



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E
NATURALI**

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Indirizzo Didattica della Matematica e Divulgazione
Scientifica

**IL TEOREMA DI METRIZZAZIONE
DI URYSON**

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Josef Eschgfäller**

Laureanda:
Michela Gasperoni

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Introduzione	3
1. Notazioni	5
2. Il lemma di Uryson	6
3. Spazi di Lindelöf	9
4. Costruzione di immersioni	13
5. Il teorema di metrizzazione di Uryson	16
6. Spazi paracompatti	18
7. Il teorema di metrizzazione di Smirnov	21
8. La metrica euclidea in alta dimensione	26
9. Metriche non archimedee	32
Bibliografia	37

Introduzione

Come è noto la topologia nasce con l'intento di interpretare un qualsiasi spazio in modo che esso acquisti e generalizzi particolari caratteristiche proprie degli spazi metrici. L'obbiettivo di questa tesi è invece quello di analizzare sotto quali condizioni si possa trovare per un insieme una topologia che risulti indotta da una metrica, ovvero sotto quali condizioni uno spazio risulti metrizzabile. Come punto di arrivo di questa ricerca segnaliamo il teorema di metrizzazione di Uryson, enunciato e dimostrato nel capitolo 5, e il teorema di metrizzazione di Smirnov, di cui ci occupiamo nel capitolo 7. Approfondiremo inoltre alcune proprietà degli spazi metrici, introducendo ad esempio il teorema di Stone; analizzeremo infine le paradossali proprietà, nelle alte dimensioni, della metrica euclidea e le interessanti caratteristiche delle metriche non archimedee.

Le definizioni di spazio regolare (e completamente regolare) e di spazio normale sono introdotte nel capitolo 2; a seguire vengono esposti diversi risultati che ci aiutano a capire il rapporto reciproco tra queste due proprietà. Nello stesso capitolo inoltre enunciamo e dimostriamo il celebre lemma di Uryson, che ci dà una definizione operativa di spazio normale ed è il punto di partenza fondamentale di tutta la teoria della metrizzazione.

Nel terzo capitolo esponiamo il primo e il secondo assioma di numerabilità, definiamo quindi gli spazi di Lindelöf e gli spazi separabili soffermandoci sulle loro proprietà. Lo studio, che si sviluppa a seguire, delle connessioni esistenti tra gli spazi che soddisfano il secondo assioma, gli spazi di Lindelöf e quelli separabili ci conduce ad enunciare l'interessante teorema 3.20. Esso afferma che, sotto la condizione che lo spazio sia metrico, le tre proprietà citate sono in effetti equivalenti.

Nel capitolo 4 diamo alcune importanti definizioni. Introduciamo in particolare i concetti di topologia debole, di famiglie che separano i punti di uno spazio, di collezione che separa i punti dai chiusi e di immersioni. A questo proposito enunciamo il primo e il secondo teorema d'immersione; quest'ultimo in particolare sarà utile nella dimostrazione del teorema di metrizzazione di Uryson, di cui ci occupiamo nel capitolo successivo. Questo teorema afferma che nel caso di uno spazio X di Hausdorff le tre affermazioni: X è regolare e A_2 , X può essere immerso come sottospazio in $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ e X è separabile e metrizzabile sono di fatto equivalenti.

Per introdurre il teorema di Stone nel sesto capitolo diamo la definizione di spazio paracompatto: uno spazio si dice paracompatto se ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento aperto localmente finito. Il teorema di Stone afferma che ogni spazio metrico è paracompatto, ne consegue dunque una forte caratterizzazione degli spazi metrici.

Nel capitolo successivo troviamo una serie di interessanti teoremi sulla metrizzazione, coronati dal teorema di Smirnov. Questi teoremi ci forniscono diverse condizioni necessarie e sufficienti per la metrizz-

zabilità di uno spazio topologico, ad esempio in termini dell'esistenza di successioni normali compatibili o di famiglie di ricoprimenti con determinate proprietà.

Nello studio della metrica euclidea nelle alte dimensioni scopriamo poi che essa si comporta in un modo decisamente inaspettato. Tale metrica infatti non è, sorprendentemente, adatta all'uso in statistica: ciò è legato al fatto che il volume di una palla di raggio unitario al crescere della dimensione dello spazio si rivela essere sempre più prossimo allo zero. Ne consegue che il volume di un cubo n -dimensionale si concentra nei bordi della figura. Da questo strano comportamento della metrica euclidea prendono vita due paradossi, da noi riportati sotto il nome di paradosso della sfera centrale e paradossi delle pareti.

Una metrica d su uno spazio X si dice non archimedeica se per ogni $x, y, z \in X$ vale $d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$. Questa versione forte della disuguaglianza triangolare, nata prima nella teoria dei numeri, viene usata per una teoria metrica delle varietà aritmetiche ed algebriche, e allo stesso tempo in statistica multivariata ad esempio nella costruzione di raggruppamenti gerarchici.

1. Notazioni

Definizione 1.1. Sia X un insieme. Una *pseudometrica* su X è un'applicazione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y, z \in X$ valgano le seguenti relazioni:

- (1) $d(x, x) = 0$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La coppia (X, d) si chiama allora uno *spazio pseudometrico*.

d si chiama una *metrica*, se è soddisfatta anche la seguente condizione:

- (4) $d(x, y) = 0 \implies x = y$.

In tal caso (X, d) si chiama uno *spazio metrico*.

Osservazione 1.2. Sia (X, d) uno spazio pseudometrico.

Allora $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$.

Dimostrazione. Grazie alle condizioni (1), (2) e (3) della definizione 1.1 abbiamo :

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

Lemma 1.3. Sia (X, d) uno spazio pseudometrico. Per $x, y, u, v \in X$ allora

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Dimostrazione. Facile verifica. Cfr. Chiodera, pag. 11.

Corollario 1.4. Sia (X, d) uno spazio pseudometrico. Allora l'applicazione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è *uniformemente continua* (rispetto alla pseudometrica naturale su $X \times X$).

Definizione 1.5. In uno spazio topologico X denotiamo con $\mathcal{U}(x)$ l'insieme degli intorni di un punto x .

Osservazione 1.6. Sia (X, d) uno spazio pseudometrico. Per $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$ poniamo

$$U_\varepsilon(x) := (d(X, x) < \varepsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$$

e

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subset X \mid \text{esiste } \varepsilon > 0 \text{ con } U_\varepsilon(x) \subset U\}$$

Si verifica facilmente che in questo modo X diventa uno spazio topologico che è di Hausdorff se e solo se d è una metrica.

2. Il lemma di Uryson

Situazione 2.1. X sia uno spazio topologico di Hausdorff.

Definizione 2.2. X si dice *regolare*, se per ogni $x \in X$ ed ogni chiuso $A \subset X$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ ed $A \subset V$.

Definizione 2.3. X si dice *normale* se per ogni coppia A, B di insiemi chiusi e disgiunti di X esistono due aperti disgiunti U e V tali che $A \subset U$ e $B \subset V$.

Lemma 2.4. Sono equivalenti:

(1) X è normale.

(2) Per ogni coppia A, B di chiusi disgiunti di X esiste un aperto U di X con $A \subset U$ e $\bar{U} \cap B = \emptyset$.

Dimostrazione. Siano A, B due chiusi disgiunti di X .

(1) \implies (2): Se è soddisfatta la condizione (1), allora esistono due aperti disgiunti U e V tali che $A \subset U$ e $B \subset V$. Perciò $U \subset X \setminus V$, per cui $\bar{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset X \setminus B$, cosicché $\bar{U} \cap B = \emptyset$.

(2) \implies (1): Sia soddisfatta la condizione (2) e sia U un aperto scelto come nell'enunciato. Allora $V := X \setminus \bar{U} \subset X \setminus U$ è un aperto con $U \cap V = \emptyset$. Per ipotesi $B \subset X \setminus \bar{U} = V$.

Osservazione 2.5. Se X è normale, allora X è regolare.

Dimostrazione. In uno spazio di Hausdorff ogni punto è chiuso, perciò l'enunciato segue direttamente dalla definizione.

Definizione 2.6. \mathbb{Q}_{bin} sia l'insieme dei numeri razionali diadici, ovvero l'insieme dei numeri razionali della forma $r = k/2^n$ con $n > 0$ e $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$.

Teorema 2.7 (lemma di Uryson). X è normale se e solo se per ogni coppia A, B di chiusi di X con $A \cap B = \emptyset$ esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che ($f = 0$, in A) ed ($f = 1$, in B).

Dimostrazione. Seguiamo le dimostrazioni in Willard, pag. 102, ed Engelking, pagg. 41-42.

(1) Supponiamo che X sia normale e che A, B siano due suoi chiusi disgiunti. Per il lemma 2.4. esiste un insieme aperto $U_{1/2}$ tale che $A \subset U_{1/2}$ e $\bar{U}_{1/2} \cap B = \emptyset$. Gli insiemi A ed $X \setminus U_{1/2}$ sono disgiunti e chiusi; lo stesso vale per $\bar{U}_{1/2}$ e B . Ancora per il lemma 2.4. esistono quindi due insiemi aperti $U_{1/4}$ e $U_{3/4}$ tali che:

$$A \subset U_{1/4} \subset \bar{U}_{1/4} \subset U_{1/2} \subset \bar{U}_{1/2} \subset U_{3/4}$$

con $\bar{U}_{3/4} \cap B = \emptyset$. Assumiamo di aver definito gli insiemi $U_{k/2^n}$ con $k = 1, \dots, 2^n - 1$ in modo che

$$A \subset U_{1/2^n} \subset \bar{U}_{1/2^n} \subset \dots \subset \bar{U}_{k-1/2^n} \subset U_{k/2^n} \subset \dots \subset U_{(2^n-1)/2^n}$$

con $\overline{U}_{(2^n-1)/2^n} \cap B = \emptyset$. Allora, usando sempre il lemma 2.4, possiamo definire gli insiemi $U_{k/2^{n+1}}$ per $k = 1, \dots, 2^{n+1} - 1$ con le stesse proprietà viste sopra. Per induzione troviamo così un insieme aperto U_r per ogni $r \in \mathbb{Q}_{\text{bin}}$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$A \subset U_r$ e $\overline{U}_r \cap B = \emptyset$ per ogni $r \in \mathbb{Q}_{\text{bin}}$

$\overline{U}_r \subset U_s$ per ogni $r, s \in \mathbb{Q}_{\text{bin}}$ con $r < s$.

Ora definiamo $f : X \rightarrow [0, 1]$ nel modo seguente:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin U_r \text{ per ogni } r \in \mathbb{Q}_{\text{bin}} \\ \inf \{r \in \mathbb{Q}_{\text{bin}} \mid x \in U_r\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È evidente che avremo $(f = 0, \text{in } A)$ e $(f = 1, \text{in } B)$. Ora però dobbiamo mostrare che la funzione f è continua, ma ciò segue facilmente dalle seguenti osservazioni (considerando sempre $r, s \in \mathbb{Q}_{\text{bin}}$):

Se $x \notin \overline{U}_r$, allora $f(x) \geq r$ (continuità nei punti x in cui $f(x) = 1$);

se $x \in U_r$, allora $f(x) \leq r$ (continuità nei punti x in cui $f(x) = 0$);

se $x \in U_r - \overline{U}_s$, dove $s < r$, allora $s \leq f(x) \leq r$ (continuità in tutti gli altri punti).

Infatti è sufficiente mostrare che gli insiemi $(f < a)$ ed $(f > b)$, con $a \leq 1$ e $b \geq 0$, sono aperti.

