $A$*, *$x$ non appartiene ad $A$* sia vero. Tuttavia, la maggior parte degli insiemi di oggetti che si incontrano nel mondo reale non hanno un ben definito criterio di appartenenza e così non possono essere considerati veri e propri insiemi matematici. Per esempio la frase *$A$ è l'insieme dei professori simpatici* non individua un insieme matematico perché il concetto di *simpatico* è relativo. Così non sono insiemi matematici *l'insieme dei numeri reali molto più piccoli di 5*, *l'insieme delle persone anziane* e *l'insieme dei libri noiosi*. Questi insiemi non matematici però giocano un importante ruolo nel pensiero umano e sono costantemente presenti nei nostri modelli di comunicazione, apprendimento ed astrazione. Essi costituiscono la base della teoria classica degli insiemi sfumati.

**Definizione 10.3.** Un *insieme sfumato* su $X$ è un elemento di $[0,1]^X$, cioé un'applicazione $A : X \longrightarrow [0,1]$. La funzione $A$ è anche detta una *funzione di appartenenza* e il valore $A(x)$ è interpretato come il *grado di appartenenza* di $x$ all'insieme sfumato $A$.

**Osservazione 10.4.** Se $A$ è un sottoinsieme ordinario di $X$, allora possiamo identificare $A$ con la funzione caratteristica $A : X \longrightarrow \{0,1\}$.

**Esempio 10.5.** Siano $X = [0,\infty)$ ed $A$ l'insieme sfumato dei numeri molto più grandi di $1$. Possiamo fornire allora una precisa, benché soggettiva, caratterizzazione di $A$ specificando $A(x)$ come funzione su $[0,\infty)$. Valori rappresentativi di questa funzione possono essere per esempio: $A(0) = 0$, $A(1) = 0$, $A(5) = 0.01$, $A(10) = 0.2$, $A(100) = 0.95$, $A(x) = 1$ per $x \geq 500$.

Più matematicamente potremmo definire $A := \underset{x}{\bigcirc} \tanh \frac{x}{100}$ che assume ad esempio i valori nella seguente tabella:

| x | A(x) |
|---|---|
| 0 | 0.0000 |
| 1 | 0.0100 |
| 5 | 0.0500 |
| 10 | 0.0997 |
| 100 | 0.7616 |
| 500 | 0.9999 |

**Definizione 10.6.** Siano $A, B$ insiemi sfumati su $X$.

Nel lavoro originale di Zadeh alcune costruzioni insiemistiche vengono generalizzate in modo naturale:

(1) Il *complemento* di $A$ è l'insieme sfumato $1 - A = \bigcirc_{x} 1 - A(x)$.

(2) L'unione degli insiemi sfumati $A$ e $B$ è rappresentata da $A \vee B := \bigcirc_{x} \max(A(x), B(x))$. È chiaro che $\vee$ gode della propietà associativa, cioè $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

(3) L'intersezione degli insiemi sfumati $A$ e $B$ è l'insieme sfumato $A \wedge B := \bigcirc_{x} \min(A(x), B(x))$.
Anche questa operazione è associativa.

**Osservazione 10.7.** Per gli insiemi sfumati valgono le leggi di distribuzione e le leggi di De Morgan riferite alle operazioni introdotte nella definizione 10.6: Siano $A, B, C$ insiemi sfumati; allora

$$\begin{aligned}
C \wedge (A \vee B) &= (C \wedge A) \vee (C \wedge B)\\
C \vee (A \wedge B) &= (C \vee A) \wedge (C \vee B)\\
1 - (A \vee B) &= (1 - A) \wedge (1 - B)\\
1 - (A \wedge B) &= (1 - A) \vee (1 - B)
\end{aligned}$$

**Definizione 10.8.** Siano $A, B$ insiemi sfumati. Per $\lambda \in [0, 1]$ possiamo formare la *combinazione convessa* $\lambda A + (1 - \lambda)B$; più in generale è definito anche l'insieme sfumato $\Lambda A + (1 - \Lambda)B$ per un qualsiasi insieme sfumato $\Lambda \in [0, 1]^X$.

**Osservazione 10.9.** Siano $A, B, \Lambda \in [0, 1]^X$. Allora
$A \wedge B \leq \Lambda A + (1 - \Lambda)B \leq A \vee B$.

È interessante osservare che, dato un insieme sfumato $C$ soddisfacente la relazione $A \wedge B \leq C \leq A \vee B$, si può sempre trovare un insieme sfumato $\Lambda$ tale che $C = \Lambda A + (1 - \Lambda)B$. Possiamo infatti porre

$$\Lambda(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } A(x) = B(x) \\ \frac{C(x) - B(x)}{A(x) - B(x)} & \text{se } A(x) \neq B(x) \end{cases}$$

**Definizione 10.10.** *Un relazione (binaria) sfumata* in $X$ è un sottoinsieme sfumato di $X \times X$. In generale, una *relazione sfumata n-aria* in $X$ è un sottoinsieme sfumato $A$ di $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}$.

**Esempio 10.11.** Una relazione $x \gg y$ ($x$ molto più grande di $y$) su $[0, \infty)$ potrebbe essere definita dalla funzione $R$ data da

$$R(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq y \\ \tanh \frac{x - y}{100} & \text{per } x > y \end{cases}$$

**Definizione 10.12.** Siano $A, B$ due relazioni sfumate. La *composizione* $A \diamond B$ di $A$ e $B$ è la relazione sfumata in $X$ definita dalla condizione
$A \diamond B(x, y) := \sup_{v \in X} \min(A(x, v), B(v, y))$.

Non è difficile dimostrare che l'operazione di composizione di relazioni gode della proprietà associativa, cioè che $A \diamond (B \diamond C) = (A \diamond B) \diamond C$.

**Definizione 10.13.** Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione.

(1) Sia $B$ un sottoinsieme sfumato di $Y$. Allora l'applicazione $B \circ f : X \longrightarrow [0,1]$ è un sottoinsieme sfumato di $X$ che può essere considerato come la *controimmagine* di $B$ sotto $f$.

(2) Sia invece $A$ un sottoinsieme sfumato di $X$. Allora otteniamo un sottoinsieme sfumato di $Y$ definito da $\bigcirc_y \max\limits_{x \in f^{-1}(y)} A(x)$ che può essere interpretato come l'*immagine* di $A$ sotto $f$.

**Osservazione 10.14.** Diamo adesso alcuni risultati per sottoinsiemi sfumati di uno spazio euclideo.

**Definizione 10.15.** Un sottoinsieme sfumato $A$ di $\mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $(A \geq \alpha)$ è convesso.

Si noti che $(A \geq \alpha) = X$ per $\alpha \leq 0$ e $(A \geq \alpha) = \emptyset$ per $\alpha > 1$.

**Proposizione 10.16.** *Un insieme sfumato $A$ è convesso se e solo se*

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2)) \quad (*)$$

*per ogni $x_1, x_2 \in X$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$.*

Dimostrazione. Sia $A$ un insieme convesso ed $\alpha = A(x_1) \leq A(x_2)$ con $x_1, x_2 \in X$. Allora $x_2 \in (A \geq \alpha)$ e $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in (A \geq \alpha)$ per la convessitá di $(A \geq \alpha)$.
Quindi $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = A(x_1) = \min(A(x_1), A(x_2))$.

Viceversa, siano $x_1, x_2 \in X$ e sia valida la relazione (*) con $\lambda \in [0,1]$. Sia $\alpha = A(x_1)$. Allora l'insieme $(A \geq \alpha)$ puó essere riguardato come l'insieme di tutti i punti $x_2$ tali che $A(x_2) \geq A(x_1)$. Per la disuguaglianza (*), ogni punto della forma $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, appartiene anche a $(A \geq \alpha)$ e quindi $(A \geq \alpha)$ è convesso.

**Teorema 10.17.** *$A, B$ siano sottoinsiemi sfumati convessi.*
*Allora anche $A \wedge B$ è convesso.*

Dimostrazione. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $x, y \in (A \geq \alpha)$. Per $\lambda \in [0,1]$ allora

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(A(x), A(y))$$

Analogamente, se $x, y \in (B \geq \alpha)$ abbiamo

$$B(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(B(x), B(y))$$

Sia $C = A \wedge B$. Possiamo scrivere quindi

$$C(\lambda x + (1-\lambda)y) = \min(A(\lambda x + (1-\lambda)y), B(\lambda x + (1-\lambda)y))$$

o ancora, per le disuguaglianze precedenti

$$C(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\min(A(x), A(y)), \min(B(x), B(y)))$$

o, equivalentemente,

$$C(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\min(A(x), B(x)), \min(A(y), B(y))).$$

Pertanto $C(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(C(x), C(y))$.

**Definizione 10.18.** Un sottoinsieme sfumato $A$ di $\mathbb{R}^n$ si dice *fortemente convesso* se, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ con $x_1 \neq x_2$ e per ogni $\lambda \in (0,1)$ si ha $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min(A(x_1), A(x_2))$.

**Osservazione 10.19.** Se $A$ e $B$ sono sottoinsiemi fortemente convessi di $\mathbb{R}^n$, allora anche $A \wedge B$ è fortemente convesso.

**Definizione 10.20.** Siano $A$ un sottoinsieme sfumato di $\mathbb{R}^n$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia $s := \sup\limits_{x \in X} A(x)$. Diciamo che $x_0$ è un punto in cui $A$ assume essenzialmente il suo $\sup$, se per ogni $\varepsilon > 0$, ogni intorno di $x_0$ contiene punti dell'insieme $(A \geq s - \varepsilon)$.

L'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ in cui $A$ assume essenzialmente il suo $\sup$ si chiama *nucleo* (in inglese *core*) di $A$ ed è denotato con $N(A)$.

**Teorema 10.21.** *Se $A$ è un sottoinsieme sfumato convesso di $\mathbb{R}^n$, allora anche il suo nucleo è convesso.*

Dimostrazione. Seguiamo il lavoro di Zadeh. È sufficiente mostrare che se $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 \neq x_1$ sono punti in cui $A$ assume essenzialmente il suo $\sup$, allora anche ogni $x \in X$ della forma $x = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1$, con $\lambda \in [0,1]$, è un punto in cui $A$ assume essenzialmente il suo $\sup$.
A tal scopo, sia $P$ un cilindro il cui raggio $\varepsilon$ sia asse del segmento $x_0x_1$. Siano poi $x_0'$ e $x_1'$ rispettivamente un punto su una sfera di raggio $\varepsilon$ centrata in $x_0$ ed un punto su una sfera di raggio $\varepsilon$ centrata in $x_1$, tali che si abbia $A(x_0') \geq s - \varepsilon$ e $A(x_1') \geq s - \varepsilon$.

Per la convessità di $A$, quindi, per ogni punto $u$ sul segmento $x_0'x_1'$, si ha $A(u) \geq s - \varepsilon$. Inoltre, per la convessità di $P$, tutti i punti su $x_0'x_1'$ appartengono a $P$. Sia ora $x$ un punto sul segmento $x_0x_1$. La distanza di questo punto dal segmento $x_0'x_1'$ deve essere minore o uguale ad $\varepsilon$, dal momento che $x_0'x_1'$ giace su $P$. Di conseguenza, una sfera di raggio $\varepsilon$ centrata in $x$ conterrà almeno un punto del segmento $x_0'x_1'$ e quindi conterrà almeno un punto $w$ tale che $A(w) \geq s - \varepsilon$.

Ciò stabilisce che $x$ è un punto in cui $A$ assume essenzialmente il suo $\sup$ e quindi il teorema è provato.