La disuguaglianza $f(x) < a$ è valida se e solo se esiste un $r \in \mathbb{Q}_{\text{bin}}$ tale che $r < a$ e $x \in U_r$, perciò l'insieme $(f < a) = \bigcup_{r \in (\mathbb{Q}_{\text{bin}} < a)} U_r$ è un aperto.

La disuguaglianza $f(x) > b$ invece è valida se e solo se esiste un $s \in (\mathbb{Q}_{\text{bin}} > b)$ tale che $x \notin U_s$. Ma affinché $x \notin U_s$ deve esistere un $r \in (\mathbb{Q}_{\text{bin}} > b)$ tale che $x \notin \overline{U}_r$. Perciò l'insieme

$$(f > b) = \bigcup_{r \in (\mathbb{Q}_{\text{bin}} > b)} X \setminus \overline{U}_r = X \setminus \bigcap_{r \in (\mathbb{Q}_{\text{bin}} > b)} \overline{U}_r$$

è anch'esso un aperto.

(2) Supponiamo ora che A e B siano sottoinsiemi chiusi di X e che $f : X \rightarrow [0, 1]$ sia una funzione continua tale che $(f = 0, \text{in } A)$ ed $(f = 1, \text{in } B)$. Allora evidentemente $(f < \frac{1}{2})$ e $(f > 1/2)$ saranno insiemi aperti e disgiunti in X che conteranno rispettivamente A e B .

Definizione 2.8. X si dice *completamente regolare*, se per ogni $x \in X$ ed ogni chiuso A di X con $x \notin A$ esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$ e $(f = 0, \text{in } A)$.

Osservazione 2.9. Se X è completamente regolare, allora X è regolare.

Dimostrazione. Baldini, osservazione 6.7.

Corollario 2.10. Se X è normale, allora X è completamente regolare.

Dimostrazione. Ciò è una conseguenza diretta del lemma di Uryson.

Proposizione 2.11. Se X è compatto, allora X è normale e quindi

completamente regolare.

Dimostrazione. Chiodera, pag. 19.

Proposizione 2.12. *Se X è metrico, allora X è normale e quindi completamente regolare e regolare.*

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A e B chiusi disgiunti di X . Per ogni $x \in A$ scegliamo un $\delta_x > 0$ in modo tale che $U_{\delta_x}(x)$ non incontri B e per ogni $y \in B$ possiamo scegliere un $\varepsilon_y > 0$ in modo tale che $U_{\varepsilon_y}(y)$ non incontri A . Siano inoltre

$$U := \bigcup_{x \in A} U_{\delta_x/3}(x) \quad \text{e} \quad V := \bigcup_{y \in B} U_{\varepsilon_y/3}(y)$$

Allora U e V sono aperti di X che contengono rispettivamente A e B . Dimostriamo che $U \cap V = \emptyset$. Supponiamo, per assurdo, che esista un elemento $z \in U \cap V$. Allora $d(x, z) < \delta_x/3$ per qualche $x \in A$ e $d(z, y) < \varepsilon_y/3$ per qualche $y \in B$. Perciò $d(x, y) < \delta_x/3 + \varepsilon_y/3$. Se adesso ad esempio $\varepsilon_x \leq \delta_x$, allora $d(x, y) < \delta_x$ e quindi $y \in U_{\delta_x}$, ma ciò è impossibile perché $y \in B$.

3. Spazi di Lindelöf

Situazione 3.1. Siano X ed Y spazi topologici.

Definizione 3.2. Uno spazio topologico in cui ogni punto possiede una base numerabile degli intorni è detto soddisfare il *primo assioma di numerabilità*.

Utilizzeremo la notazione A_1 per indicare uno spazio topologico che soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Definizione 3.3. Uno spazio topologico soddisfa il *secondo assioma di numerabilità* se possiede una base numerabile degli aperti.

Utilizzeremo la notazione A_2 per indicare uno spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Osservazione 3.4. Se uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità allora soddisfa anche il primo assioma. Il vice versa non è vero: ogni spazio discreto non numerabile è A_1 senza essere A_2 .

Proposizione 3.5. *L'immagine di uno spazio A_2 tramite una funzione continua aperta è uno spazio A_2 .*

Dimostrazione. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e aperta. È sufficiente mostrare che se \mathfrak{B} è una base per X , allora $\{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ è una base per Y .

Siano V un aperto di Y ed $y \in V$. Allora $f^{-1}(V)$ è un aperto in X e se scegliamo un punto $x \in f^{-1}(y)$, allora $x \in f^{-1}(V)$. Siccome \mathfrak{B} è una base di X , per qualche $B \in \mathfrak{B}$ abbiamo $x \in B \subset f^{-1}(V)$. Perciò $y \in f(B) \subset V$.

Proposizione 3.6. *Ogni sottospazio di uno spazio A_2 è ancora A_2 .*

Dimostrazione. Se \mathfrak{B} è una base per X ed A è un sottoinsieme di X , allora $\{A \cap B \mid B \in \mathfrak{B}\}$ è una base degli aperti di A .

Proposizione 3.7. *Il prodotto di spazi topologici è A_2 se e solo se ogni fattore è A_2 e, a parte un insieme numerabile di essi, tutti i fattori sono spazi contenenti al massimo un punto (se uno dei fattori è vuoto, anche il prodotto è vuoto).*

Dimostrazione. (1) Supponiamo che $X = \prod_{i \in I} X_i$ sia A_2 . Grazie alla proposizione 3.5 ogni X_i è A_2 , mentre è immediato che ci può essere solo un numero numerabile di fattori non banali.

(2) Vice versa, supponiamo che $\{B_{in} \mid n = 1, 2, \dots\}$ sia una base per X_i per ogni $i \in I$. Allora gli insiemi della forma

$$B_{i_1 n_1} \times \dots \times B_{i_k n_k} \times \prod \{X_i \mid i \neq i_1, \dots, i_k\}$$

costituiscono una base per il prodotto degli A_i . È immediato che questa base è numerabile.

Definizione 3.8. Uno spazio topologico X è detto *separabile* se in X esiste un sottoinsieme numerabile e denso.

Definizione 3.9. Sia $\Gamma := \mathbb{R}^2: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ il semipiano superiore chiuso. Gli intorni dei punti appartenenti all'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ siano gli intorni derivati dalla topologia euclidea. Per ogni punto x sull'asse reale invece scegliamo come base degli intorni gli insiemi $\{x\} \cup A$, dove A è un disco contenuto in Γ e tangente all'asse reale in x . In questo modo si ottiene uno spazio topologico che viene chiamato *piano di Moore*.

Proposizione 3.10. X sia separabile ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva. Allora Y è separabile.

Dimostrazione. A sia un sottoinsieme denso di X . Per la continuità di f allora $f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset Y$. Ma f è suriettiva, per cui $f(X)$ coincide con Y . Quindi anche $\overline{f(A)} = Y$.

Osservazione 3.11. Un sottospazio di uno spazio separabile non è necessariamente separabile.

Dimostrazione. Il piano di Moore è separabile. Ma il sottospazio costituito dall'asse reale nella topologia indotta porta la topologia discreta e non è numerabile. Perciò questo sottospazio non può essere separabile – infatti è chiaro che uno spazio discreto è separabile se e solo se è numerabile.

Proposizione 3.12. Un sottospazio aperto di uno spazio separabile è separabile.

Dimostrazione. X sia separabile ed A un aperto di X . Sia D un sottoinsieme denso di X . La chiusura di $A \cap D$ in A è uguale ad $A \cap \overline{A \cap D}$. È quindi sufficiente dimostrare che $A \subset \overline{A \cap D}$.

Supponiamo, per assurdo, che esista $a \in A$ tale che $a \notin \overline{A \cap D}$. Allora esiste un intorno U di a con $U \cap A \cap D = \emptyset$. Ma anche $U \cap A$ è un intorno di a , e ciò è in contraddizione all'ipotesi che D sia denso in X .

Definizione 3.13. X è di *Lindelöf* se ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento numerabile.

Teorema 3.14. Uno spazio Lindelöf regolare è normale.

Dimostrazione. Siano A e B due chiusi disgiunti in uno spazio Lindelöf regolare X . Per ogni $a \in A$ sia U_a un aperto contenente a tale che $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ (ciò è possibile per la regolarità). Analogamente per ogni $b \in B$ troviamo un aperto V_b con $b \in V_b$ e $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$. Poiché A e B sono sottospazi di Lindelöf di X , un insieme numerabile di aperti U_a ricopre A ; quindi $A \subset U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \dots$, analogamente $B \subset V_{b_1} \cup V_{b_2} \cup \dots$.

Costruiamo induttivamente gli aperti S_n e T_n nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S_1 &= U_{a_1}, T_1 = V_{b_1} \setminus \overline{S_1} \\ S_2 &= U_{a_2} \setminus \overline{T_1}, T_2 = V_{b_2} \setminus \overline{(S_1 \cup S_2)} \end{aligned}$$

$$S_3 = U_{a_3} \setminus \overline{(T_1 \cup T_2)}, T_3 = V_{b_3} \setminus \overline{(S_1 \cup S_2 \cup S_3)}$$

È facile verificare che $S = \bigcup S_n$ e $T = \bigcup T_n$ sono aperti disgiunti contenenti rispettivamente A e B .

Proposizione 3.15. *X sia uno spazio di Lindelöf ed $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e suriettiva. Allora Y è di Lindelöf.*

Dimostrazione. X sia di Lindelöf. Sia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ un ricoprimento aperto di Y . Allora $\{f^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ è un ricoprimento aperto di X , di cui possiamo scegliere un sottoricoprimento numerabile $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}) \mid i = 1, 2, \dots\}$. $\{U_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \dots\}$ sarà allora un sottoricoprimento numerabile del ricoprimento dato.

Proposizione 3.16. *Un sottospazio chiuso di uno spazio di Lindelöf è di Lindelöf.*

Dimostrazione. X sia uno spazio di Lindelöf ed F un chiuso in X . Se $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ è un ricoprimento aperto di F , consideriamo per ogni α l'aperto $V_\alpha = (X \setminus F) \cup U_\alpha$. Allora gli aperti V_α formano un ricoprimento aperto di X dal quale possiamo procurarci un sottoricoprimento numerabile $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots\}$. Allora il corrispondente ricoprimento $\{U_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \dots\}$ ricopre F e perciò $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ha un sottoricoprimento numerabile.

Osservazione 3.17. Un sottospazio di uno spazio di Lindelöf non è necessariamente uno spazio di Lindelöf (Willard, pag. 110).

Osservazione 3.18. Il prodotto di due spazi di Lindelöf non è in generale di Lindelöf.

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio topologico $\tilde{\mathbb{R}}$ formato dalla retta reale con la topologia la cui base è l'insieme degli aperti della forma $[a, b)$, $a < b$. Si può dimostrare che $\tilde{\mathbb{R}}$ è di Lindelöf. Invece, per il teorema 3.11., $\tilde{\mathbb{R}} \times \tilde{\mathbb{R}}$ non è di Lindelöf perché tale spazio è regolare ($\tilde{\mathbb{R}}$ è regolare) senza essere normale.

Proposizione 3.19. *Se X è A_2 , allora X è di Lindelöf e separabile.*

Dimostrazione. (1) Sia \mathfrak{B} una base numerabile di X e sia \mathfrak{U} un qualsiasi ricoprimento aperto di X . Per ogni $U \in \mathfrak{U}$ ed ogni $x \in U$ esiste un $B_{x,U} \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B_{x,U} \subset U$. L'insieme $\mathfrak{B}' = \{B_{x,U} \mid x \in U, U \in \mathfrak{U}\}$ è numerabile, poiché $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$.