**Nota 10.22.** Gli insiemi sfumati convessi e i teoremi di separazione per essi vengono utilizzati nella teoria dell'ottimizzazione e nell'analisi di immagini ed in parte nell'analisi di dati clinici di alte dimensioni.

## 11. Principi di logica fuzzy

**Situazione 11.1.** Siano $X, Y$ insiemi e $\otimes$ una t-norma, dove non indicato diversamente.

**Proposizione 11.2.** *$\otimes$ sia una t-norma, $\varovee$ una s-norma.*

*(1) Se* $x \varovee (y \otimes z) = (x \varovee y) \otimes (x \varovee z)$ *per ogni* $x, y, z \in [0,1]$*, allora* $\otimes = \min$.

*(2) Se* $x \otimes (y \varovee z) = (x \otimes y) \varovee (x \otimes z)$ *per ogni* $x, y, z \in [0,1]$*, allora* $\varovee = \max$.

Dimostrazione. (1) Per la proposizione 4.10 è sufficiente dimostrare che $x \otimes x = x$ per ogni $x \in [0,1]$. L'ipotesi implica però
$x \otimes x = (x \varovee 0) \otimes (x \varovee 0) = x \varovee (0 \otimes 0) = x \varovee 0 = x$.

(2) Nello stesso modo.

**Osservazione 11.3.** $\otimes$ sia una t-norma, $\varovee$ una s-norma. Allora:

(1) $x \varovee \min(y, z) = \min(x \varovee y, x \varovee z)$ per ogni $x, y, z \in [0,1]$.

(2) $x \otimes \max(y, z) = \max(x \otimes y, x \otimes z)$ per ogni $x, y, z \in [0,1]$.

Dimostrazione. (1) Sia ad esempio $y \leq z$. Allora $x \varovee \min(y, z) = x \varovee y$ e $\min(x \varovee y, x \varovee z) = x \varovee y$ perchè $x \varovee y \leq x \varovee z$.

(2) Nello stesso modo.

**Corollario 11.4.** *$\otimes$ sia una t-norma, $\varovee$ una s-norma.*
*Allora sono equivalenti:*

*(1)* $x \varovee (y \otimes z) = (x \varovee y) \otimes (x \varovee z)$
$x \otimes (y \varovee z) = (x \otimes y) \varovee (x \otimes z)$
*per ogni* $x, y, z \in [0,1]$.

*(2)* $\otimes = \min$ *e* $\varovee = \max$.

**Nota 11.5.** Le ricerche sulla logica a più valori iniziarono nei primi decenni del '900. Il primo fu Jan Lukasiewicz che, attorno al 1920, concentrò la sua attenzione sulla logica a tre valori. Un passo importante per la ricerca fu lo studio della logica intuizionistica dovuta a Heyting e Gödel. Contributi significativi furono dati anche da Post, Moisil, McNaughton, Chang e Rosser. Tuttavia, per parecchi decenni, la logica a più valori fu considerata un argomento puramente teorico e fine a se stesso, senza applicazioni pratiche. La svolta si ebbe nel 1965 con l'introduzione degli insiemi sfumati ad opera di Zadeh che contribuì a cambiare notevolmente il normale approccio con la logica a più valori. In particolare, contribuì allo studio della logica proposizionale in cui l'insieme dei valori di verità è modellato sull'intervallo unitario $[0,1]$ e in cui la congiunzione è interpretata come una norma triangolare. Questa logica, che rappresenta quindi un'estensione della classica logica booleana, venne chiamata *logica fuzzy*.

**Osservazione 11.6.** Abbiamo finora definito solo la congiunzione di insiemi sfumati. Nello spirito della logica fuzzy dobbiamo ancora definire negazione, unione ed implicazione.

**Definizione 11.7.** Una funzione decrescente $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ si chiama *negazione* se $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$.

Una negazione $N$ è detta *stretta* se è continua e strettamente decrescente.

Una negazione stretta $N$ è detta *forte* se è un'involuzione, cioè se $N \circ N = id_{[0,1]}$.

**Osservazione 11.8.** Un'applicazione $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ è una negazione stretta se e solo se è una biezione strettamente decrescente.

**Esempio 11.9.** (1) La più importante ed usata negazione forte è la *negazione standard* $N_s : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definita da $N_s(x) := 1 - x$.

(2) La negazione $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definita da $N(x) := 1 - x^2$ è stretta ma non forte.

(3) Un esempio di negazione che non è stretta e , di conseguenza, non è nemmeno forte, è la *negazione di Gödel* $N_G : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$N_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

**Osservazione 11.10.** La negazione standard $N_s$ è stata usata per definire il complemento (standard) di un insieme sfumato (definizione 10.6).

**Nota 11.11.** Nel seguito useremo comunque sempre la negazione standard $\bigcirc_x 1 - x$. In questo caso da una t-norma $\otimes$ otteniamo una s-norma $\widehat{\otimes}$ e da essa di nuovo $\otimes = \widehat{\widehat{\otimes}}$, come visto nell'osservazione 5.4. Esistono varie generalizzazioni che solo menzioniamo: algebre di De Morgan, 1-monoidi, algebre di Girard, MV-algebre e le T-tribù; cfr. Klement/Mesiar/Pap [A], pag. 233.

**Definizione 11.12.** Ci limiteremo quindi nel seguito al caso più importante di un'insiemistica fuzzy basata su una t-norma $\otimes$ e la negazione standard. Useremo le seguenti notazioni:

(1) $0_X := \bigcirc_x 0 : X \longrightarrow [0,1] \qquad 1_X := \bigcirc_x 1 : X \longrightarrow [0,1]$

(2) Per $A, B \in [0,1]^X$ siano

$$\begin{aligned} A \wedge_\otimes B &:= \bigcirc_x A(x) \otimes B(x) : X \longrightarrow [0,1] \\ A \vee_\otimes B &:= \bigcirc_x A(x) \widehat{\otimes} B(x) : X \longrightarrow [0,1] \\ \neg_\otimes &:= \bigcirc_x 1 - A(x) : X \longrightarrow [0,1] \end{aligned}$$

Talvolta nei calcoli useremo la più semplice, ma meno intuitiva, notazione funzionale, per cui

$$A \wedge_\otimes B = A \otimes B$$
$$A \vee_\otimes B = A \widehat{\otimes} B$$
$$\neg_\otimes A = 1_X - A$$

Per $\otimes = \min$ otteniamo la teoria classica degli insiemi sfumati di Zadeh discussa nel capitolo precedente.

**Osservazione 11.13.** Nell'insiemistica classica, per un sottoinsieme $A \subset X$ si hanno sempre le relazioni

$$A \cap (X \setminus A) = \emptyset$$
$$A \cup (X \setminus A) = X$$

che corrispondono alla legge aristotelica del terzo escluso. Questa legge non può essere estesa alla logica fuzzy. Sia infatti $\otimes$ una t-norma che non possiede zerodivisori $\neq 0$. Per $a \in (0,1)$ allora anche $1 - a \in (0,1)$ e quindi, per ipotesi, $a \otimes (1-a) \neq 0$ e perciò anche $a \widehat{\otimes} (1-a) = 1 - (1-a) \neq 1$.

Sia adesso $A \in [0,1]^X$. Se $A \neq 0_X, 1_X$, vediamo allora che, sempre nella stessa ipotesi che $\otimes$ non possieda zerodivisori $\neq 0$ è violata la legge del terzo escluso:

$$A \wedge_\otimes (1_X - A) \neq 0_X$$
$$A \vee_\otimes (1_X - A) \neq 1_X$$

Infatti per ogni $x \in X$ con $A(x) \neq 0, 1$ abbiamo come prima

$$(A \wedge_\otimes (1_X - A))(x) = A(x) \otimes (1 - A(x)) \neq 0$$
$$(A \vee_\otimes (1_X - A))(x) = A(x) \widehat{\otimes} (1 - A(x)) \neq 1$$

Questo fatto è proprio caratterisico per la logica fuzzy che vuole essere una logica a più di due valori.

**Osservazione 11.14.** Sia $A \in [0,1]^X$. Allora $\neg_\otimes \neg_\otimes A = A$.

Dimostrazione. Ciò è chiaro se usiamo la notazione funzionale: $1_X - (1_X - A) = A$.

**Definizione 11.15.** Per $A, B \in [0,1]$ definiamo *l'implicazione*

$$A \Longrightarrow_\otimes B := B \vee_\otimes \neg_\otimes A = B \widehat{\otimes} (1_X - A)$$

Nella teoria generale (cfr. nota 11.11) vengono considerati anche altri concetti di implicazione per i quali dobbiamo rimandare alla letteratura, ad esempio Klement/Mesiar/Pap [A], Gottwald, Nguyen/Walker, pagg. 171-176, Alsina/Frank/Schweizer, pagg. 123-125.

**Osservazione 11.16.** Siano $A, B \in [0,1]^X$. Allora

$$A \Longrightarrow_\otimes B = \neg_\otimes B \Longrightarrow_\otimes \neg_\otimes A.$$

Nella teoria generale questa (classica) simmetria contrappositiva è stata studiata da Fodor e da Janet.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\neg_\otimes B \Longrightarrow_\otimes \neg_\otimes A &= \neg_\otimes A \vee_\otimes \neg_\otimes\neg_\otimes B\\ &= \neg_\otimes A \vee_\otimes B\\ &= A \Longrightarrow_\otimes B\end{aligned}$$

**Definizione 11.17.** Una *funzione di Lukasiewicz* è un'applicazione $[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Le funzioni di Lukasiewicz nella logica fuzzy corrispondono quindi alle funzioni booleane $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ della logica classica. Un'*estensione di Lukasiewicz* di una funzione booleana $\alpha : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ è un'applicazione $E : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ che su $\{0,1\}^n$ coincide con $\alpha$.

**Esempio 11.18.** Ogni t-norma è un'estensione di Lukasiewicz dell'AND booleano, ogni s-norma è un'estensione di Lukasiewicz dell'OR booleano; la negazione $\bigcirc_x 1-x$ è un'estensione della negazione booleana.

**Definizione 11.19.** Un'*implicazione di Lukasiewicz* è un'estensione di Lukasiewicz $I$ dell'implicazione booleana.

Ciò significa che $I$ è un'applicazione $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ che soddisfa le condizioni espresse dalla seguente tabella:

| a | b | I(a,b) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

È evidente che ciò si verifica per le implicazioni introdotte nella definizione 11.15.

**Nota 11.20.** Useremo, come già per le variabili aleatorie, anche per gli elementi $A, B \in [0,1]^X$ le notazioni

$$\begin{aligned}&(A=\alpha) = \{x \in X \mid A(x) = \alpha\}\\ &(A\le\alpha) = \{x \in X \mid A(x) \le \alpha\}\\ &(A\le B) = \{x \in X \mid A(x) \le B(x)\}\end{aligned}$$

ecc. L'insieme $(A=1)$ si chiama talvolta il nucleo di $A$.

$A$ si dice *normato* (o *normale*), se $(A=1) \neq \emptyset$.

**Definizione 11.21.** Siano $A \in [0,1]^X$ e $B \in [0,1]^Y$. Allora possiamo definire il *prodotto cartesiano* di $A$ e $B$ rispetto a $\otimes$ come

$$A \times_\otimes B := \bigcirc_{(x,y)} A(x) \otimes B(y) : X \times Y \longrightarrow [0,1]$$

Con questa nozione è adesso possibile introdurre *relazioni fuzzy* e in particolare relazioni di equivalenza fuzzy; cfr. Klement/Mesiar/Pap [A], pagg. 254-268.