Se scriviamo $\{B_{x,U} \mid x \in U, U \in \mathfrak{U}\} = \{B_{x_1,U_1}, B_{x_2,U_2}, \dots\}$, vediamo che U_1, U_2, \dots è un sottoricoprimento numerabile di \mathfrak{U} .

(2) Se prendiamo un punto da ciascuno degli elementi della base numerabile, allora l'insieme che ne risulta è denso.

Teorema 3.20. *Per uno spazio metrico X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) X è A_2 .
- (2) X è di Lindelöf.

(3) X è separabile.

Dimostrazione. Per la proposizione 3.19 è sufficiente mostrare (2) \implies (1) e (3) \implies (1).

(2) \implies (1): Supponiamo che X sia di Lindelöf. Per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$, sia $\mathfrak{U}_n = \{U_{1/n}(x) \mid x \in X\}$. \mathfrak{U}_n è un ricoprimento aperto di X e quindi esiste per ogni n un sottoricoprimento numerabile \mathfrak{V}_n . Allora $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2 \cup \dots$ è una collezione numerabile di aperti di X . Sia W un aperto non vuoto di X ed $x \in W$. Allora $U_{1/m}(x) \subset W$ per qualche m . Ora, poiché \mathfrak{V}_{2m} ricopre X , esiste qualche $y \in X$ tale che $x \in U_{1/(2m)}(y)$. Perciò

$$U_{1/(2m)}(y) \subset U_{1/m}(x) \subset W.$$

$U_{1/(2m)}(y)$ è quindi un elemento di \mathfrak{U} contenente x e contenuto in W , e vediamo che \mathfrak{U} è una base numerabile per X .

(3) \implies (1): Sia $\{a_1, a_2, \dots\}$ un sottoinsieme numerabile e denso di X e sia $U_{nm} = U_{1/m}(a_n)$, con $n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$

Allora $\mathfrak{U} = \{U_{nm} \mid n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots\}$ è numerabile. Dimostriamo che \mathfrak{U} è una base per X . Sia $x \in W$ con W aperto non vuoto di X , allora $U_{1/m}(x) \subset W$ per qualche m . Poiché qualche $a_n \in U_{1/(2m)}(x)$ avremo $U_{1/(2m)}(a_n) \subset U_{1/m}(x)$.

Otteniamo così che $x \in U_{n2m} = U_{1/(2m)}(a_n) \subset W$, perciò \mathfrak{U} è una base.

4. Costruzione di immersioni

Situazione 4.1. Siano X ed I insiemi e per ogni $i \in I$ siano dati uno spazio topologico Y_i e un'applicazione $f_i : X \rightarrow Y_i$.

Definizione 4.2. La più piccola topologia su X che rende le funzioni f_i continue è detta *topologia debole* indotta su X dalla collezione $\bigcirc_{i \in I} f_i$.

Una sottobase per questa topologia è formata dagli insiemi $f_i^{-1}(U_i)$, con $i \in I$ ed U_i aperto di Y_i . Otteniamo quindi dalle intersezioni finite di tali insiemi una base per la topologia debole su X .

Lemma 4.3. Siano T ed S due spazi topologici e $g : T \rightarrow S$ un'applicazione. \mathfrak{S} sia una sottobase degli aperti di S . Per ogni $A \in \mathfrak{S}$ la controimmagine $g^{-1}(A)$ sia aperta. Allora g è continua.

Dimostrazione. Consideriamo la collezione di tutte le intersezioni finite di elementi di \mathfrak{S} . Essa costituisce una base per S .

Osserviamo che valgono i seguenti fatti:

(a) la controimmagine di un'unione di insiemi coincide con l'unione delle controimmagini degli insiemi;

(b) la controimmagine di un'intersezione finita di insiemi coincide con l'intersezione finita delle controimmagini degli insiemi.

Perciò la controimmagine di un qualunque aperto di S è un aperto di T .

Teorema 4.4 (proprietà universale della topologia debole).

Sia X dotato della topologia debole indotta dalla collezione di funzioni $f_i : X \rightarrow Y_i$. Siano T uno spazio topologico e $g : T \rightarrow X$ un'applicazione. Allora g è continua se e solo se la composizione $f_i \circ g$ è continua per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. (1) Se g è continua allora $f_i \circ g$ è continua perché composizione di funzioni continue.

(2) Supponiamo $f_i \circ g$ continua per ogni $i \in I$. Gli insiemi della forma $f_i^{-1}(U_i)$, con $i \in I$ ed U_i aperto di Y_i , costituiscono una sottobase della topologia debole per X . Osserviamo che vale la relazione $g^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$. Quindi, poiché $f_i \circ g$ è continua, le controimmagini attraverso g degli elementi della sottobase sono aperti di X . Perciò, grazie al lemma 4.3, g risulta continua.

Definizione 4.5. L'applicazione $\bigcirc_x \bigcirc_i f_i(x) : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ è detta *applicazione di valutazione* associata alla famiglia $\bigcirc_i f_i$.

Definizione 4.6. Diremo che la famiglia $\bigcirc_i f_i$ *separa i punti* di X se per ogni coppia x, y di punti distinti di X esiste un $i \in I$ tale che $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Definizione 4.7. Siano T ed S spazi topologici. Definiamo *immersione* di T in S un'applicazione continua $f : T \rightarrow S$ tale che $f : T \rightarrow f(T)$ è omeomorfismo. In tal caso diciamo anche che T è *immerso* in S tramite f .

Teorema 4.8 (primo teorema d'immersione.). La funzione di valutazione $e := \bigcirc_x \bigcirc_i f_i(x) : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ è un'immersione se e solo se la topologia di X coincide con la topologia debole indotta dalle funzioni $\bigcirc_i f_i$ e tale collezione separa i punti di X .

Dimostrazione. Per ogni $j \in I$ sia $\pi_j : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow Y_j$ la proiezione canonica. Osserviamo che $f_j = \pi_j \circ e$.

(1) Supponiamo che e sia un'immersione. La topologia prodotto su $\prod_{i \in I} Y_i$ è la topologia debole indotta dalla collezione $\bigcirc_{i \in I} \pi_i$. La topologia su $e(X)$ coincide con la topologia debole indotta dalle restrizioni delle proiezioni, come si dimostra facilmente. Quindi, poiché e ristretto al suo codominio è un omeomorfismo, la topologia su X coincide con la topologia debole indotta dalle funzioni $f_i = \pi_i \circ e$. Inoltre, essendo la e iniettiva, presi $x \neq y$ in X , si ha $e(x) \neq e(y)$. Perciò $f_i(x) \neq f_i(y)$ per qualche $i \in I$.

(2) Supponiamo che la topologia su X sia la topologia debole indotta dalle funzioni f_i e che la collezione $\bigcirc_{i \in I} f_i$ separi i punti di X . Per il teorema 4.4 per ogni $i \in I$ la composizione $f_i = \pi_i \circ e$ è continua, perciò e è continua.

Inoltre, se prendiamo $x \neq y$ in X , allora $f_i(x) \neq f_i(y)$ per qualche i in I , ne consegue che $e(x) \neq e(y)$. Quindi e è iniettiva.

Mostriamo ora che $e : X \rightarrow e(X)$ è un'applicazione aperta. Poiché e è iniettiva, è sufficiente mostrare che $e(U)$ è un aperto in $e(X)$ ogni volta che U è un elemento della sottobase. Sia quindi $U = f_i^{-1}(V)$ per qualche $i \in I$ e qualche V aperto in Y_i . Allora

$$U = (\pi_i|_{e(X)} \circ e)^{-1}(V) = e^{-1} \circ ((\pi_i|_{e(X)})^{-1}(V))$$

per cui $e(U) = (\pi_i|_{e(X)})^{-1}(V) = \pi_i^{-1}(V) \cap e(X)$ è un aperto in $e(X)$ poiché $\pi_i^{-1}(V)$ è un aperto in $\prod_{i \in I} Y_i$.

Definizione 4.9. X sia uno spazio topologico. Diciamo che la collezione $\bigcirc_{i \in I} f_i$ separa i punti dai chiusi, se per ogni chiuso B di X ed ogni $x \notin B$ si ha $f_i(x) \notin \overline{f_i(B)}$ per qualche $i \in I$.

Proposizione 4.10. X sia uno spazio topologico e le applicazioni $f_i : X \rightarrow Y_i$ siano continue. La collezione $\bigcirc_i f_i$ separa i punti dai chiusi in X se e solo se gli insiemi $f_i^{-1}(V)$, con $i \in I$ e V aperto di Y_i , formano una base per la topologia di X .

Dimostrazione. (1) Supponiamo che la collezione di funzioni separi i punti dai chiusi in X .

Se V è un aperto di Y_i per qualche $i \in I$, allora $f_i^{-1}(V)$ è un aperto di X per la continuità di f_i .

Siano ora $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}(x)$. Allora $B = X \setminus U$ è un chiuso di X . Di conseguenza si ha $f_i(x) \notin \overline{f_i(B)}$ per qualche $i \in I$, o equivalentemente $f_i(x) \in Y_i \setminus \overline{f_i(B)}$. Consideriamo l'insieme $f_i^{-1}(Y_i \setminus \overline{f_i(B)})$; esso è aperto e contiene x . Vogliamo mostrare che vale $f_i^{-1}(Y_i \setminus \overline{f_i(B)}) \subset U$. Ma ciò è evidente grazie alla seguente relazione:

$$x \in f_i^{-1}(Y_i \setminus \overline{f_i(B)}) = X \setminus f_i^{-1}(\overline{f_i(B)}) \subset X \setminus B = U$$

(2) Supponiamo che gli aperti della forma $f_i^{-1}(V)$, con $i \in I$ e V aperto di Y_i , costituiscano una base per X . Sia B un chiuso di X e $x \notin B$. Poiché la collezione costituisce una base, esiste un aperto $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \cap B = \emptyset$. Perciò esiste $a \in I$ tale che $U = f_a^{-1}(A)$ per qualche A aperto in Y_a . Possiamo scrivere

$$U \cap B = f_a^{-1}(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f_a(B) = \emptyset, \text{ con } f_a(x) \in A$$

Perciò esiste un aperto A di Y_a contenente $f_a(x)$ tale che $A \cap f_a(B) = \emptyset$, e quindi $f_a(x) \notin \overline{f_a(B)}$.

Corollario 4.11. Se $\bigcirc_{i \in I} f_i$ è una collezione di funzioni continue su uno spazio topologico X che separa i punti dai chiusi, allora la topologia su X è la topologia debole indotta dalle funzioni f_i .

Teorema 4.12 (secondo teorema d'immersione). X sia uno spazio topologico di Hausdorff e le applicazioni $f_i : X \rightarrow Y_i$ siano continue. La collezione $\bigcirc_i f_i$ separa i punti dai chiusi. Allora la funzione di valutazione è un'immersione.

Dimostrazione. Ciò è una conseguenza diretta del teorema 4.8 e del corollario 4.11.

5. Il teorema di metrizzazione di Uryson

Proposizione 5.1. *Siano dati spazi metrici $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots$. Per*

$$x, y \in X := \prod_{i=1}^{\infty} X_i \text{ sia}$$

$$d(x, y) := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min(1, d_i(x_i, y_i))$$

Allora d è una metrica su X compatibile con la topologia del prodotto.