**Definizione 11.22.** Una *relazione fuzzy* (binaria) su $X$ è un elemento di $[0,1]^{X\times X}$.

**Definizione 11.23.** Una $\otimes$-equivalenza su $X$ è definita come un elemento $E \in [0,1]^{X\times X}$ che possiede le seguenti propietà:

(1) $E(x,x) = 1$ (riflessività)

(2) $E(x,y) = E(y,x) = 1$ (simmetria)

(3) $E(x,y) \otimes E(y,z) \leq E(x,z)$ ($\otimes$-transitività)

$E(x,y)$ può essere interpretato come il *grado di uguaglianza* o il *grado di indistinguibilità* di $x$ e $y$.

In aggiunta, se si ha

$E(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x = y$ (proprietà di separazione)

allora la $\otimes$-equivalenza è chiamata *separata* o, semplicemente, una $\otimes$-uguaglianza.

# 12. Le t-norme di Frank

**Nota 12.1.** Le norme di Frank svolgono un ruolo chiave nella logica fuzzy generalizzata a cui abbiamo accennato nel capitolo precedente.

**Definizione 12.2.** Una *t-norma di Frank* è un'applicazione $F_\lambda : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definita da:

$$F_\lambda(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{se } \lambda = 0 \\ xy & \text{se } \lambda = 1 \\ \max(x+y-1,0) & \text{se } \lambda = \infty \\ \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\lambda \in [0,\infty]$.

È chiaro che le t-norme di Frank sono continue.

**Osservazione 12.3.** Sia $F_\lambda$ una t-norma di Frank. Allora:

(1) $F_\lambda$ è archimedea se e solo se $\lambda \in (0,\infty]$.

(2) $F_\lambda$ è stretta se e solo se $\lambda \in (0,\infty)$.

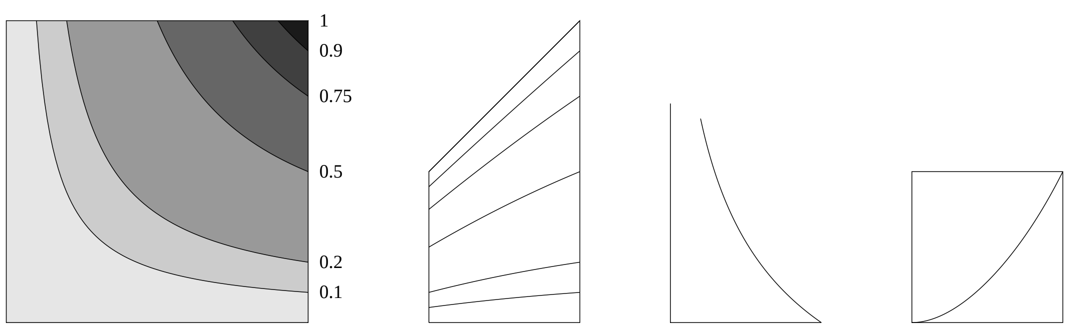
**Osservazione 12.4.** L'unica t-norma di Frank nilpotente è $F_\infty$.

**Nota 12.5.** Le t-norme di Frank sono anche legami e possiedono proprietà statistiche interessanti per le funzioni di distribuzione bivariate.

**Definizione 12.6.** Una generatrice della t-norma di Frank $F_\lambda$ è l'applicazione $g_\lambda : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ definita da:

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} -\log x & \text{se } \lambda = 1 \\ 1-x & \text{se } \lambda = \infty \\ \log\left(\frac{\lambda-1}{\lambda^x-1}\right) & \text{se} \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty] \end{cases}$$

**Esempio 12.7.** Troviamo la rappresentazione grafica di $F_{\frac{1}{2}}$.

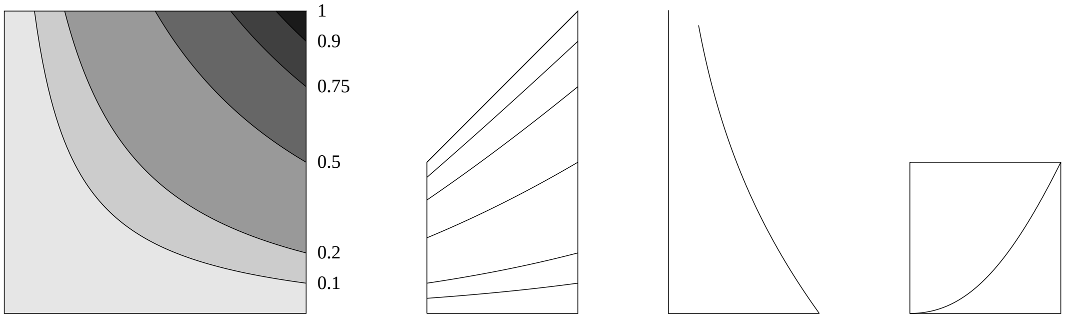



$x \otimes y = F_{0.5}(x,y)$

Per la definizione 12.6 la generatrice $g = g_{\frac{1}{2}}$ è data da
$g(x) = \log \frac{0.5-1}{0.5^x-1} = \log \frac{0.5}{1-0.5^x} = -\log 2 - \log(1 - 2^{-x})$.
Se usiamo di nuovo $h$ per $g^{-1}$, abbiamo $h(u) = \frac{-\log(1-e^{-u}/2)}{\log 2}$.

Questa t-norma è piuttosto simile a quella dell'esempio 9.15.

**Esempio 12.8.** Troviamo la rappresentazione grafica di $F_2$.




$x \otimes y = F_2(x, y)$

Per la definizione 12.6 la generatrice $g = g_2$ è data da
$g(x) = \log \frac{2-1}{2^x-1} = -\log(2^x - 1)$, mentre $h(u) = \frac{\log(1+e^{-u})}{\log 2}$.

# 13. Le t-norme di Yager

**Nota 13.1.** Una delle più popolari ed importanti famiglie di t-norme per la modellazione dell'intersezione di insiemi sfumati è la *famiglia delle t-norme di Yager*, introdotta da Yager nel 1980 inizialmente solo per il caso $\lambda \geq 1$. L'idea fu quella di utilizzare il parametro $\lambda$ come una misura reciproca della restrittività dell'operatore AND: per $\lambda = 1$ si ha la versione più forte, mentre per $\lambda = \infty$ si ottiene la versione più debole.

**Definizione 13.2.** Una *t-norma di Yager* è un'applicazione
$Y_\lambda : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$Y_\lambda(x,y) = \begin{cases} x \Box y & \text{se } \lambda = 0 \\ \min(x,y) & \text{se } \lambda = \infty \\ \max(1 - ((1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}, 0) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\lambda \in [0, \infty]$.

**Osservazione 13.3.** La sottofamiglia di t-norme di Yager $Y_\lambda$ con
$\lambda \in [1, \infty]$ è una famiglia di legami.

**Osservazione 13.4.** Tutte le t-norme di Yager, eccetto $Y_0$, sono continue.

**Osservazione 13.5.** Sia $Y_\lambda$ una t-norma di Yager. Allora:

(1) $Y_\lambda$ è archimedea se e solo se $\lambda \in [0, \infty)$.

(2) $Y_\lambda$ è nilpotente se e solo se $\lambda \in (0, \infty)$.

Non esistono t-norme di Yager strette.

**Definizione 13.6.** Una generatrice della t-norma di Yager nilpotente $Y_\lambda$ è l'applicazione $g_\lambda : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ definita da $g_\lambda(x) = (1-x)^\lambda$.

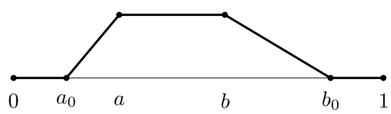
**Osservazione 13.7.** Vediamo perciò che le t-norme di Yager coincidono con le t-norme considerate nell'esempio 9.12.

**Nota 13.8.** La famiglia delle t-norme di Yager è usata in parecchie applicazioni della teoria degli insiemi sfumati, per esempio nel contesto dei numeri sfumati. In particolare, per l'addizione dei numeri sfumati basata sulle t-norme di Yager, è stato dimostrato che la somma di numeri sfumati parzialmente lineari è ancora un numero sfumato parzialmente lineare. Le t-norme di Yager sono presenti inoltre nello studio di t-norme i cui grafici sono superfici rigate.

# 14. Sottoinsiemi sfumati di intervalli

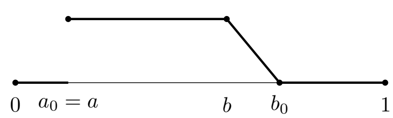
**Definizione 14.1.** Siano $h, a_0, a, b, b_0 \in \mathbb{R}$ con $0 \leq h \leq 1$ e $0 \leq a_0 \leq a \leq b \leq b_0 \leq 1$. Allora possiamo definire la funzione trapezoidale $f$ rappresentata dalla figura nel modo seguente:

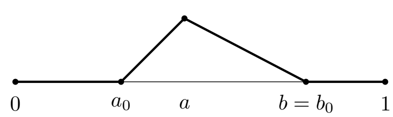
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{per } x \in [0, a_0) \cup (b_0, 1] \\ h & \textbf{per } x \in [a, b] \\ \frac{x-a_0}{a-a_0} h & \textbf{per } x \in [a_0, a) \\ \frac{x-b_0}{b-b_0} h & \textbf{per } x \in (b, b_0] \end{cases}$$

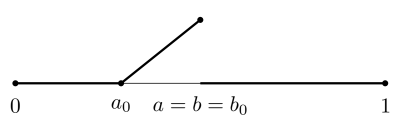


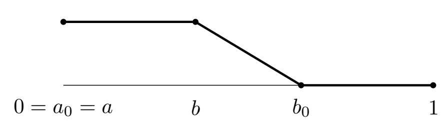

Si noti che per $a = a_0$ oppure $b = b_0$ gli intervalli $[a_0, a)$ rispettivamente $(b, b_0]$ sono vuoti.

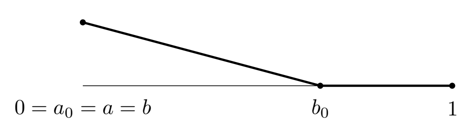
Alcuni casi speciali:



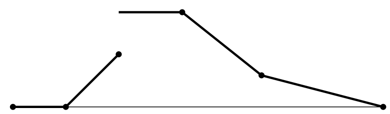



In modo simile si possono costruire funzioni lineari a tratti più generali:



**Definizione 14.2.** Per numeri reali $\alpha, \beta \geq 1$ con $\alpha+\beta > 2$ consideriamo le *potenze miste* $p_{\alpha\beta} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definite da

$$p_{\alpha\beta}(x) := x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

È chiaro che veramente $p_{\alpha\beta}(x) \in [0,1]$ per $x \in [0,1]$.

Queste funzioni si prestano molto bene per la modellazione fuzzy e sono legate alla *distribuzione beta* della statistica, la cui densità è data da $\underset{x}{\bigcirc} \frac{p_{\alpha\beta}(x)}{B(\alpha,\beta)}$, dove $B(\alpha,\beta) := \int_0^1 p_{\alpha\beta}(s)ds$ è la funzione beta; cfr. Evans/Hastings/Peacock, pagg. 34-42.

**Proposizione 14.3.** *Come nella definizione 14.2 siano* $\alpha, \beta \geq 1$ *con* $\alpha + \beta > 2$. *Allora:*

*(1)* $0 < p_{\alpha\beta}(x) < 1$ *per* $x \in (0,1)$.