Dimostrazione. Dimostriamo che la metrica d è compatibile con la topologia prodotto. Sia $x = (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Un aperto U di una base degli intorni di x avrà la forma

$$U = U_{d_{1\varepsilon_1}}(x_1) \times U_{d_{2\varepsilon_2}}(x_2) \times \dots \times U_{d_{n\varepsilon_n}}(x_n) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

Scegliamo ε in modo tale che $\varepsilon = \min(\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2^2}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{2^n})$. Allora se $d(x, y) < \varepsilon$ necessariamente $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Perciò $U_{d_\varepsilon} \subset U$. Ne consegue che la topologia prodotto è più debole della topologia indotta da d .

Viceversa, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere N sufficientemente grande di modo che $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora

$$U_{d_{1\varepsilon/2N}}(x_1) \times U_{d_{2\varepsilon/2N}}(x_2) \times \dots \times U_{d_{n\varepsilon/2N}}(x_n) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \subset U_{d_\varepsilon}(x)$$

Perciò la topologia indotta da d è più debole della topologia prodotto.

Osservazione 5.2. La proposizione 5.1, opportunamente riformulata, è valida naturalmente anche quando è data una successione finita $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ di spazi metrici.

Corollario 5.3. *Sia T un insieme numerabile. Allora $[0, 1]^T$ è uno spazio metrizzabile.*

Teorema 5.4 (teorema di metrizzazione di Uryson). *Sia X uno spazio di Hausdorff. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) X è regolare e A_2 .
- (2) X può essere immerso come sottospazio in $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
- (3) X è separabile e metrizzabile.

Dimostrazione. (1) \implies (2): Sia \mathfrak{B} una base di X tale che $|\mathfrak{B}| = |\mathbb{N}|$. Sia $\mathfrak{A} := \{(U, V) \mid U, V \in \mathfrak{B} \text{ e } \bar{U} \subset V\}$. Osserviamo che \mathfrak{A} è numerabile. Poiché X è uno spazio di Lindelöf regolare, per il teorema 3.14 X è normale. Quindi, seguendo il teorema 2.7, per ogni coppia $(U, V) \in \mathfrak{A}$ esiste una funzione continua $f_{UV} : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f(\bar{U}) = 0$ e $f(X \setminus V) = 1$. Sia \mathfrak{F} l'insieme delle funzioni f_{UV} . Allora \mathfrak{F} è numerabile e separa i punti dai chiusi in X . Consideriamo ora la funzione di valutazione $e := \bigcirc_x f(x) : X \rightarrow [0, 1]^{\mathfrak{F}}$. Dal teorema 4.12 sappiamo che e è

un'immersione. Ma \mathfrak{F} è numerabile.

(2) \implies (3): $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ è separabile e metrico e lo stesso vale per i suoi sottospazi.

(3) \implies (1): Ciò segue dalla proposizione 2.12 e dal teorema 3.20.

Corollario 5.5. *Siano X uno spazio compatto metrizzabile ed Y uno spazio di Hausdorff. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva. Allora Y è metrizzabile.*

Dimostrazione. Y è compatto, perciò utilizzando la proposizione 2.11 otteniamo che Y è regolare. Grazie al teorema 5.4 è sufficiente mostrare che Y è A_2 .

Siano \mathfrak{B} una base numerabile per X e \mathfrak{C} la collezione di tutte le unioni finite di insiemi di \mathfrak{B} . Allora $\mathfrak{D} := \{Y \setminus f(X \setminus C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ è una collezione numerabile di aperti di Y . Mostriamo che costituisce una base per Y .

Sia V un aperto di Y e sia $y \in V$. Allora $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$, inoltre $f^{-1}(y)$ è un chiuso di X e quindi compatto. Usando ancora la compattezza di X si trova che esistono insiemi B_1, \dots, B_n di \mathfrak{B} che soddisfano alla condizione $f^{-1}(y) \subset B_1 \cup \dots \cup B_n \subset f^{-1}(V)$. Posto $C := B_1 \cup \dots \cup B_n$, allora $C \in \mathfrak{C}$ e $y \in Y \setminus f(X \setminus C) \subset V$. Perciò \mathfrak{D} è una base per Y .

6. Spazi paracompatti

Situazione 6.1. X sia uno spazio di Hausdorff.

Definizione 6.2. Siano \mathfrak{U} e \mathfrak{V} ricoprimenti di X . Se ogni $U \in \mathfrak{U}$ è contenuto in qualche $V \in \mathfrak{V}$ diciamo che \mathfrak{U} è *più fine di* \mathfrak{V} , o che \mathfrak{U} è un *raffinamento* di \mathfrak{V} . In tal caso scriviamo $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$.

Definizione 6.3. Siano \mathfrak{U} e \mathfrak{V} ricoprimenti di X e sia $A \subset X$. La \mathfrak{U} -*stella* di A è l'insieme

$$\text{stella}(A, \mathfrak{U}) := \bigcup \{U \in \mathfrak{U} \mid A \cap U \neq \emptyset\}$$

Posto

$$\mathfrak{U}^* := \{\text{stella}(U, \mathfrak{U}) \mid U \in \mathfrak{U}\}$$

diciamo che \mathfrak{U} è uno *stella-raffinamento* di \mathfrak{V} , se $\mathfrak{U}^* < \mathfrak{V}$.

Definizione 6.4. Diciamo che una collezione \mathfrak{U} di sottoinsiemi di X è *localmente finita* se ogni $x \in X$ possiede un intorno che incontra solo un numero finito di elementi di \mathfrak{U} .

Diciamo che \mathfrak{U} è una collezione *puntualmente finita* se ogni $x \in X$ appartiene solo ad un numero finito di elementi di \mathfrak{U} .

Se invece ogni $x \in X$ ha un intorno che incontra al più un elemento di \mathfrak{U} diciamo che \mathfrak{U} è *discreta*. È chiaro che in tal caso \mathfrak{U} è localmente finita.

Definizione 6.5. Una collezione \mathfrak{V} di sottoinsiemi di X si dice σ -*localmente finita*, se $\mathfrak{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{V}_n$, dove ogni \mathfrak{V}_n è una collezione localmente finita.

Similmente, una collezione \mathfrak{V} di sottoinsiemi di X si dice σ -*puntualmente finita*, se $\mathfrak{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{V}_n$, dove ogni \mathfrak{V}_n è una collezione puntualmente finita.

Una collezione \mathfrak{V} di sottoinsiemi di X si dice σ -*discreta*, se $\mathfrak{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{V}_n$, dove ogni \mathfrak{V}_n è una collezione discreta.

Osservazione 6.6. Siano V un aperto di X e $P \subset X$ tale che $U \cap P = \emptyset$. Allora $V \cap \overline{P} = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $x \in V \cap \overline{P}$. Allora V è un intorno di x , perciò $V \cap P \neq \emptyset$, ma contraddizione.

Lemma 6.7. \mathfrak{U} sia una collezione localmente finita di sottoinsiemi di X . Allora anche il sistema $\{\overline{U} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ è localmente finito.

Dimostrazione. Siano $x \in X$ e V un intorno di x scelto in modo che $V \cap U = \emptyset$ eccetto che per un numero finito di elementi U di \mathfrak{U} . Allora $V \cap \overline{U} = \emptyset$ eccetto che per gli stessi U , come si vede dall'osservazione 6.6.

Definizione 6.8. X si dice *paracompatto* se ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento aperto localmente finito.

Definizione 6.9. Un insieme totalmente ordinato (A, \leq) si dice *ben ordinato* e \leq si dice un *buon ordine* su A , se ogni sottoinsieme non vuoto di A possiede un elemento più piccolo.

Teorema 6.10. *Ogni insieme può essere ben ordinato.*

Dimostrazione. Ciò è equivalente all'assioma della scelta, cfr. Willard, pag. 10.

Teorema 6.11 (teorema di Stone). *Ogni spazio metrico è paracompatto.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto dello spazio metrico (X, d) .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $U \in \mathcal{U}$ sia $U_n := \{x \in U \mid d(x, X \setminus U) \geq 1/2^n\}$. Allora $d(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geq 1/2^n - 1/2^{n+1} = 1/2^{n+1}$.

Sia $<$ un buon ordine su \mathcal{U} . Definiamo allora

$$U_n^* := U_n \setminus \bigcup \{V_{n+1} \mid V \in \mathcal{U} \text{ e } V < U\}$$

Per $U, V \in \mathcal{U}$ abbiamo che vale $U_n^* \subset X \setminus V_{n+1}$ oppure $V_n^* \subset X \setminus U_{n+1}$. In entrambi i casi $d(U_n^*, V_n^*) \geq 1/2^{n+1}$.

Definiamo ora per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e per ogni $U \in \mathcal{U}$

$$\widetilde{U}_n := \{x \in X \mid d(x, U_n^*) < 1/2^{n+3}\}$$

Abbiamo allora $d(\widetilde{U}_n, \widetilde{V}_n) \geq 1/2^{n+1} - 2/2^{n+3} \geq 1/2^{n+2}$. Perciò la collezione $\mathfrak{V}_n = \{\widetilde{U}_n \mid U \in \mathcal{U}\}$ è discreta per ogni n . Inoltre essendo $\mathfrak{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{V}_n$ σ -discreto, risulta essere anche σ -localmente finita. Infine è chiaro che \mathfrak{V} è un ricoprimento aperto di X e che raffina \mathcal{U} .

Proposizione 6.12. *Sia X uno spazio di Hausdorff regolare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) X è paracompatto.
- (2) Ogni ricoprimento aperto di X ha un raffinamento aperto σ -localmente finito.
- (3) Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento localmente finito (che non è necessariamente aperto).
- (4) Ogni ricoprimento aperto ha un raffinamento chiuso localmente finito.

Dimostrazione. Willard, pag. 146.

Corollario 6.13. *Ogni spazio di Hausdorff regolare e di Lindelöf è paracompatto.*

Dimostrazione. Un sottoricoprimento numerabile è un raffinamento σ -localmente finito. Infatti esso è un raffinamento del ricoprimento da cui proviene, ed è σ -localmente finito poiché è numerabile.

Osservazione 6.14. La classe degli spazi paracompatti comprende sia gli spazi compatti di Hausdorff che gli spazi metrici ed è infatti la più piccola classe interessante di spazi topologici con questa proprietà .

Proposizione 6.15. *Ogni spazio paracompatto è normale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio paracompatto.

(1) Dimostriamo innanzitutto che X è regolare. Siano A un chiuso di X ed $x \notin A$. Per ogni $y \in A$ sia V_y un intorno di y tale che $x \notin \overline{V_y}$. Allora gli insiemi V_y al variare di y in A e formano, insieme a $X \setminus A$, un ricoprimento aperto di X . Sia quindi \mathfrak{W} un suo raffinamento aperto localmente finito e sia $V = \bigcup \{W \in \mathfrak{W} \mid W \cap A \neq \emptyset\}$. È chiaro che V è aperto e che $\overline{V} = \bigcup \{\overline{W} \mid W \in \mathfrak{W} \text{ e } W \cap A \neq \emptyset\}$. Poiché ogni W è contenuto in qualche V_y , ciascun \overline{W} è contenuto in qualche $\overline{V_y}$. Perciò $x \notin \overline{V}$ e quindi x ed A sono separati da aperti disgiunti.

(2) Siano ora A e B chiusi disgiunti di X . Grazie alla regolarità di X per ogni $y \in A$ esiste qualche V_y tale che $\overline{V_y} \cap B = \emptyset$. Ragionando come nel punto (1) troviamo un aperto V che contiene A e tale che $\overline{V} \cap B = \emptyset$. Ne consegue che X è normale.