*(2)* $p_{\alpha\beta}(0) = \begin{cases} 1 & \textit{se } \alpha = 1 \\ 0 & \textit{se } \alpha > 1 \end{cases}$

$p_{\alpha\beta}(1) = \begin{cases} 1 & \textit{se } \beta = 1 \\ 0 & \textit{se } \beta > 1 \end{cases}$

*In particolare* $p_{\alpha\beta}(0) = p_{\alpha\beta}(1) = \infty$ *se* $\alpha, \beta > 0$.

*(3) In tutti i casi la funzione* $p_{\alpha\beta}$ *assume un massimo assoluto in* $x_{\alpha\beta} := \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$.

<u>Dimostrazione.</u> I punti (1) e (2) sono evidenti. Fissati $\alpha$ e $\beta$ poniamo $f := p_{\alpha\beta}$.

(A) Sia $\alpha = 1$. Allora $\beta > 1$ e quindi $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Siccome $0 < f(x) < 1$ per $x \in (0,1)$, vediamo che $f$ possiede un massimo assoluto in $x = 0$. Però in questo caso $x_{\alpha\beta} = \frac{1-1}{1+\beta-2} = 0$.

(B) Sia $\beta = 1$. Allora $\alpha > 1$ e quindi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Siccome $0 < f(x) < 1$ per $x \in (0,1)$, vediamo che $f$ possiede un massimo assoluto in $x = 1$. Ma per $\beta = 1$ abbiamo $x_{\alpha\beta} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1-2} = 1$.

(C) Siano $\alpha, \beta > 1$. Allora $f(0) = f(1) = 0$. La funzione $f$ deve quindi assumere un massimo assoluto in $(0,1)$ che possiamo determinare ponendo la derivata uguale a zero: Sia $x \in (0,1)$. Allora $1 - x \in (0,1)$ e

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} + (\beta-1)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2} \\
&= x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-2}[(\alpha-1)(1-x)-(\beta-1)x]
\end{aligned}
$$

Troviamo quindi l'espressione $(\alpha-1)(1-x)-(\beta-1)x = 0$ ovvero $0 = \alpha - \alpha x - 1 + x - \beta x + x = \alpha - 1 - (\alpha+\beta-2)$, da cui $x = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} = x_{\alpha\beta}$.

**Definizione 14.4.** Con $\alpha, \beta$ ed $x_{\alpha\beta}$ come nella proposizione 14.3, definiamo le funzioni $f_{\alpha\beta} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tramite

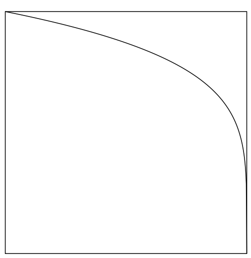
$$f_{\alpha\beta}(x) := \frac{p_{\alpha\beta}(x)}{p_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta})}$$

Queste funzioni hanno un massimo assoluto in $x = x_{\alpha\beta}$ in cui assumono il valore $1$.

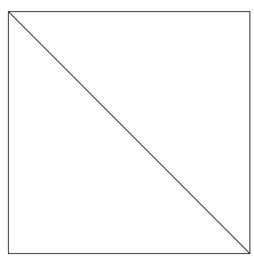
**Osservazione 14.5.**

$$
\begin{aligned}
f_{12} &= \underset{x}{\bigcirc} 1 - x \\
f_{21} &= \underset{x}{\bigcirc} x
\end{aligned}
$$

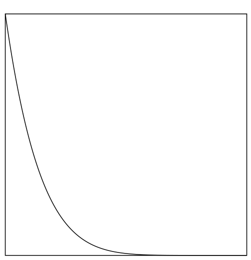
**Esempio 14.6.** Riportiamo i grafici delle funzioni $f_{\alpha\beta}$ per alcuni valori di $\alpha$ e $\beta$ in cui $\alpha = 1$ oppure $\beta = 1$.



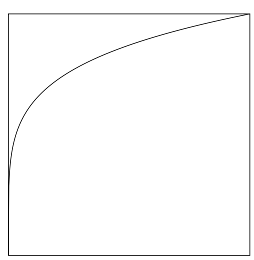
$\alpha = 1 \qquad \beta = 1.2$



$\alpha = 1 \qquad \beta = 2$



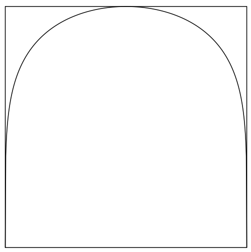
$\alpha = 1 \qquad \beta = 8$



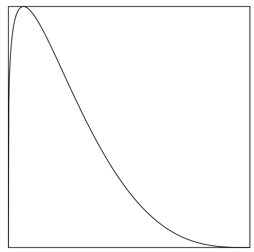
$\alpha = 1.2 \qquad \beta = 1$

Si noti che $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\alpha\beta}(1-x)$.

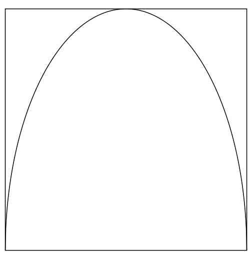
**Esempio 14.7.** Presentiamo i grafici delle funzioni $f_{\alpha\beta}$ per alcuni valori di $\alpha$ e $\beta$ in cui $\alpha$ e $\beta$ sono entrambi maggiori di $1$.



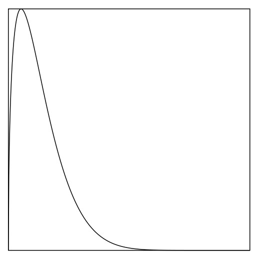
$\alpha = 1.2 \qquad \beta = 1.2$



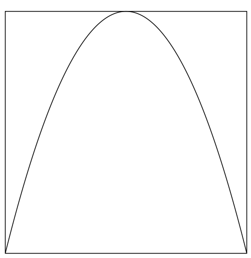
$\alpha = 1.2 \qquad \beta = 4$



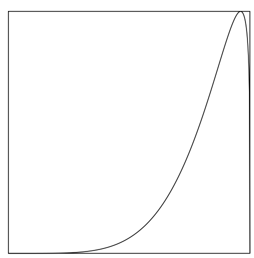
$\alpha = 1.5 \qquad \beta = 1.5$



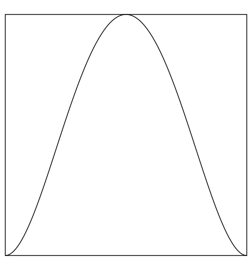
$\alpha = 1.5 \qquad \beta = 10$



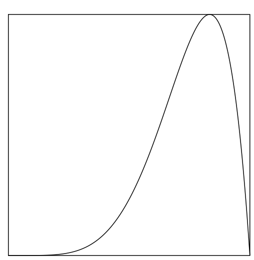
$\alpha = 2 \qquad \beta = 2$



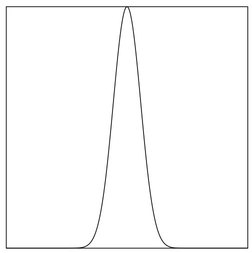
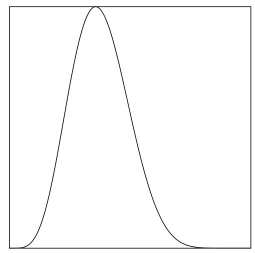
$\alpha = 6 \qquad \beta = 1.2$



$\alpha = 3 \qquad \beta = 3$



$\alpha = 6 \qquad \beta = 2$

$\alpha = 40 \qquad \beta = 40 \qquad\qquad \alpha = 6 \qquad \beta = 10$

**Nota 14.8.** Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

(1) L'applicazione lineare $\varphi := \underset{x}{\bigcirc} \frac{x-a}{b-a} : [a, b] \longrightarrow [0, 1]$ è allora biiettiva e strettamente monotona, con $\varphi(a) = 0$ e $\varphi(b) = 1$.

(2) L'applicazione lineare $\psi := \underset{x}{\bigcirc} a + (b-a)x : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ è uguale all'inversa di $\varphi$, quindi anch'essa biiettiva e strettamente monotona, con $\psi(0) = a$ e $\psi(1) = b$.

(3) In questo modo possiamo da un lato utilizzare elementi $A \in [0, 1]^{[0,1]}$ per ottenere elementi di $[0, 1]^{[a,b]}$, dall'altro elementi di $B \in [0, 1]^{[a,b]}$ per ottenere nuovi elementi di $[0, 1]^{[0,1]}$:

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "A \circ \varphi"'] & {[0,1]} \arrow[d, "A"] \\
 & {[0,1]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "B \circ \psi"'] & {[a,b]} \arrow[d, "B"] \\
 & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

(4) Alla base di ciò sta un principio generale: Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Allora ad ogni $A \in [0, 1]^Y$ corrisponde la composizione $A \circ f \in [0, 1]^X$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "A \circ f"'] & Y \arrow[d, "A"] \\
 & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Mediante queste considerazioni astratte si possono costruire elementi di $[0, 1]^{[0,1]}$ di una forma desiderata, come vedremo negli esempi.

**Esempio 14.9.** Consideriamo la funzione $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$.
Tramite il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\sin"] \arrow[dr, "g"'] & {[-1,1]} \arrow[d, "\varphi"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

in cui $\varphi(x) = \frac{x+1}{2}$, otteniamo la funzione $g = \bigcirc_{x} \frac{1+\sin(x)}{2} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$.

Di essa possiamo considerare la restrizione $f$ definita dal diagramma commutativo:

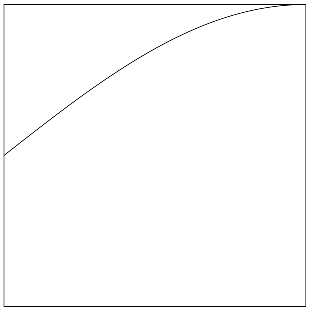
$$\begin{tikzcd}
{[0,\pi/2]} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

in cui $i$ è l'inclusione. Tramite l'applicazione $\psi := \bigcirc_{x} \frac{\pi x}{2} : [0, 1] \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ otteniamo $A : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definita da:

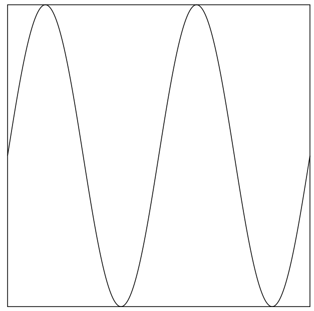
$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[ddrr, "A"'] & {[0,\pi/2]} \arrow[r, "i"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sin"] \\
& & {[-1,1]} \arrow[d, "\varphi"] \\
& & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Complessivamente abbiamo $A = f \circ \psi = g \circ i \circ \psi = \varphi \circ \sin \circ i \circ \psi$, per cui $A(x) = \varphi(\sin(\psi(x))) = \varphi(\sin \frac{\pi x}{2}) = \frac{1+\sin(\pi x/2)}{2}$.

In modo simile otteniamo la funzione $\bigcirc_x \frac{1+\sin 4\pi x}{2}$ se sostituiamo l'intervallo $[0, \pi/2]$ con $[0, 4\pi]$.