7. Il teorema di metrizzazione di Smirnov

Situazione 7.1. X sia uno spazio di Hausdorff.

Seguiamo Willard, pagg. 166-172.

Definizione 7.2. Una *successione normale* in uno spazio X è una successione $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$ di ricoprimenti aperti di X tali che $\mathfrak{U}_{n+1}^* < \mathfrak{U}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$.

Una successione normale $\bigcirc_n \mathfrak{U}_n$ è detta *compatibile* se per ogni $x \in X$ $\{\text{stella}(x, \mathfrak{U}_n) \mid n \in \mathbb{N} + 1\}$ è una base per gli intorno di x .

Un ricoprimento aperto di X che sia il primo elemento di una qualche successione normale nello spazio X si dice *ricoprimento normale*.

Teorema 7.3. X è metrizzabile se e solo se possiede una successione normale compatibile.

Dimostrazione. (1) Assumiamo che X sia metrizzabile e poniamo $\mathfrak{U}_n := \{U_{1/3^n}(x) \mid x \in X\}$. Osserviamo che gli insiemi $\text{stella}(x, \mathfrak{U}_n)$ formano una base degli intorno per ogni x . Inoltre dalla disuguaglianza triangolare si vede che $\text{stella}(U_{1/3^n}(x), \mathfrak{U}_n) \subset U_{1/3^{n-1}}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N} + 2$, per cui $\dots \mathfrak{U}_3^* < \mathfrak{U}_2^* < \mathfrak{U}_1$. Perciò la successione $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$ è normale e compatibile.

(2) Supponiamo di avere una successione normale e compatibile $\bigcirc_n \mathfrak{U}_n$ in X . Definiamo un'applicazione $t : X \times X \rightarrow [0, 1]$ nel modo seguente:

$$t(x, y) = 0 \text{ se } y \in \text{stella}(x, \mathfrak{U}_n) \text{ per tutti gli } n$$

$$t(x, y) = 1 \text{ se } y \notin \text{stella}(x, \mathfrak{U}_1)$$

$$t(x, y) = \frac{1}{2^n} \text{ se } y \in \text{stella}(x, \mathfrak{U}_1) \text{ ed } y \notin \text{stella}(x, \mathfrak{U}_{n+1})$$

Definiamo ora per ogni $x, y \in X$ l'insieme $\mathfrak{S}(x, y)$ di tutte le successioni finite $s = \{x_1, \dots, x_n\}$ di punti di X tali che $x_1 = x$ e $x_n = y$ oppure $x_1 = y$ e $x_n = x$. Sia allora

$$d(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=2}^n t(x_{i-1}, x_i) \mid \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathfrak{S}(x, y) \right\}$$

Si dimostra facilmente che d è una metrica. Dimostriamo ora che questa metrica è compatibile con la topologia su X .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il ricoprimento aperto $\mathfrak{V}_n := \{U_{1/2^n}(x) \mid x \in X\}$. È sufficiente dimostrare che per ogni n valgono le relazioni

$$\mathfrak{U}_n < \mathfrak{V}_{n-1}$$

$$\mathfrak{V}_n < \mathfrak{U}_{n-1}$$

perché allora le due successioni definiscono la stessa topologia.

(a) Siano $U \in \mathfrak{U}_n$ e $x \in U$. Se $y \in U$, allora $y \in \text{stella}(x, \mathfrak{U}_n)$ e perciò $t(x, y) \leq 1/2^n$, cosicché $d(x, y) \leq 1/2^n < 1/2^{n-1}$. Ne consegue che $y \in U_{1/2^{n-1}}(x)$ e vediamo che $U \subset U_{1/2^{n-1}}(x)$. Perciò $\mathfrak{U}_n < \mathfrak{V}_{n-1}$.

(b) È sufficiente dimostrare che se $d(x, y) < 1/2^n$, allora x e y appar-

tengono a qualche elemento di \mathfrak{U}_n , perché allora vale $U_{1/2^n}(x) \subset \text{stella}(x, \mathfrak{U}_n) \subset U$ per qualche $U \in \mathfrak{U}_{n-1}$.

Supponiamo quindi che $d(x, y) < 1/2^n$. Allora

$$\inf\left\{\sum_{i=2}^k t(x_{i-1}, x_i) \mid \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathfrak{S}(x, y)\right\} < 1/2^n$$

ovvero per qualche successione $\{x_1, \dots, x_k\}$ in $\mathfrak{S}(x, y)$ vale

$$\sum_{i=2}^k t(x_{i-1}, x_i) < \frac{1}{2^n}$$

Procediamo ora per induzione su k .

Se $k = 2$ allora $t(x, y) < 1/2^n$, cioè $y \in \text{stella}(x, \mathfrak{U}_n)$ e $y \notin \text{stella}(x, \mathfrak{U}_{m+1})$ per qualche $m > n$. Da ciò in particolare abbiamo che $y \in \text{stella}(x, \mathfrak{U}_{n+1})$. Così $x, y \in U$ per qualche $U \in \mathfrak{U}_{n+1}$ e quindi $x, y \in U'$ anche per qualche $U' \in \mathfrak{U}_n$.

Supponiamo ora il risultato vero per le successioni di lunghezza minore di k e supponiamo $\sum_{i=2}^k t(x_{i-1}, x_i) < 1/2^n$. Sia j l'ultimo numero compreso fra 2 e k per cui valga

$$\sum_{i=2}^j t(x_{i-1}, x_i) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

Allora

$$\sum_{i=2}^{j+1} t(x_{i-1}, x_i) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

ed inoltre

$$\sum_{i=j+2}^k t(x_{i-1}, x_i) < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Per ipotesi di induzione x_1 e x_j sono contenuti in qualche $U_1 \in \mathfrak{U}_{n+1}$. Poiché $t(x_j, x_{j+1}) < 1/2^n$ analogamente ricaviamo che $x_j, x_{j+1} \in U_2 \in \mathfrak{U}_{n+1}$. Infine troviamo che x_{j+1} e x_k appartengono ad uno stesso aperto $U_3 \in \mathfrak{U}_{n+1}$. Perciò x_1 e x_k sono contenuti in $\text{stella}(U_2, \mathfrak{U}_{n+1}) \subset U$ per qualche $U \in \mathfrak{U}$.

Teorema 7.4 (teorema di Nagata). *X è metrizzabile se e solo se ogni punto $x \in X$ ha una base degli intorni numerabile $\{U_{x_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ con le seguenti proprietà :*

- (a) $y \in U_{x_n} \implies U_{y_n} \subset U_{x, n-1}$.
- (b) $y \notin U_{x, n-1} \implies U_{y_n} \cap U_{x_n} = \emptyset$.

Dimostrazione. (1) Supponiamo che X sia metrizzabile. Allora (a) e (b) sono soddisfatte ponendo $U_{x_n} := U_{1/2^n}(x)$.

(2) Sia $\mathfrak{U}_n := \{U_{x_n} \mid x \in X\}$. Vogliamo mostrare che $\text{stella}(U_{x_n}, \mathfrak{U}_n) \subset U_{x, n-2}$ per ogni $n > 2$.

Supponiamo $U_{z_n} \cap U_{x_n} \neq \emptyset$. Allora per la proprietà (b) $z \in U_{x, n-1}$. Se ora utilizziamo (a) otteniamo $U_{z_n} \subset U_{x, n-2}$, cioè $\text{stella}(U_{x_n}, \mathfrak{U}_n) \subset U_{x, n-2}$. Di conseguenza $\mathfrak{U}_n^* < \mathfrak{U}_{n-2}$ per ogni $n > 2$ e quindi $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_5, \dots$ è una successione normale. Osserviamo anche

che $\text{stella}(x, \mathfrak{U}_n) \subset U_{x, n-2}$ per ogni $n > 2$ e pertanto $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$ è una successione normale compatibile. Grazie al teorema 7.3, X risulta metrizzabile.

Definizione 7.5. Diciamo *sviluppo* di uno spazio X una successione $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$ di ricoprimenti aperti di X per cui $\mathfrak{U}_n < \mathfrak{U}_{n-1}$ e tale che, per ogni $x \in X$, $\{\text{stella}(x, \mathfrak{U}_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ forma una base degli intorni di x .

Uno spazio che possiede una sviluppo è detto *svilupabile*.

Definizione 7.6. Uno *spazio di Moore* è uno spazio di Hausdorff regolare e svilupabile.

Osservazione 7.7. La congettura sugli spazi di Moore afferma che ogni spazio di Moore normale è metrizzabile. Questa congettura è ancora aperta e probabilmente intrattabile.

Teorema 7.8 (teorema di Alexandrov/Uryson). Sia X uno spazio di Hausdorff. Allora X è metrizzabile se e solo se possiede uno sviluppo $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$ con la proprietà aggiuntiva che per ogni coppia di aperti $U, V \in \mathfrak{U}_n$ con $U \cap V \neq \emptyset$ si abbia $U \cup V \subset W$ per qualche $W \in \mathfrak{U}_{n-1}$.

Dimostrazione. (1) Supponiamo che x sia metrizzabile. Allora è sufficiente definire $\mathfrak{U}_n := \{U_{1/4^n}(x) \mid x \in X\}$.

(2) Sia $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$ uno sviluppo di X con le proprietà richieste. Per $n > 1$, $U \in \mathfrak{U}_n$ e $x \in U$ abbiamo allora $\text{stella}(U, \mathfrak{U}_n) \subset \text{stella}(x, \mathfrak{U}_{n-1})$. Per ogni $n > 1$ ed $x \in X$ poniamo $U_{xn} := \text{stella}(x, \mathfrak{U}_n)$. Dobbiamo solo dimostrare che sono soddisfatte le condizioni (a) e (b) nel teorema 7.4.

(a) Sia $y \in U_{xn}$. Allora $x, y \in V$ per qualche $V \in \mathfrak{U}_n$. Vale quindi

$$U_{yn} = \text{stella}(y, \mathfrak{U}_n) \subset \text{stella}(V, \mathfrak{U}_n) \subset \text{stella}(x, \mathfrak{U}_{n-1}) = U_{x, n-1}$$

(b) Se fosse $U_{yn} \cap U_{xn} \neq \emptyset$ avremmo qualche $U, V \in \mathfrak{U}_n$ la cui intersezione è non vuota. Allora per ipotesi $U \cup V \subset W$ per qualche $W \in \mathfrak{U}_{n-1}$, e quindi $y \in \text{stella}(x, \mathfrak{U}_{n-1}) = U_{x, n-1}$.

Definizione 7.9. Lo *spazio di Hilbert generalizzato* di peso $|A|$ (modellato su A), $\mathbf{H}^{[A]}$, è l'insieme di tutte le funzioni $x : A \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

(1) $x(a) \neq 0$ per al più un insieme numerabile di $a \in A$;

(2) $\sum_{a \in A} x^2(a) < \infty$.

La distanza in questo spazio è definita ponendo:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{a \in A} (x(a) - y(a))^2}$$

Definizione 7.10. X si dice *perfettamente normale* se per ogni coppia di chiusi disgiunti A e B in X esiste una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f^{-1}(0) = A$ ed $f^{-1}(1) = B$.

Osservazione 7.11. Si dimostra facilmente che X è perfettamente normale se e solo se X è normale ed ogni aperto di X è un F_σ ; cfr.

Willard, pag. 105.

Teorema 7.12 (teorema di Smirnov). X è metrizzabile se e solo se è regolare e possiede una base degli aperti σ -localmente finita.

Dimostrazione. (1) Sia X metrizzabile. Utilizzando il teorema 6.11 esso risulta paracompatto. Sia \mathfrak{U}_n un ricoprimento di X formato dalle palle di raggio $1/2^n$ e sia \mathfrak{B}_n il raffinamento localmente finito di \mathfrak{U}_n . Allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ è una base degli aperti σ -localmente finita. Infine sappiamo che uno spazio metrico è Hausdorff e regolare.

(2) Sia $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ una base σ -localmente finita per X . Ogni ricoprimento aperto ha un σ -raffinamento localmente finito costituito da elementi della base, perciò X è paracompatto e quindi normale per la prop. 6.15.

(3) Mostriamo ora che X è perfettamente normale.

Sia G un aperto di X . Poiché X è regolare, per ogni $x \in G$ esiste un elemento B_x della base tale che $\overline{B_x} \subset G$.

Sia $B_n := \bigcup_{B_x \in \mathfrak{B}_n} \overline{B_x}$. Osserviamo che B_n è l'unione di una collezione localmente finita di insiemi chiusi e perciò è anch'esso chiuso. Inoltre $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Pertanto ogni aperto in X è un F_σ , cosicché X risulta essere perfettamente normale per l'osservazione 7.11. Ne consegue che per ogni elemento $B_{n\alpha}$ della base esiste un'applicazione continua $f_{n\alpha} : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $B_{n\alpha} = \{x \in X \mid f_{n\alpha}(x) \neq 0\}$. Consideriamo lo spazio di Hilbert generalizzato $\mathbf{H}^{[\mathfrak{B}]}$.

Definiamo $F := \bigcirc_x \bigcirc_{n\alpha} F_{n\alpha}(x) : X \rightarrow \mathbf{H}^{[\mathfrak{B}]}$ nel modo seguente:

$$F_{n\alpha}(x) := \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \frac{f_{n\alpha}(x)}{\sqrt{1 + \sum_{\beta} f_{n\beta}^2(x)}}$$

Notiamo che il denominatore ha senso perché, per ogni $x \in X$, $x \in B_{n\alpha}$ solo per un numero finito di $B_{n\alpha} \in \mathfrak{B}_n$, cosicché, fissato n , $f_{n\alpha} \neq 0$ solo per un numero finito di α . Ne consegue che $F_{n\alpha}(x) \neq 0$ solo per un insieme numerabile di coppie n, α .

Poiché $\sum_{\alpha=1}^{\infty} F_{n\alpha}^2(x) < \frac{1}{2^n}$ troviamo che $\sum_{n,\alpha} F_{n\alpha}^2(x) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Perciò $F(x)$ è in effetti un elemento di $\mathbf{H}^{[\mathfrak{B}]}$.

(4) Vogliamo ora dimostrare che F è un'immersione di X in $\mathbf{H}^{[\mathfrak{B}]}$.

Poiché X è di Hausdorff, presi $x, y \in X$ con $x \neq y$ esiste un aperto $B_{n\alpha} \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B_{n\alpha}$ e $y \notin B_{n\alpha}$. Perciò $f_{n\alpha}(x) \neq 0$ e $f_{n\alpha}(y) = 0$. Abbiamo allora che $F_{n\alpha}(x) \neq F_{n\alpha}(y)$ e quindi che $F(x) \neq F(y)$. F è perciò iniettiva.

Per dimostrare la continuità partiamo osservando che ciascuna delle

applicazioni $\bigcirc_x F_{n\alpha}(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Sia quindi $x_0 \in X$ e sia $\varepsilon > 0$ dato. Prendiamo N in $\mathbb{N} + 1$ grande abbastanza da soddisfare la disuguaglianza

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Sia poi U un intorno di x_0 che incontra solo un numero finito dei $B_{n\alpha}$, che chiamiamo $B_{n_1\alpha_1}, \dots, B_{n_k\alpha_k}$. Sia ora $V \subset U$ un intorno di x_0 tale che per ogni $x \in V$

$$|F_{n_i\alpha_i}(x) - F_{n_i\alpha_i}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}} \text{ per } i = 1, \dots, k.$$

Abbiamo così che per ogni $x \in V$ ed ogni coppia n, α diversa da n_i, α_i con $i = 1, \dots, k$ vale $F_{n\alpha}(x) = F_{n\alpha}(x_0) = 0$. Quindi per ogni $x \in V$

$$\sum_{n \leq N} \sum_{\alpha} |F_{n\alpha}(x) - F_{n\alpha}(x_0)|^2 = \sum_{i=1}^k |F_{n_i\alpha_i}(x) - F_{n_i\alpha_i}(x_0)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

D'altra parte possiamo scrivere anche

$$\begin{aligned} \sum_{n > N} \sum_{\alpha} |F_{n\alpha}(x) - F_{n\alpha}(x_0)|^2 &\leq \sum_{n > N} \sum_{\alpha} (F_{n\alpha}^2(x) + F_{n\alpha}^2(x_0)) \\ &< \sum_{n > N} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = 2 \sum_{n > N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

E perciò, per ogni $x \in V$

$$\sum_{n,\alpha} |F_{n\alpha}(x) - F_{n\alpha}(x_0)|^2 < \varepsilon^2$$

Allora per ogni $x \in V$ $d(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, per cui F è continua.

Dimostriamo infine che F è chiusa. Sia A un chiuso in X . Vogliamo dimostrare che $F(A) = \overline{F(A)}$.

Sia $x \in X$ tale che $x \notin A$, allora $F(x) \notin F(A)$. Certamente esiste una coppia $n\alpha$ per cui $x \in B_{n\alpha}$ e $B_{n\alpha} \cap A = \emptyset$. Quindi $f_{n\alpha}(x) \neq 0$ e $f_{n\alpha}(A) = 0$, e perciò $F_{n\alpha}(x) \neq 0$ e $F_{n\alpha}(A) = 0$. Da quest'ultimo fatto segue che $d(F(x), F(A)) > 0$. Allora $F(x) \notin \overline{F(A)}$ e perciò $\overline{F(A)} \subset F(A)$. L'insieme $F(A)$ è quindi chiuso.

8. La metrica euclidea in alta dimensione

Situazione 8.1. Siano $m \in \mathbb{N}$ ed $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$.

m è la dimensione dello spazio in cui si trovano i nostri dati.

Nota 8.2. La statistica multidimensionale si occupa delle relazioni tra dati quando questi sono rappresentati da punti di spazi ad alta dimensione. In tali spazi, però, i concetti metrici perdono gran parte del loro significato. Infatti il volume della palla di raggio 1 converge rapidamente a 0 al crescere di m , così il cubo unitario multidimensionale ha il volume concentrato vicino al bordo. Le difficoltà che ne conseguono vanno sotto il nome di *maledizione dell'alta dimensione* o, in inglese, *curse of dimensionality*.

Un metodo che almeno in parte riesce a superare le difficoltà dell'alta dimensione è la teoria delle proiezioni ottimali, iniziata da Friedman e Tukey. Questo metodo, comunque piuttosto impegnativo nei calcoli, cerca proiezioni $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ottimali con $l = 1, 2, 3$, valutandole tramite un indice di rilevanza e forniscono spesso risultati migliori di quelli che si ottengono con i metodi classici della statistica multivariata (come l'analisi delle componenti principali e l'analisi delle discriminanti).

Definizione 8.3. Sia $m \neq 0$. $V_m(r)$ rappresenta il volume di una palla di raggio r in \mathbb{R}^m .

Useremo l'abbreviazione $V_m := V_m(1/2)$. Perciò V_m rappresenta il volume di una palla inscritta in un cubo di lato 1.

Inoltre, indipendentemente da r , poniamo $V_0(r) := 1$.

Osservazione 8.4. $V_1(r) = 2r$ e quindi $V_1 = 1$.

Teorema 8.5. Il volume della palla unitaria in \mathbb{R}^m è dato da

$$V_m(1) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\frac{m!}{2^m}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione rimandiamo ai corsi di Analisi.

Con Γ abbiamo denotato la funzione gamma, definita per $\operatorname{Re} z > 0$ da

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Proposizione 8.6. Sia $m \geq 2$. Vale la seguente formula di ricorsione:

$$V_m(r) = \frac{2\pi r^2}{m} V_{m-2}(r)$$

E quindi in particolare valgono:

$$V_m(1) = \frac{2\pi}{m} V_{m-2}(1)$$

$$V_m = \frac{\pi}{2m} V_{m-2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la formula per il caso $r = 1$. Da questa si ottiene facilmente la formula generale perché è chiaro che aumentando la dimensione di due il volume deve essere moltiplicato con r^2 .

$$V_m(1) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\frac{m!}{2}} = \frac{\pi \cdot \pi^{\frac{m-2}{2}}}{\frac{m}{2}(\frac{m-2}{2})!} = \frac{2\pi}{m} V_{m-2}(1)$$

Corollario 8.7. Per ogni r si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(r) = 0$$

Dimostrazione. Per $m \geq 4\pi r^2$ abbiamo

$$V_m(r) = \frac{2\pi r^2}{m} V_{m-2}(r) \leq \frac{1}{2} V_{m-2}(r)$$

Nota 8.8. Con semplici calcoli dalla proposizione 8.6 otteniamo la seguente tabella in cui tutte le cifre sono corrette eccetto l'ultima che è stata arrotondata.

m	V_m
1	1.000000000000000
2	0.78539816339745
3	0.52359877559830
4	0.30842513753404
5	0.16449340668482
6	0.08074551218828
7	0.03691223414321
8	0.01585434424382
9	0.00644240020066
10	0.00249039457019
11	0.00091997259736
12	0.00032599188693
13	0.00011116073667
14	0.00003657620418
15	0.00001164072512
16	0.00000359086045
17	0.00000107560049
18	0.00000031336169
19	0.00000008892365
20	0.00000002461137

Osservazione 8.9. Nella tabella della nota 8.9 vediamo che $V_{20} < 10^{-7}$. Assumiamo di aver raccolto i dati della concentrazione di 20 molecole nel sangue di un milione di pazienti. Assumiamo inoltre che le concentrazioni siano rappresentate da valori nell'intervallo $[0, 1]$. Se consideriamo vicini i dati x, y di due pazienti nel caso in cui $|x - y| < 0.5$ nella metrica euclidea in \mathbb{R}^{20} , la probabilità che per un punto x ce ne sia uno distinto e vicino ad esso è solo ~ 0.1 . Evidentemente un simile concetto di vicinanza risulta poco pratico.

Osservazione 8.10. Il raggio della palla inscritta al cubo unitario in \mathbb{R}^m è $\frac{1}{2}$ per ogni m . Invece la diagonale d del cubo che unisce l'origine con il punto $(1, \dots, 1)$ ha lunghezza uguale a \sqrt{m} , perciò il suo valore varia con m . Ciò implica che la palla, nonostante tocchi il bordo del

cubo (nei centri dei sottocubi di dimensione $m - 1$), dista dai vertici di $\frac{\sqrt{m}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{m}-1}{2}$. Siccome questa distanza diventa sempre più grande, ciò crea l'impressione che il cubo m -dimensionale al crescere di m assomigli sempre di più a un riccio con corpo sferico sempre più piccolo e aculei sempre più lunghi e più numerosi.

Definizione 8.11. Il cubo m -dimensionale possiede 2^m vertici.