$\bigcirc_x \dfrac{1+\sin(\pi x/2)}{2}$

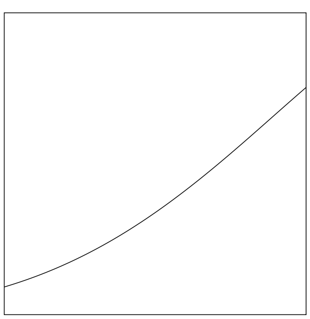


$\bigcirc_x \dfrac{1+\sin 4\pi x}{2}$

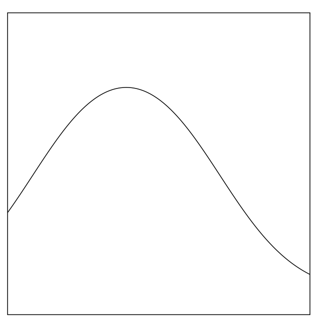
**Esempio 14.10.** Consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, "A"'] & {[0.4, 0.7]} \arrow[r, "i"] & {[0,1]} \arrow[d, "f_{6,2}"] \\
& & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

dove $\psi(x) = 0.4 + 0.3x$. Allora $A(x) = f_{6,2}(0.4 + 0.3x)$. Combinando queste costruzioni si possono ottenere molte funzioni interessanti, come mostra la figura:



$A(x) = f_{6,2}(0.4 + 0.3x)$



$B = \bigcirc_x A\left(\dfrac{1+\sin 4x}{2}\right)$

$B$ corrisponde al diagramma commutativo:

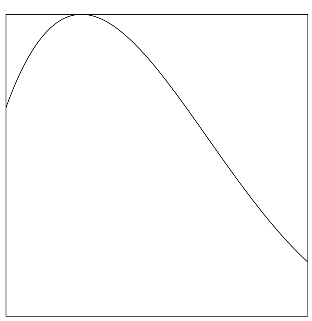
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\sin"] & {[-1,1]} \arrow[r, "\varphi"] & {[0,1]} \arrow[r, "\psi"] & {[0.4,0.3]} \arrow[r, "i"] & {[0,1]} \arrow[d, "f_{6,2}"] \\
{[0,1]} \arrow[u, "i"] \arrow[rrrr, "B"] & & & & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

in cui $\varphi(x) = \frac{x+1}{2}$ come nell'esempio 14.9.

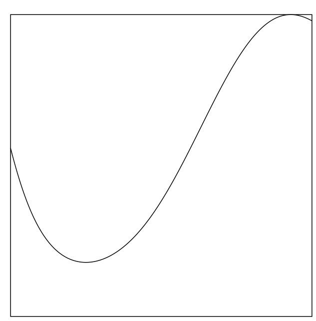
**Esempio 14.11.** Tramite iterazione da un elemento $A \in [0,1]^{[0,1]}$ otteniamo nuovi elementi di $[0,1]^{[0,1]}$. Le figure rappresentano la funzione $A$ definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "A"'] & {[0.1,0.7]} \arrow[d, "f_{2,4}"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

con $\psi = \underset{x}{\bigcirc}\, 0.1 + 0.6x$ e la funzione $A \circ A$



$A = \underset{x}{\bigcirc}\, f_{2,4}(0.1 + 0.6x)$

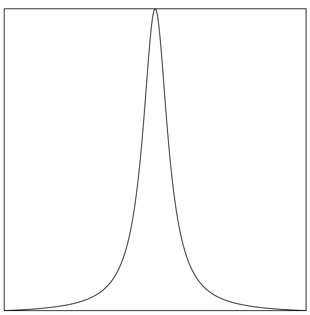


$A \circ A$

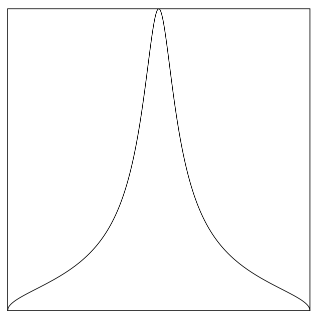
**Esempio 14.12.** Consideriamo per $a > 0$ il diagramma commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, "A"'] & {[-a,a]} \arrow[r, "f"] & {[\frac{1}{1+a^2},1]} \arrow[d, "\varphi"] \\
& & {[0,1]}
\end{tikzcd}
$$

con $\psi(x) = 2ax - a$, $\varphi(x) = \frac{x(1+a^2)-1}{a^2}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Allora $A(x) = \frac{4x(1-x)}{1+(2ax-a^2)}$.



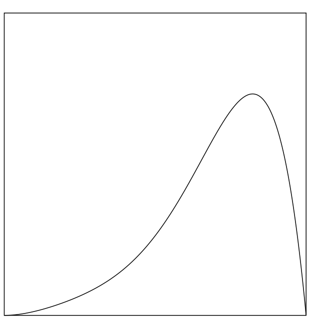
$A$



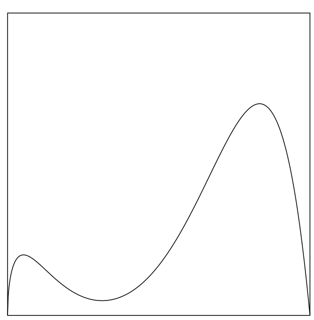
$\bigcirc_{x} \sqrt{A(x)}$

**Osservazione 14.13.** Siano $A, B \in [0,1]^{[0,1]}$ e $\lambda \in [0,1]$.
Come visto nella definizione 10.8, $\lambda A + (1-\lambda)B \in [0,1]^{[0,1]}$.

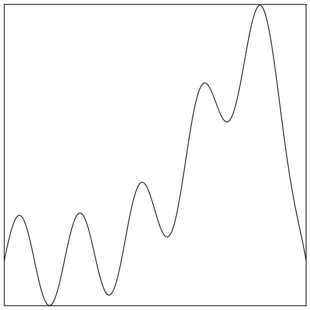
Più in generale per $\lambda + \mu \leq 1$ si ha $\lambda A + \mu B \in [0,1]^{[0,1]}$. In questo modo si possono modificare sottoinsiemi sfumati noti:



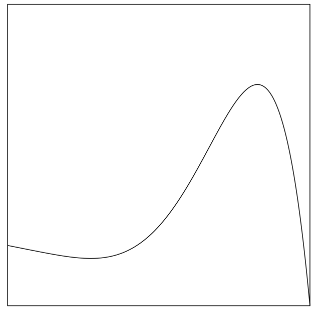
$\bigcirc_{x} 0.7 f_{6,2} + 0.1 f_{3,3}$



$\bigcirc_{x} 0.7 f_{6,2} + 0.2 f_{1.5,10}$

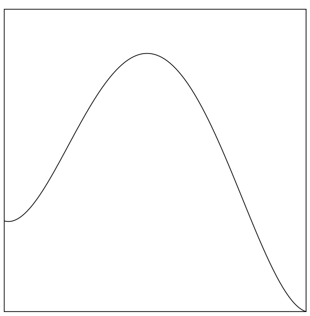


$\bigcirc_x\, 0.7 f_{6,2}(x) + 0.3\dfrac{1+\sin 10\pi x}{2}$

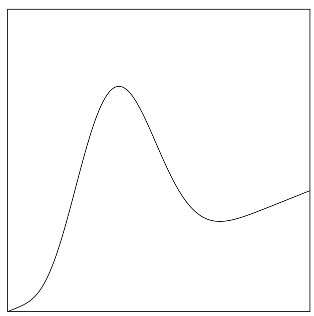


$\bigcirc_x\, 0.7 f_{6,2}(x) + 0.2(1-x)$

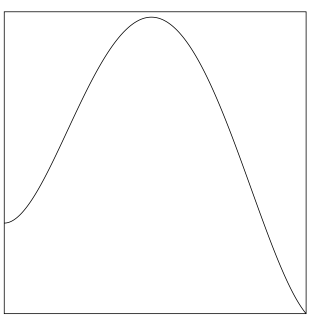
**Nota 14.14.** Particolarmente interessanti sono combinazioni con espressioni della forma $x^n$ oppure $(1-x^n)$ come nella quarta figura dell'osservazione 14.14.



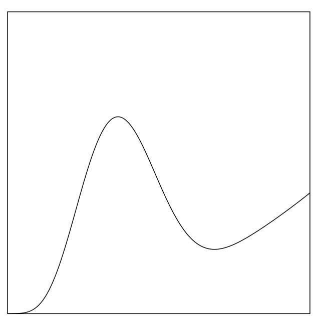
$\bigcirc_x\, 0.7 f_{3,3}(x) + 0.3(1-x)$



$\bigcirc_x\, 0.7 f_{6,10}(x) + 0.4x$



$\bigcirc_x\, 0.7 f_{3,3}(x) + 0.3(1-x^4)$



$\bigcirc_x\, 0.7 f_{6,10}(x) + 0.4x^2$

**Nota 14.15.** Tramite le biiezioni $\operatorname{artanh} : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ e $\underset{x}{\bigcirc}\operatorname{artanh}(2x-1)[0,1] \longrightarrow [-\infty,\infty]$, da ogni funzione $f : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ oppure $g : [-\infty,\infty] \longrightarrow [0,1]$, otteniamo elementi di $[0,1]^{[0,1]}$:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r] \arrow[dr, "A"'] & {[0,\infty]} \arrow[d, "f"] \\
 & {[0,1]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r] \arrow[dr, "B"'] & {[-\infty,\infty]} \arrow[d, "g"] \\
 & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

con $A := \underset{x}{\bigcirc} f(\operatorname{artanh} x)$ e $B := \underset{x}{\bigcirc} g(\operatorname{artanh}(2x-1))$.

**Nota 14.16.** Per $n \in \mathbb{N}+2$ la distribuzione $\chi^2$ con $n$ gradi di libertà possiede densità $q_n$ data da

$$q_n(x) = \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$$

La funzione possiede un massimo assoluto in $x = n-2$, per $n = 2$ quindi in $x = 0$. Siccome $q_n \geq 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} q_n(x) = 0$, possiamo porre $q_n(\infty) = 0$, e se poniamo

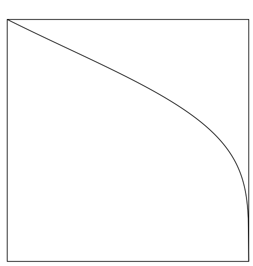
$$r_n(x) := \frac{q_n(x)}{q_n(n-2)}$$

otteniamo una funzione $r_n : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ e da essa, con la tecnica della nota 14.15, funzioni $A_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definite da $A_n(x) := r_n(\text{artanhx})$.

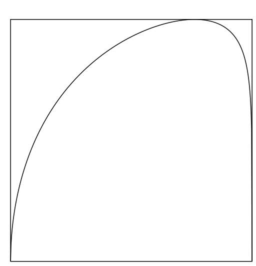
Dettagli sulla distribuzione $\chi^2$ si trovano in Evans/Hastings/Peacock, oppure in Rinne, pagg. 371-373.