Se togliamo la palla inscritta al cubo, rimangono 2^m regioni che chiamiamo *regioni angolari del cubo*. Ciascuna di esse ha un volume uguale a

$$\widehat{V}_m := \frac{1 - V_m}{2^m}$$

Chiamiamo \widehat{V}_m il *volume angolare m -dimensionale*.

Proposizione 8.12. Valgono le seguenti espressioni:

$$(1) \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{V}_m = 0.$$

$$(2) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\widehat{V}_m}{V_m} = \infty.$$

Dimostrazione.

(1) Poiché $0 \leq 1 - V_m < 1$, è chiaro che $\widehat{V}_m = \frac{1 - V_m}{2^m}$ tende a zero.

(2) Osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{\widehat{V}_m}{V_m} = \frac{1 - V_m}{2^m V_m} = \frac{1}{2^m V_m} - \frac{1}{2^m}$$

Siccome $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} = 0$ è sufficiente dimostrare che $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m V_m} = \infty$.

Ma $2^m V_m = V_m(1)$ e sappiamo dal corollario 8.7 che $\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(1) = 0$.

Nota 8.13. La seguente tabella contiene i valori di \widehat{V}_m e $\frac{\widehat{V}_m}{V_m}$ per $1 \leq m \leq 30$.

Osserviamo che per $m \leq 12$ la palla inscritta nel cubo ha ancora un volume superiore a quello di ciascuna regione angolare, invece per $m \geq 13$ il volume angolare supera il volume della palla inscritta. Anche ciò fa assomigliare il cubo m -dimensionale ad un riccio con 2^m aculei ciascuno dei quali, a partire da $m = 13$, ha un volume maggiore di quello del corpo centrale.

Come possiamo osservare nella tabella seguente, per $m = 20$ ciascuno dei 2^{20} aculei ha un volume più di 38 volte maggiore di quello della palla inscritta. Per $m = 30$ ciascuno dei 2^{30} aculei ha un volume più di 45000 volte maggiore di quella del corpo centrale.

Una tale complicata geometria rende difficile la statistica in alte dimensioni.

Nonostante molti algoritmi forniscano risultati in ogni dimensione,

l'interpretazione dei dati elaborati dal software deve essere fatta con molta prudenza.

Spesso è consigliabile pertanto una oculata riduzione della dimensione tramite una proiezione $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ con $l = 1, 2, 3$.

m	\widehat{V}_m	\widehat{V}_m/V_m
1	0.00000000	0.000
2	0.05365046	0.068
3	0.05955015	0.114
4	0.04322343	0.140
5	0.02610958	0.159
6	0.01436335	0.178
7	0.00752412	0.204
8	0.00384432	0.242
9	0.00194054	0.301
10	0.00097413	0.391
11	0.00048783	0.530
12	0.00024406	0.749
13	0.00012206	1.098
14	0.00006103	1.669
15	0.00003052	2.622
16	0.00001526	4.249
17	0.00000763	7.093
18	0.00000381	12.173
19	0.00000191	21.449
20	0.00000095	38.749
21	0.00000048	71.689
22	0.00000024	135.677
23	0.00000012	262.422
24	0.00000006	518.249
25	0.00000003	1044.144
26	0.00000001	2144.529
27	0.00000001	4486.878
28	0.00000000	9556.748
29	0.00000000	20709.155
30	0.00000000	45630.111

Nota 8.14. Assumiamo che i nostri dati siano punti del cubo unitario in \mathbb{R}^m . Data una decomposizione $[0, 1]^m = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k$, per ogni j compreso tra 1 e k definiamo n_j il numero dei punti che si trovano in A_j . La successione finita $\{n_1, \dots, n_k\}$ può essere considerata un *istogramma multidimensionale*.

Ad esempio assumiamo che gli A_j siano ottenuti dividendo ogni lato in 10 intervalli e siano quindi sottocubi semiaperti. Per $m = 2$ avremo allora 100 sottocubi, per $m = 10$ invece avremo 10^{10} sottocubi. Da ciò ne consegue che 10^6 punti casuali in $[0, 1]^{10}$ sono molto meno densi di 4 punti in $[0, 1]^2$. In particolare ogni sottocubo del piano contiene

mediamente $\frac{4}{10^2} = 0.04$ punti, mentre ciascuno dei 10^{10} contiene in media $10^{6-10} = 0.0001$ punti. Perciò i 4 punti in $[0, 1]^2$ sono 400 volte più densi del milione di punti in $[0, 1]^{10}$.

Ciò è indicativo delle difficoltà in cui si incorre nell'analisi ad alta dimensione, soprattutto se vi uniamo una considerazione sulle problematiche legate alla raccolta ed elaborazione di un tale quantitativo di dati.

Nota 8.15 (il problema del guscio). Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R}^m di misura $\mu(X) < \infty$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \alpha < 1$. Allora $\mu(\alpha X) = \alpha^m \mu(X)$. X sia stellato rispetto all'origine e sia quindi $\alpha X \subset X$.

Chiamiamo $X \setminus \alpha X$ il guscio di X . Allora

$$\mu(X \setminus \alpha X) = \mu(X) - \mu(\alpha X) = (1 - \alpha^m)\mu(X)$$

Perciò $\frac{\mu(X \setminus \alpha X)}{\mu(X)} = 1 - \alpha^m$.

Siccome $\alpha < 1$, al crescere di m questo rapporto tende a 1, ovvero il guscio occupa un volume relativo sempre maggiore.

Nota 8.16 (il paradosso delle pareti). Già in dimensione 5 si verifica un fenomeno molto sorprendente, impossibile nelle dimensioni $m \leq 3$ e probabilmente anche in dimensione 4. Mostriamo infatti l'esistenza in \mathbb{R}^5 di una palla che interseca tutte le facce 4-dimensionali del cubo unitario ma che non contiene il centro del cubo.

Siano $c := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ il centro del cubo e $p := (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ con $\alpha = 0.08$. Osserviamo che p appartiene anch'esso al cubo. Calcoliamo ora la distanza al quadrato fra c e p :

$$|p - c|^2 = 5 \cdot (\alpha - \frac{1}{2})^2 = 5 \cdot 0.42^2 = 0.882$$

Siano ora $\rho := 0.93$ e P la palla di raggio ρ con centro p . Sia inoltre S il bordo di P , cioè $S := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid |p - x| = \rho\}$.

Osserviamo che $\rho^2 = 0.8649 < |p - c|^2$, per cui $c \notin P$. Mostriamo ora che S interseca ogni lato del cubo.

Ogni lato del cubo è dato dall'intersezione fra il cubo e un iperpiano con equazione $x_j = 0$ oppure $x_j = 1$ con $j = 1, \dots, 5$. Per simmetria assumiamo $j = 1$.

Facciamo vedere che esistono $\beta, \gamma \in [0, 1]$ tali che i punti $q_1 := (0, \beta, \beta, \alpha, \alpha)$ e $(1, \gamma, \alpha, \alpha, \alpha)$ hanno distanza ρ da p .

(1) Osserviamo che $|q_1 - p|^2 = \alpha^2 + 2 \cdot (\beta - \alpha)^2$. Perciò dobbiamo soddisfare l'equazione $\rho^2 = \alpha^2 + 2 \cdot (\beta - \alpha)^2$, cioè $\frac{\rho^2 - \alpha^2}{2} = (\beta - \alpha)^2$.

Poiché $\frac{\rho^2 - \alpha^2}{2} = \frac{0.8649 - 0.0064}{2} = \frac{0.8585}{2} = 0.42925$, dobbiamo avere $|\beta - \alpha| = \sqrt{0.42925}$. Sia dunque $\beta = \alpha + \sqrt{0.42925} \sim 0.08 + 0.65517 = 0.73517$.

Perciò $\beta \in [0, 1]$.

(2) Osserviamo che $|q_2 - p|^2 = (1 - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2$. Dobbiamo allora soddisfare l'equazione $\rho^2 = (1 - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2$, cioè $\rho^2 - (1 - \alpha)^2 = (\gamma - \alpha)^2$. Vediamo che $\rho^2 - (1 - \alpha)^2 = 0.8649 - 0.8464 = 0.0185$. Bisogna avere $|\gamma - \alpha| = \sqrt{0.0185}$, per cui poniamo $\gamma = \alpha + \sqrt{0.0185} \sim 0.08 + 0.136 = 0.216$.

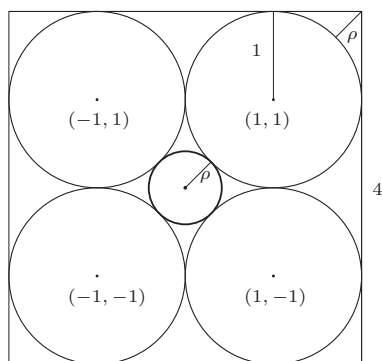
Perciò $\gamma \in [0, 1]$.

Nota 8.17 (il paradosso della sfera centrale). Consideriamo un cubo con centro nell'origine di \mathbb{R}^m e di lato 4. Esistono 2^m punti della forma $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ al variare dei segni. In ognuno di questi punti poniamo una sfera di raggio 1. Consideriamo poi la sfera con centro nell'origine e tangente a tutte le altre sfere, chiamiamo ρ il suo raggio.

La mezza diagonale del cubo è uguale a $2\sqrt{m}$, ma anche a $2\rho + 2$. Per cui $1 + \rho = \sqrt{m}$, ovvero $\rho = \sqrt{m} - 1$.

Per $m = 9$ abbiamo che $\rho = 3 - 1 = 2$, quindi la sfera interna tocca il bordo del cubo. Per $m \geq 10$ essa esce addirittura dal cubo nonostante le altre sfere rimangano tutte contenute nel cubo.

La seguente figura illustra la situazione nel caso di $m = 2$.



9. Metriche non archimedee

Situazione 9.1. Sia X un insieme.

Definizione 9.2. Una metrica d su X si chiama *non archimedea*, se

$$d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$$

per ogni $x, y, z \in X$.

Teorema 9.3. (X, d) sia uno spazio metrico. Per $\varepsilon > 0$ definiamo due relazioni $\overset{\varepsilon}{\sim}$ e $\bar{\sim}$ nel modo seguente:

$$x \overset{\varepsilon}{\sim} y : \iff d(x, y) < \varepsilon$$

$$x \bar{\sim} y : \iff d(x, y) \leq \varepsilon$$

Allora sono equivalenti:

- (1) d è una metrica non archimedea.
- (2) $\overset{\varepsilon}{\sim}$ è una relazione di equivalenza per ogni $\varepsilon > 0$.
- (3) $\bar{\sim}$ è una relazione di equivalenza per ogni $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. (1) \implies (2): Basta dimostrare la transitività.

$$x \overset{\varepsilon}{\sim} y \overset{\varepsilon}{\sim} z \implies d(x, y) < \varepsilon, d(y, z) < \varepsilon \implies d(x, z) < \varepsilon \vee \varepsilon = \varepsilon$$

(1) \implies (3): Anche qui basta dimostrare la transitività.

$$x \bar{\sim} y \bar{\sim} z \implies d(x, y) \leq \varepsilon, d(y, z) \leq \varepsilon \implies d(x, z) \leq \varepsilon \vee \varepsilon = \varepsilon$$

(2) \implies (1): Dobbiamo dimostrare che per ogni $x, y, z \in X$

$$d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$$

Se $x = y = z$, la tesi è ovvia. Sia $d(x, y) \vee d(y, z) =: \varepsilon > 0$. Allora per ogni $\delta > 0$ vale $x \overset{\varepsilon+\delta}{\sim} y \overset{\varepsilon+\delta}{\sim} z$, quindi, per ipotesi, $x \overset{\varepsilon+\delta}{\sim} z$, cioè $d(x, z) < \varepsilon + \delta$ per ogni $\delta > 0$. Ciò implica $d(x, z) \leq \varepsilon$.