Siccome $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, per $G(n) := \Gamma(\frac{n}{2})$ possiamo usare la seguente funzione in Python:

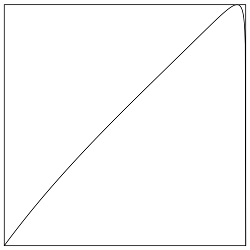
```
def G(n):
 if n==1: return math.sqrt(math.pi)
 if n==2: return 1
 return G(n-2)*n/2.0
```



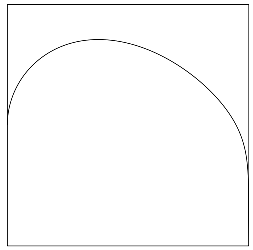
$A_2$



$A_3$



$A_4$

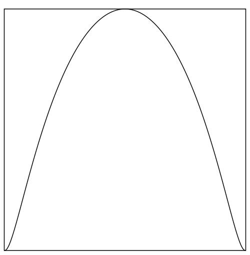


$\frac{A_3(x)+1-x^2}{2}$

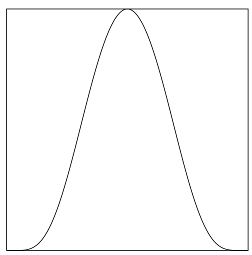
**Nota 14.17.** Per $\lambda > 0$ possiamo considerare la funzione $g_\lambda := \underset{x}{\bigcirc} e^{-\lambda x^2} : [-\infty, \infty] \longrightarrow [0,1]$ che in statistica è nota come *funzione d'errore*, e quindi comporla con la funzione $\underset{x}{\bigcirc} \operatorname{artanh}(2x-1)$ per ottenere una funzione $e_\lambda^{(2)} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$e_\lambda^{(2)}(x) := e^{-\lambda \operatorname{artanh}^2(2x-1)}$$

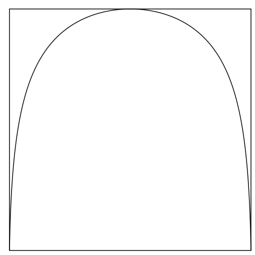
$e_\lambda^{(2)}$ possiede un massimo assoluto in $x = \frac{1}{2}$.



$\underset{x}{\bigcirc} e^{-\operatorname{artanh}^2(2x-1)}$



$\underset{x}{\bigcirc} e^{-4 \operatorname{artanh}^2(2x-1)}$

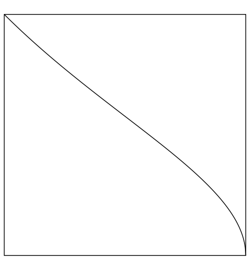


$\underset{x}{\bigcirc} e^{-0.25 \operatorname{artanh}^2(2x-1)}$

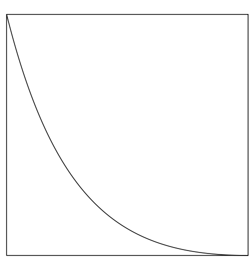
**Nota 14.18.** Similmente per $\lambda > 0$ possiamo considerare la funzione $g_\lambda := \underset{x}{\bigcirc} e^{-\lambda x} : [0, \infty] \longrightarrow [0,1]$ (*densità della distribuzione esponenziale*) e comporla con la funzione artanh per ottenere una funzione $e_\lambda^{(1)} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$e_\lambda^{(1)}(x) := e^{-\lambda \operatorname{artanh}(x)}$$

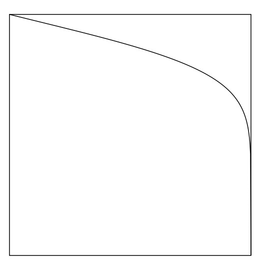
$e_\lambda^{(1)}$ possiede un massimo assoluto in $x = 0$.



$\underset{x}{\bigcirc} e^{-\operatorname{artanh}(x)}$



$\underset{x}{\bigcirc} e^{-4 \operatorname{artanh}(x)}$



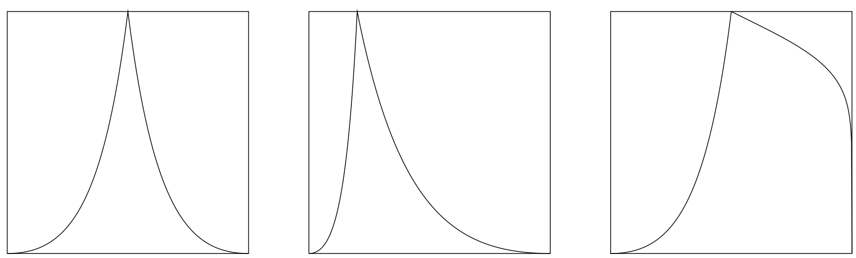
$\underset{x}{\bigcirc} e^{-0.25 \operatorname{artanh}(x)}$

**Nota 14.19.** Siano $m \in (0,1)$ ed $A, B \in [0,1]^{[0,1]}$ tali che $A(1) = B(0)$. Allora possiamo incollare $A$ e $B$ in $m$ nel modo illustrato dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0,m]} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr] & {[0,1]} \arrow[d, shift right, "A"'] \arrow[d, shift left, "B"] & {[m,1]} \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[dl] \\
& {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

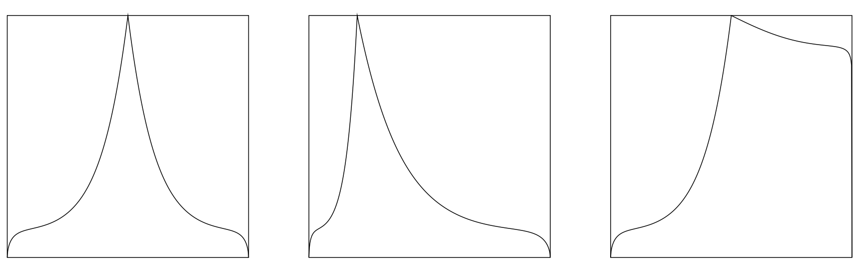
in cui $\varphi_1 := \underset{x}{\bigcirc} \frac{x}{m}$ e $\varphi_2 := \underset{x}{\bigcirc} \frac{x-m}{1-m}$.

Presentiamo alcuni esempi in cui usiamo $e_4^{(1)}$ e $e_{0.25}^{(1)}$:



$m = 0.5$ $\qquad m = 0.2$ $\qquad m = 0.5$

Se qui invece delle funzioni $e_\lambda^{(1)}$ usiamo le funzioni $e_\lambda^{(c)}$ definite da $e_\lambda^{(c)}(x) := e^{-\lambda \cos^2(x) \operatorname{artanh}(x)}$, otteniamo le seguenti funzioni:



$m = 0.5$ $\qquad m = 0.2$ $\qquad m = 0.5$

**Esempio 14.20.** Nella teoria dei valori estremi vengono utilizzate le *densità di Gumbel*

$$g_{a\lambda} := \underset{x}{\bigcirc} \lambda e^{-\lambda(x-a)} e^{-e^{-\lambda(x-a)}}$$

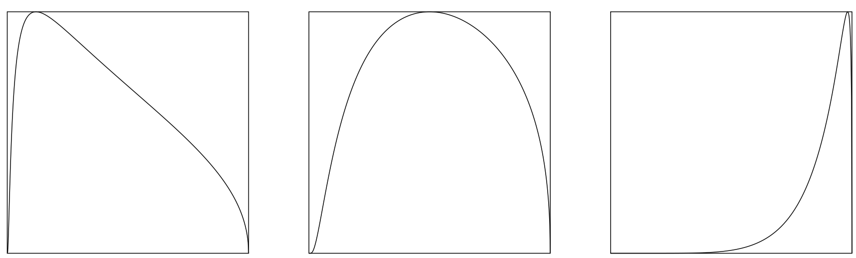
per $a \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in (0, \infty)$; cfr. Evans/Hastings/Peacock, pagg. 85-89, oppure Rinne, pagg. 400-407. Si vede facilmente che $\lim\limits_{x\to\infty} g_{a\lambda}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g_{a\lambda}(x) = 0$, quindi possiamo porre $g_{a\lambda}(\infty) := 0$, $g_{a\lambda}(-\infty) := 0$, ottenendo applicazioni $[-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ che assumono un massimo assoluto in $x = a$.

Dividendo per $g_{a\lambda}(a)$ otteniamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "A"'] & {[-\infty,\infty]} \arrow[d, "g_{a\lambda}"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

con $\varphi := \underset{x}{\bigcirc} \operatorname{artanh}(2x-1)$.

Alcuni grafici:



$\lambda = 1 \quad a = -1$ $\qquad$ $\lambda = 1 \quad a = 0$ $\qquad$ $\lambda = 1 \quad a = 2$

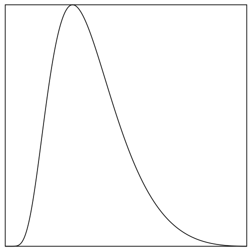
**Nota 14.21.** La *densità della distribuzione lognormale* è definita come la funzione

$$L_{\tau\nu} := \underset{x}{\bigcirc} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\log x - \nu}{\tau}\right)^2}$$

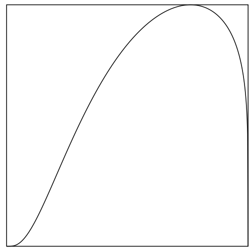
e dipende dai parametri $\nu \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0,\infty)$. Essa assume un massimo assoluto in $x = e^{\nu-\tau^2}$; cfr. Evans/Hastings/Peacock, pagg. 129-133, oppure Rinne, pagg. 363-366. Se poniamo $L_{\tau\nu}(0) = L_{\tau\nu}(\infty) = 0$ e dividiamo per il massimo, otteniamo un'applicazione $[0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ che possiamo comporre secondo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\operatorname{artanh}"] \arrow[dr] & {[0,\infty]} \arrow[d, "L_{\tau\nu}/L_{\tau\nu}(e^{\nu-\tau^2})"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

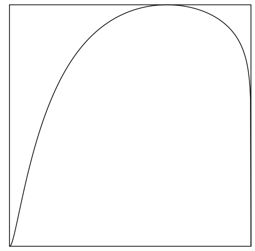
Alcuni grafici:



$\tau = 0.5 \quad \nu = -1$



$\tau = 1 \quad \nu = 1$



$\tau = 1.5 \quad \nu = 2$

**Nota 14.22.** La *densità della distribuzione di Cauchy* è definita come la funzione

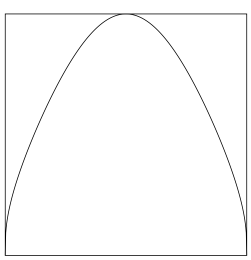
$$C_{a\lambda} := \underset{x}{\bigcirc} \tfrac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2(x-a)^2)}$$

e dipende dai parametri $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, \infty)$. Essa assume un massimo assoluto $(\lambda/\pi)$ in $x = a$.

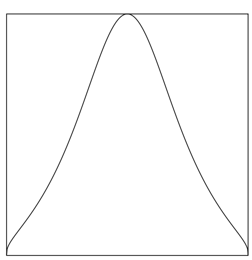
Una discussione più dettagliata si trova in Evans/Hastings/Peacock, pagg. 48-51, oppure in Rinne, pagg. 396-398. Essa è, tra l'altro, utilizzata nella teoria frattale dei mercati finanziari; cfr. Mandelbrot.
Ponendo $C_{a\lambda}(-\infty) = C_{a\lambda}(\infty) = 0$, otteniamo un'applicazione
$[0,1] \longrightarrow [0,1]$ tramite il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "A_{a\lambda}"'] & {[-\infty,\infty]} \arrow[d] \\
 & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

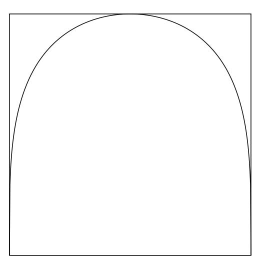
con $\varphi = \underset{x}{\bigcirc} \operatorname{artanh}(2x-1)$ ed $A_{a\lambda} = \frac{1}{1+\lambda^2(\operatorname{artanh}(2x-1)-a)^2}$.



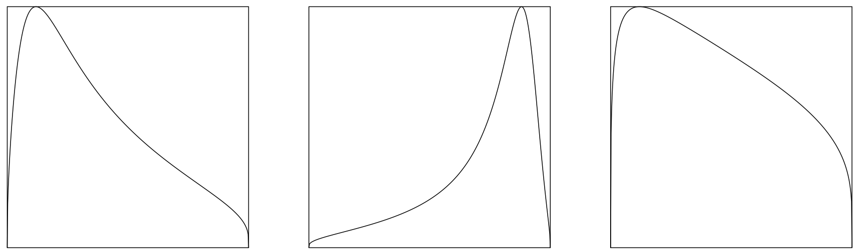
$\lambda = 1 \quad a = 0$



$\lambda = 2 \quad a = 0$



$\lambda = 0.5 \quad a = 0$



$\lambda = 1 \quad a = -1$ $\qquad$ $\lambda = 2 \quad a = 1$ $\qquad$ $\lambda = 0.5 \quad a = -1$

Si osserva che $A_{-a\lambda}(x) = A_{a\lambda}(1-x)$. Infatti

$$\begin{aligned}(\operatorname{artanh}(2x-1)+a)^2 &= (-\operatorname{artanh}(2x-1)-a)^2\\ &= (\operatorname{artanh}(1-2x)-a)^2\end{aligned}$$

Però $1-2x = 2(1-x)-1$.

La semplice interpretazione dei parametri rende questa trasformata della distribuzione di Cauchy particolarmente adatta alla logica fuzzy: aumentando $\lambda$, la curva diventa sempre più appiattita, mentre cambiando $a$ si sposta il punto in cui assume il massimo. Se vogliamo che il massimo si trovi in $x_0$, è sufficiente porre $a = \operatorname{artanh}(2x_0-1)$.

# 15. Alcune applicazioni della logica fuzzy

**Definizione 15.1.** Una *trasformazione di Möbius reale* è un'applicazione della forma $T := \underset{x}{\bigcirc} \frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $ad - bc \neq 0$.

Per $c = 0$, $T$ è un'applicazione lineare definita su $\mathbb{R}$; per $c \neq 0$ invece $T(x)$ è definita per ogni $x \neq -\frac{d}{c}$.

È chiaro che nel primo caso $T([0,1]) = [0,1]$ se e solo se $T$ è l'identità. Nel secondo caso possiamo dividere per $c$ e assumere quindi che $c = 1$.

**Proposizione 15.2.** *Le trasformazioni di Möbius $T \neq \mathrm{id}$ definite su $[0,1]$ e tali che $T(0) = 0$ e $T(1) = 1$ sono esattamente le applicazioni $\underset{x}{\bigcirc} \frac{ax}{x+a-1}$ con $a \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.*

<u>Dimostrazione.</u> (1) Infatti da $T(0) = 0$ segue necessariamente che $b = 0$. Come osservato nella definizione 15.1 possiamo quindi assumere che $T = \underset{x}{\bigcirc} \frac{ax}{x+d}$. Inoltre $1 = T(1) = \frac{a}{1+d}$, per cui $d = a - 1$.

$T$ è definita su $[0,1]$ se e solo se $-d \notin [0,1]$, quindi se e solo se $1 - a \notin [0,1]$, e ciò accade se e solo se $a \notin [0,1]$.

(2) È chiaro adesso che ogni applicazione della forma indicata soddisfa le condizioni dell'enunciato.

**Proposizione 15.3.** *Sia $T := \underset{x}{\bigcirc} \frac{ax}{x+a-1}$ con $a \notin [0,1]$. Allora:*

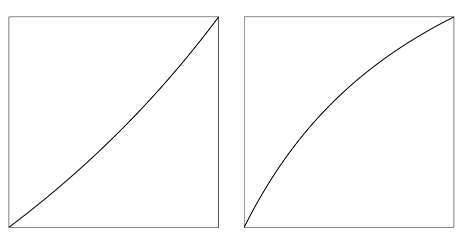
*(1) $T$ è definita su $[0,1]$.*

*(2) $T$ è strettamente crescente.*

*(3) $T([0,1]) = [0,1]$.*

*(4) Se $a < 0$, allora $T(x) < x$ per ogni $x \in (0,1)$.*
*Se $a > 1$, allora $T(x) > x$ per ogni $x \in (0,1)$.*

*Vediamo in particolare che $T(x) \neq x$ per ogni $x \in (0,1)$; il grafico di $T$ interseca quindi la diagonale del quadrato unitario solo nei punti $(0,0)$ e $(1,1)$.*



$a = -3$ $\qquad$ $a = 2$

<u>Dimostrazione.</u> (1) Proposizione 15.2.

(2) $T'(x) = \frac{a(x+a-1)-ax}{(x+a-1)^2} = \frac{a^2-a}{(x+a-1)^2}$. Sia $a < 0$. Allora $a^2 - a > 0$. Sia $a > 1$. Allora $a-1 > 0$ e quindi anche in questo caso $a^2-a = a(a-1) > 0$.

(3) Siccome $T(0) = 0$ e $T(1) = 1$, ciò segue dal punto (1).

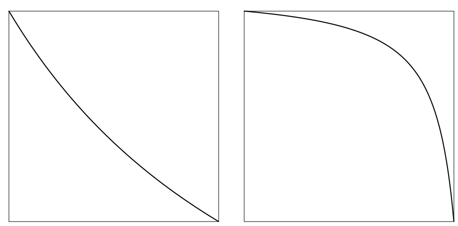
(4) Siano $a \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ed $x \in (0,1)$. Allora

$T(x) - x = \frac{ax}{x+a-1} - x = \frac{ax-x^2-ax+x}{x+a-1} = \frac{x-x^2}{x+a-1}$

L'ipotesi $x \in (0,1)$ implica $x - x^2 > 0$. Per $a < 0$ abbiamo $x + a - 1 \leq 1 + a - 1 = a < 0$, per $a > 1$ invece $x + a - 1 \geq a - 1 > 0$. Perciò $T(x) - x < 0$ per $a < 0$ e $T(x) - x > 0$ per $a > 1$.

**Osservazione 15.4.** Scambiando $x$ con $1 - x$ vediamo che le trasformazioni di Möbius $T \neq \mathrm{id}$ definite su $[0,1]$ con $T(0) = 1$ e $T(1) = 0$ sono esattamente le applicazioni della forma $T := \underset{x}{\bigcirc} \frac{a(1-x)}{1-x+a-1} = \frac{a(1-x)}{a-x}$.

Esse nella letteratura ingegneristica sono note come *trasformazioni di Sugeno*; cfr. Del Favero, pag.30 e Nguyen/Walker, pag.106.



$a = -1.5$ $\qquad$ $a = 1.1$

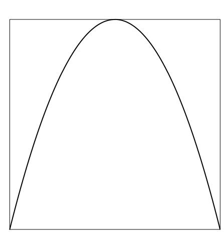
**Proposizione 15.5.** *Siano* $x_0, y_0 \in (0,1)$. *Allora esiste un'unica trasformazione di Möbius della forma* $T := \underset{x}{\bigcirc} \frac{ax}{x+a-1}$ *con* $T(x_0) = y_0$.

*Per essa* $a = y_0 \frac{1-x_0}{y_0-x_0}$.

Dimostrazione. Sia $\frac{ax_0}{x_0+a-1} = y_0$. Allora $ax_0 = x_0y_0 + ay_0 - y_0$, quindi $a(y_0 - x_0) = y_0 - y_0x_0$. Ciò implica l'enunciato.

**Esempio 15.6.** Un'applicazione pratica della teoria fin qui proposta consiste nella modellizzazione di temperature ottimali. Cerchiamo di ottenere una temperatura ottimale di $35°$ tra una gamma di temperature che può variare tra gli $0°$ e i $100°$. A questo proposito possiamo richiedere che la funzione cercata assuma il suo massimo in $0.35$.

Partiamo dalla curva $f := \underset{x}{\bigcirc} 4x(1-x)$.

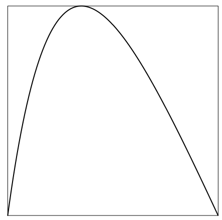


Essa assume il suo massimo in $0.5$. Dalla proposizione 15.5 otteniamo una trasformazione di Möbius $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ con $T(0.35) = 0.5$.

$T$ è della forma $T(x) = \frac{ax}{x+a-1}$ con

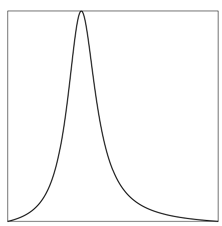
$a = 0.5\frac{1-0.35}{0.5-0.35} = \frac{0.65}{2 \cdot 0.15} = \frac{0.65}{0.3} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$

Otteniamo così la funzione $f \circ T$ con il seguente grafico:



Questa funzione assume il suo massimo in $0.35$, però i valori di ottimalità alle temperature alte sono troppo grandi: ad esempio si ha $f(T(0.5)) = 0.91$, e ciò significherebbe un'ottimalità di $0.91$ per una temperatura di $50°$. Dobbiamo perciò stringere la curva in modo tale che ad esempio un gradimento di $0.82$ si riduca ad uno di $0.14$.

La monotonia delle funzioni considerate ci permette di ottenere questo comportamento semplicemente usando $S \circ f \circ T$, dove $S$ è la trasformazione di Möbius per cui $S(0.82) = 0.14$. $S$ è della forma $S(x) = \frac{bx}{x+b-1}$ con $b = 0.14\frac{1-0.82}{0.14-0.82} = \frac{0.14 \cdot 0.18}{-0.68}$. La funzione $S \circ f \circ T$ ha il grafico



che può essere considerato piuttosto soddisfacente.

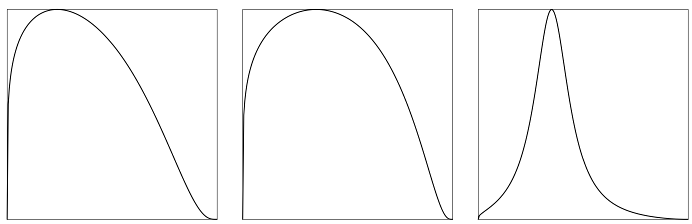
Elenchiamo alcune temperature e il loro indice di gradimento (arrotondamento a due cifre):

| | |
|---|---|
| $5°$ | 0.02 |
| $10°$ | 0.04 |
| $20°$ | 0.18 |
| $35°$ | 1.00 |
| $40°$ | 0.76 |
| $50°$ | 0.27 |
| $60°$ | 0.11 |

**Nota 15.7.** Nell'esempio 15.6 abbiamo scelto la trasformazione $S$ in modo che un gradimento di $0.82$ si riduca ad uno di $0.14$. Spesso, come anche in questo caso, si potrebbe cercare invece di ottenere che la funzione finale assuma in un certo punto $x_0$ il valore $y_0$. Supponiamo quindi di voler trasformare una funzione $g$ (nel caso dell'esempio 15.6 ad esempio $g = f \circ T$) in modo tale che $(S \circ g)(x_0) = y_0$. Ciò significa che $S(g(x_0)) = y_0$, perciò $S$ si trova come nella proposizione 15.5 sostituendo $x_0$ con $g(x_0)$.

**Esempio 15.8.** Applichiamo ora la tecnica della nota 15.7 al problema dell'esempio 15.6 partendo dalla funzione $f$ che corrisponde alla seconda figura nella nota 14.21 dopo la riflessione $\underset{x}{\bigcirc} 1-x$. Per $\tau = \nu = 1$ la funzione $L_{\tau\nu}$ assume il suo massimo in $e^{\nu-\tau^2} = 1$, per cui il massimo di $f$ si trova in $1 - \tanh 1$. Per la modellazione della temperatura dell'acqua usiamo perciò la funzione $h = S \circ f \circ T$, dove $T$ ed $S$ sono trasformazioni di Möbius determinate dalle condizioni $T(0.35) = 1 - \tanh 1$ ed $S(f(T(0.6))) = 0.11$.