(3) \implies (1): Dobbiamo dimostrare che per ogni $x, y, z \in X$

$$d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$$

Se $x = y = z$, la tesi è ovvia. Sia $d(x, y) \vee d(y, z) =: \varepsilon > 0$. Allora $x \bar{\sim} y \bar{\sim} z$, e per ipotesi $x \bar{\sim} z$, cioè $d(x, z) \leq \varepsilon$.

Osservazione 9.4. Il teorema 9.3 può essere formulato anche nel seguente modo: (X, d) sia uno spazio metrico. Allora sono equivalenti:

- (1) d è una metrica non archimedea.
- (2) Per ogni $\varepsilon > 0$ la famiglia $\{U_\varepsilon(x) \mid x \in X\}$ è una partizione di X .
- (3) Per ogni $\varepsilon > 0$ la famiglia $\{U_{\bar{\varepsilon}}(x) \mid x \in X\}$ è una partizione di X .

Osservazione 9.5. Dal teorema 9.3 si vede subito che la metrica usuale in \mathbb{R}^n non può essere non archimedea.

Le metriche non archimedee sono, a prima vista, in contrasto con l'intuizione geometrica. Sono note come metriche I-adiche nella teoria dei numeri e nell'algebra commutativa, dove ancora oggi hanno molta

importanza. In anni recenti si sono però trovate interessanti applicazioni in statistica, in analisi, in fisica matematica.

Lemma 9.6. Siano X un insieme e $\bigcirc_{n=1}^{\infty} \rho_n$ una successione di relazioni di equivalenza su X tale che:

- (a) $\rho_1 = X \times X$.
- (b) $\dots \subset \rho_3 \subset \rho_2 \subset \rho_1$.
- (c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \rho_n = \Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Se allora per $x, y \in X$ poniamo

$$d(x, y) := \frac{1}{\max\{n \mid (x, y) \in \rho_n\}}$$

otteniamo una metrica non archimedea.

Dimostrazione. (1) Dimostriamo che $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

Se $x = y$ utilizzando (c) abbiamo che $(x, x) \in \rho_n$ per ogni n . Per cui $d(x, x) = 0$.

Supponiamo che valga $d(x, y) = 0$, allora $(x, y) \in \rho_n$ per ogni n e quindi $x = y$.

(2) Osserviamo che vale $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$. Infatti le relazioni ρ_i sono di equivalenza, e quindi in particolare sono simmetriche.

(3) Dimostriamo che vale $d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$ per x, y, z in X . Siano $l := \max\{n \mid (x, y) \in \rho_n\}$ ed $m := \max\{n \mid (y, z) \in \rho_n\}$. Supponiamo ad esempio $m \leq l$. Allora $(x, y) \in \rho_m$ e $(y, z) \in \rho_m$. Poiché ρ_m è transitiva abbiamo quindi che $(x, z) \in \rho_m$.

Perciò $\max\{n \mid (x, z) \in \rho_n\} \geq m$ e dunque $d(x, z) \leq 1/m$. Ne consegue che $d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$.

Esempio 9.7. K sia un campo e $K[[x]]$ l'anello delle serie formali nell'indeterminata x . Per $f, g \in K[[x]]$ definiamo

$$d(f, g) := \begin{cases} 0 & \text{se } f = g \\ \frac{1}{2^n} & \text{se } f - g \text{ è multiplo di } x^n, \text{ ma non di } x^{n+1} \end{cases}$$

Osserviamo che $f - g$ è multiplo di x^n se e solo se esiste $h \in K[[x]]$ tale che $f - g = x^n \cdot h$ e ciò accade se e solo se $f - g \in I^n$ dove $I := \text{ideale}(x)$. Come nel lemma 9.6 si vede che d è una metrica non archimedea su $K[[x]]$. Ciò permette di introdurre gli strumenti della topologia generale nello studio dell'anello $K[[x]]$, ad esempio ha senso dire che $\bigcirc_n f_n \rightarrow f$ per una successione $\bigcirc_n f_n$ di serie formali ed $f \in K[[x]]$.

Esempio 9.8. Siano A un anello commutativo ed $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ una successione infinita decrescente di ideali di A tali che $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = 0$. Per $a, b \in A$ definiamo

$$d(a, b) := \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ \frac{1}{2^n} & \text{se } a - b \in I_n, \text{ ma } a - b \notin I_{n+1} \end{cases}$$

Come nel lemma 9.6 si dimostra che d è una metrica non archimedea su A . Sappiamo dall'analisi che ogni spazio metrico possiede un completamento. L'anello $K[[x]]$ è già completo (infatti è il completamento dell'anello $K[x]$, con la metrica analoga), mentre se m è un numero intero diverso da 0, ± 1 ed $I := m\mathbb{Z}$, allora, dopo aver definito su \mathbb{Z} la metrica non archimedea corrispondente, troviamo che \mathbb{Z} non è completo: il completamento è costituito dall'anello degli interi m -adici.

Esempio 9.9. Siano A un insieme finito ed $X := A^{\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$ definiamo una relazione di equivalenza ρ_n su X ponendo

$$\rho_n := \{(x, y) \in X \mid x_k = y_k \text{ per ogni } k < n - 1\}$$

Allora sono soddisfatte le condizioni del lemma 9.6, per cui otteniamo una metrica non archimedea θ su X ponendo

$$\theta(x, y) := 1 \text{ se } x_0 \neq y_0$$

$$\theta(x, y) := \frac{1}{2} \text{ se } x_0 = y_0 \text{ e } x_1 \neq y_1$$

$$\theta(x, y) := \frac{1}{3} \text{ se } x_0 = y_0, x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \neq y_2$$

ecc.

Si dimostra facilmente che la topologia indotta da questa metrica coincide con la topologia prodotto. Questa metrica è molto usata nella teoria dei codici e in dinamica simbolica.

Nota 9.10. d sia una metrica non archimedea su X . Allora per ogni $x, y, z \in X$ vale

$$d(x, y) \neq d(y, z) \implies d(x, z) = d(x, y) \vee d(y, z) \quad (*)$$

In altre parole: in una metrica non archimedea ogni triangolo è isoscele, possiede cioè due lati di lunghezza uguale. Infatti, siano x, y, z tre punti distinti di X . Se $d(x, y) = d(y, z)$ il triangolo è isoscele. Altrimenti si ha $d(x, z) = d(x, y) \vee d(y, z)$, quindi $d(x, z) = d(x, y)$ oppure $d(x, z) = d(y, z)$, e il triangolo è ancora isoscele.

Dimostrazione. Bisogna ancora dimostare la relazione (*). Ragioniamo così: Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\beta \leq \alpha \vee \gamma \quad \text{e} \quad \gamma \leq \alpha \vee \beta.$$

Se in questo caso $\alpha < \beta$, allora $\gamma = \beta$.

Infatti $\beta \leq \alpha \vee \gamma$ significa $\beta \leq \alpha$ (e ciò è impossibile se $\alpha < \beta$) oppure $\beta \leq \gamma$, quindi $\beta \leq \gamma \leq \alpha \vee \beta = \beta$, per cui $\gamma = \beta$.

Adesso si applica questo ragionamento ai tre numeri

$$\alpha := d(x, y), \beta := d(y, z), \gamma := d(x, z)$$

Osservazione 9.11. Uno spazio non archimedeo ha le seguenti interessanti proprietà.

Siano $\varepsilon > 0$ ed $x, y \in X$. Allora:

- (1) $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) \neq \emptyset \implies U_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(y)$.
- (2) $U_{\bar{\varepsilon}}(x) \cap U_{\bar{\varepsilon}}(y) \neq \emptyset \implies U_{\bar{\varepsilon}}(x) = U_{\bar{\varepsilon}}(y)$.
- (3) $U_\varepsilon(x)$ è aperto e chiuso.
- (4) $U_{\bar{\varepsilon}}(x)$ è aperto e chiuso.

Dimostrazione. (1) e (2) sono conseguenze dirette del teorema 9.3.

(3) $U_\varepsilon(x)$ appartiene alla base degli aperti della topologia indotta dalla metrica quindi è aperto per definizione. Sia $y \in \overline{U_\varepsilon(x)}$. Allora $U_\varepsilon(y) \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ e ciò per il punto (1) implica $U_\varepsilon(y) = U_\varepsilon(x)$ e quindi $y \in U_\varepsilon(x)$.

(4) È chiaro (per la continuità della metrica) che $U_{\bar{\varepsilon}}(x)$ è un chiuso.

Sia $y \in U_{\bar{\varepsilon}}(x)$ e sia $z \in U_\varepsilon(y)$. Allora

$$d(z, x) \leq d(z, y) \vee d(y, x) \leq \varepsilon \vee \varepsilon = \varepsilon$$

e vediamo che $U_\varepsilon(y) \subset U_{\bar{\varepsilon}}(x)$.

Osservazione 9.12. La metrica discreta

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una metrica non archimedea.

Osservazione 9.13. Ci proponiamo ora di definire sotto quali condizioni uno spazio topologico risulti metrizzabile in modo non archimedeo.

Proposizione 9.14. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (1) X è separabile e metrizzabile in modo non archimedeo.
- (2) X possiede una base numerabile $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, costituita di elementi contemporaneamente aperti e chiusi.

Dimostrazione. (1) \implies (2): Poiché X è separabile, esiste un insieme denso e numerabile $\{x_1, x_2, \dots\}$. Usando l'osservazione 9.11 si dimostra facilmente che l'insieme

$$\mathfrak{B} := \{U_{1/n}(x_k) \mid k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} + 1\}$$

è una base degli aperti di X . Ogni elemento di \mathfrak{B} è però aperto e chiuso ancora per l'osservazione 9.11.

(2) \implies (1): Per un sottoinsieme $A \subset X$ sia $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ la funzione caratteristica. θ sia la metrica su $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definita nell'esempio 9.9. Per $x, y \in X$ poniamo allora

$$d(x, y) := \theta\left(\bigcirc_n \chi_{B_n}(x), \bigcirc_n \chi_{B_n}(y)\right)$$

Non è difficile dimostrare che in questo modo si ottiene una metrica non archimedea su X che è compatibile con la topologia data.

Nota 9.15. Per uno spazio topologico X la *dimensione induttiva forte* $\text{Ind } X$ è definita in modo tale che $\text{Ind } X = 0$ se e solo se $X \neq \emptyset$ e per ogni chiuso A di X e per ogni aperto V di X con $A \subset V$ esiste un aperto U di X tale che $A \subset U = \overline{U} \subset V$. Cfr. Engelking, pag. 411.

Teorema 9.16. X sia uno spazio metrizzabile. Allora X può essere metrizzato in modo non archimedeo se e solo se $\text{Ind } X = 0$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione rimandiamo al lavoro di de Groot citato in bibliografia. Cfr. anche Engelking, pag. 411.

Bibliografia

- L. Baldini:** Strumenti della topologia generale in analisi funzionale.
Tesi LT, Ferrara 2011.
- L. Chiodera:** La compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto.
Tesi LT, Ferrara 2006.
- R. Engelking:** General topology. Heldermann 1989.
- J. de Groot:** Non-archimedean metrics in topology.
Proc. AMS 7/5 (1956), 948-953.
- S. Willard:** General topology. Dover 2004.