Otteniamo così i grafici:



$f$ $\qquad$ $f \circ T$ $\qquad$ $S \circ f \circ T$

Confrontiamo i valori ottenuti con quelli dell'esempio 15.6:

| | 15.6 | 15.8 |
|---|---|---|
| $5°$ | 0.02 | 0.05 |
| $10°$ | 0.04 | 0.10 |
| $20°$ | 0.18 | 0.28 |
| $35°$ | 1.00 | 1.00 |
| $40°$ | 0.76 | 0.80 |
| $50°$ | 0.27 | 0.29 |
| $60°$ | 0.11 | 0.11 |

**Definizione 15.9.** $v_1, \ldots, v_s$ siano indeterminate. Definiamo *l'insieme* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(v_1, \ldots, v_s)$ *dei polinomi booleani* nelle indeterminate $v_1, \ldots, v_s$ in modo ricorsivo:

(1) $0, 1 \in \mathcal{B}$.

(2) $v_1, \ldots, v_s \in \mathcal{B}$.

(3) $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{B} \Longrightarrow (p_1 \wedge \ldots \wedge p_k) \in \mathcal{B}$.

(4) $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{B} \Longrightarrow (p_1 \vee \ldots \vee p_k) \in \mathcal{B}$.

(5) $p \in \mathcal{B} \Longrightarrow \neg p \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ è quindi l'insieme di tutte le espressioni formali che si possono ottenere applicando un numero finito di volte le regole (1)-(4); cfr Clote/Kranakis, pag. 2.

Per $p, q \in \mathcal{B}$ possiamo definire $p \Longrightarrow q \in \mathcal{B}$ ponendo $p \Longrightarrow q := (\neg q \vee p)$.

**Definizione 15.10.** Un *sistema di regole fuzzy* $\mathcal{R}$ consiste nei seguenti dati:

(1) Insiemi $X_1, \ldots, X_m$.

(2) Sottoinsiemi sfumati $A_j^i \in [0,1]^{X_j}$ per $j = 1, \ldots, m$ ed $i = 1, \ldots, n$.

(3) Sottoinsiemi sfumati $B^i \in [0,1]^{[0,1]}$ per $i = 1, \ldots, n$.

(4) Un insieme di indeterminate $v_1, \ldots, v_m, w$.

(5) Polinomi booleani $p^i \in \mathcal{B}(v_1, \ldots, v_m)$ per $i = 1, \ldots, n$.

**Definizione 15.11.** $\mathcal{R}$ sia un sistema di regole fuzzy descritto come nella definizione 15.10. $\otimes$ sia una t-norma, $\odot$ un'applicazione associativa $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Definiamo allora un insieme sfumato $S \in [0,1]^{X_1 \times \ldots \times X_m \times [0,1]}$ nel modo seguente:

(1) Per ogni $i = 1, \ldots, n$ formiamo prima il polinomio booleano $r^i := p^i \Longrightarrow w = (\neg w \vee p^i) \in \mathcal{B}(v_1, \ldots, v_m, w)$. Sostituendo in $r^i$ ogni $v_j$ con $A_j^i$ e $w$ con $B^i$ e interpretando le operazioni $\wedge, \vee$ e $\neg$ tramite $\otimes$ come nella definizione 11.12, otteniamo un insieme sfumato $R^i \in [0,1]^{X_1 \times \ldots \times X_m \times [0,1]}$.

(2) Poniamo infine

$$\begin{aligned} S &:= R^1 \odot \ldots \odot R^n \\ &= \bigcirc_z R^1(z) \odot \ldots \odot R^n(z) \in [0,1]^{X_1 \times \ldots \times X_m \times [0,1]} \end{aligned}$$

$S$ si chiama la soluzione sfumata del sistema di regole dato nel contesto delle operazioni $\otimes$ e $\odot$.

(3) Sia adesso $(x_1, \ldots, x_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m$. Allora la funzione $\bigcirc_y S(x_1, \ldots, x_m, y) \in [0,1]^{[0,1]}$ si chiama la risposta sfumata del sistema al vettore d'ingresso $(x_1, \ldots, x_m)$.

Per variazioni di questa tecnica si veda ad esempio il corso di Helmut Thiele, pagg. 174-183.

**Nota 15.12.** La *risposta sfumata ad un vettore d'ingresso* è una funzione $[0,1] \longrightarrow [0,1]$. Nelle applicazioni pratiche è necessario convertire questo insieme sfumato in un preciso valore numerico. Assumiamo di sapere che le risposte sfumate che otteniamo appartengano tutte ad una classe $\mathcal{C} \subset [0,1]^{[0,1]}$ (siano ad esempio tutte continue o almeno integrabili). Allora possiamo effettuare la conversione mediante un operatore di determinazione $D : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$. Molto popolare è il calcolo del baricentro che corrisponde all'operatore $D$ definito da

$$D_\varphi := \frac{\int_0^1 \varphi(x) x dx}{\int_0^1 \varphi(x) dx}$$

per $\varphi$ integrabile $\neq 0$. Altri operatori di determinazione sono descritti in Del Favero, pagg. 47-53.

Se la risposta sfumata $\varphi$ presenta più picchi separati, non è facile trovare un operatore di determinazione adatto, perchè il baricentro (o anche la mediana) si troverà tra i picchi e corrisponderà ad un valore numerico molto basso che evidentemente non sarà una scelta ottimale. In questi casi bisognerà prevedere un meccanismo di scelta o una regola più complicata, limitando ad esempio la scelta a valori in cui la $\varphi$ assume almeno il 75% del suo valore massimale.

**Nota 15.13.** Dal punto di vista matematico i regolatori fuzzy possono essere collegati al seguente problema di estensione di funzioni: Siano $X$ un insieme ed $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ un ricoprimento finito di $X$. Per ogni $i$ sia data una funzione $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) Se gli insiemi $U_i$ sono a due a due disgiunti o se almeno $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$ per ogni $i, j$, allora possiamo trovare una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_{|U_i = f_i}$ per ogni $i$. $f$ è univocamente determinata e può essere descritta dalle condizioni $f(x) := f_i(x)$ se $x \in U_i$.

(2) Nel caso generale possiamo cercare di trovare una soluzione approssimata. La tecnica delle definizioni 15.11 e 15.12 va interpretata in questo senso; quando $\odot = \max$, i regolatori così definiti si chiamano *regolatori di Mamdani* o *regolatori relazionali*.

(3) *I regolatori di Sugeno (o di Takagi-Sugeno-Kang o regolatori funzionali)* sono ancora più vicini all'impostazione matematica: Assumiamo che gli $U_i$ siano sottoinsiemi sfumati di $X$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia data una funzione $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (definita stavolta su tutto $X$). Allora possiamo definire $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ in 2 modi diversi:

$$f(x) := \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_i(x) f_i(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n} U_i(x)}$$

se $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i(x) \neq 0$ per ogni $x$, oppure

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} U_i(x) f_i(x)$$

Talvolta è preferibile la seconda definizione perché evita il problema decisionale a cui abbiamo accennato alla fine della nota 15.12 e che si può presentare anche in questo contesto; richiede però spesso una scelta più accurata degli insiemi $U_i$.

**Definizione 15.14.** Un *regolatore di Sugeno* viene spesso definito in modo simile alla definizione 15.11, ma con sottoinsiemi sfumati solo degli $X_j$. Più precisamente siano dati:

(1) Insiemi $X_1, \ldots, X_m$. Poniamo $X := X_1 \times \ldots \times X_m$.

(2) Sottoinsiemi sfumati $A_j^i \in [0,1]^{X_j}$ per $j = 1, \ldots, m$ e $i = 1, \ldots, n$.

(3) Un insieme di indeterminate $v_1, \ldots, v_m$.

(4) Polinimi booleani $p^i \in \mathcal{B}(v_1, \ldots, v_m)$ per $i = 1, \ldots, n$.

(5) Una t-norma $\otimes$.

(6) In modo analogo al punto (1) della definizione 15.11 formiamo insiemi sfumati $U_i \in [0,1]^X$.

(7) Per ogni $i = 1, \ldots, n$ una funzione $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora con il procedimento al punto (3) della nota 15.13 troviamo una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

# Bibliografia


*Prerequisiti matematici*

**L. Chiodera:** La compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto. Tesi LT Ferrara 2006.

**P. Clote/E. Kranakis:** Boolean functions and computation models. Springer 2002

**G. Dall'Aglio:** Calcolo delle probabilità. Zanichelli 1987.

**R. Ash:** Probability and measure theory. Academic Press 2000.

**J. Elstrodt:** Maß- und Integrationstheorie. Springer 2005.

**M. Evans/N. Hastings/B. Peacock:** Statistical distributions. Wiley 2000.

**A. Rényi:** Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dt. Vlg. Wiss. 1962.

**H. Rinne:** Taschenbuch der Statistik. Deutsch 1997.

**H. Schubert:** Topologie. Teubner 1975.

**H. Tucker:** A graduate course in probability. Academic Press 1967.

*Legami stocastici, t-norme e logica fuzzy*

**C. Alsina/M. Frank/B. Schweizer:** Associative functions. World Scientific 2006.

**C. Alsina/R. Nelsen/B. Schweizer:** On the characterization of a class of binary operations on distribution functions. Stat. Prob. Letters 17 (1993), 85-89.

**J. Fodor:** Contrapositive symmetry of fuzzy implications. Fuzzy Sets Syst. 69 (1995), 141-156.

**C. Genest/J. Quesada/J. Rodriguez/C. Sempi:** A characterization of quasi-copulas. J. Multivar. An. 69 (1999), 193-205.

**S. Gottwald:** Fuzzy sets and fuzzy logic. Vieweg 1993.

**S. Jenei:** New family of triangular norms via contrapositive symmetrization of residuated implications. Fuzzy Sets Syst. 110 (2000), 157-174.

**E. Klement/R. Mesiar/E. Pap [A]:** Triangular norms. Kluwer 2000.

**E. Klement/R. Mesiar/E. Pap [I]:** Triangular norms. Position paper I - basic analytical and algebraic properties. Fuzzy Sets Systems 143 (2004), 5-26.

**E. Klement/R. Mesiar/E. Pap [II]:** Triangular norms. Position paper II - general constructions and parametrized families. Fuzzy Sets Syst. 145 (2004), 411-438.

**E. Klement/R. Mesiar/E. Pap [III]:** Triangular norms. Position paper III - continuous t-norms. Fuzzy Sets Syst. 145 (2004), 439-454.

**R. Nelsen:** An introduction to copulas. Springer 2006.

**H. Nguyen/E. Walker:** A first course in fuzzy logic. Chapman & Hall 2006.

**B. Schweizer/A. Sklar:** Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. Studia Math. 52 (1974), 43-52.

**B. Schweizer/A. Sklar:** Probabilistic metric spaces. Dover 2005.

**H. Thiele:** Einführung in die Fuzzy-Logik. Appunti di un corso, 1971.

*Applicazioni*

**L. Del Favero:** La logica fuzzy ed i veicoli cibernetici di Valentin Braitenberg. Tesi, Ferrara 1996.

**B. Mandelbrot:** The misbehavior of markets. Basic Books 2004.

**T. Ross:** Fuzzy logic with engineering applications. Wiley 2004.

**L. Zadeh:** Fuzzy sets. Information and control 8 (1965), 338-353.