UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Indirizzo Didattica della Matematica e Divulgazione Scientifica

STRUMENTI DELLA TOPOLOGIA GENERALE IN ANALISI FUNZIONALE

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Josef Eschgfäller

Laureanda:
Lucilla Baldini

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Introduzione

La tesi raccoglie i più importanti strumenti topologici dell'analisi funzionale lineare in spazi vettoriali normati. Questi teoremi classici spesso non sono affatto banali e vengono utilizzati in molti campi dell'analisi nello studio di spazi di funzioni, ad esempio per teoremi di esistenza o enunciati di continuità. Essi costituiscono il punto di partenza anche per rami molto attuali della matematica e della fisica matematica, ad esempio dell'analisi complessa in più variabili e della geometria non commutativa.

Il primo capitolo introduce i concetti di spazio vettoriale normato e di spazio di Banach (uno spazio vettoriale normato completo). Si dimostra tra l'altro che uno spazio vettoriale normato è uno spazio di Banach se e solo se ogni serie assolutamente convergente è convergente.

Nel secondo capitolo si dimostra il teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass, ottenuto tramite il lemma di Zemánek da un risultato sui sottoreticoli vettoriali di $C(\Omega, \mathbb{R})$. Questo teorema permette di raggiungere molti risultati in spazi di funzioni dimostrandoli per polinomi o funzioni trigonometriche.

Il terzo capitolo contiene il teorema del Dini sulla convergenza uniforme di una successione monotona di funzioni continue su uno spazio compatto.

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso (o equivalentemente completo) e limitato. In uno spazio metrico generale bisogna chiedere una forma più forte di limitatezza, la totale limitatezza. Questo concetto viene introdotto e discusso nel quarto capitolo. Di grande aiuto è qui l'uso di filtri: uno spazio metrico è completo se e solo se ogni filtro di Cauchy su esso converge ed è totalmente limitato se e solo se ogni ultrafiltro è un filtro di Cauchy. Con ciò si dimostra facilmente che uno spazio metrico è compatto se e solo se è totalmente limitato e completo.

Uno dei più importanti teoremi sugli spazi di funzioni è il teorema di Ascoli-Arzelà a cui è dedicato il quinto capitolo. Un insieme di funzioni continue su uno spazio compatto è relativamente compatto nella topologia indotta dalla norma se e solo se è equicontinuo e limitato in ogni punto. Questo teorema implica in particolare il teorema di Vitali-Montel dell'analisi complessa: un insieme di funzioni olomorfe su un aperto di $\mathbb{C}^n$ è compatto se e solo se è limitato e chiuso nella topologia di Fréchet. In questo capitolo si dimostra inoltre il teorema di ricoprimento di Lebesgue che a sua volta permette di ottenere come corollario che un insieme equicontinuo su uno spazio metrico compatto è uniformemente equicontinuo.

Il teorema di Baire e le sue conseguenze appartengono agli strumenti maggiormente utilizzati per teoremi di esistenza in topologia e analisi. Gli spazi topologici di Baire vengono presentati nel sesto capitolo. Uno spazio topologico si chiama di Baire se per ogni successione

$A_1, A_2, \ldots$ di aperti densi l'intersezione $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ è densa. Si dimostra che due delle più importanti classi di spazi topologici possiedono questa proprietà: ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire e ogni spazio localmente compatto e di Hausdorff è di Baire (in particolare quindi ogni spazio compatto e di Hausdorff). La seconda metà del capitolo fornisce delle condizioni per cui un sottoinsieme di uno spazio di Baire è ancora di Baire; qui si rivela utile la suddivisione in insiemi di prima e seconda categoria. Particolarmente significativo è il risultato che ogni G_δ denso in un spazio di Baire è ancora uno spazio di Baire. Come applicazioni facciamo vedere che non esiste una funzione $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua esattamente sui numeri razionali e che uno spazio di Banach di dimensione infinita non può possedere una base numerabile.

Il settimo capitolo contiene il teorema di Hahn-Banach che si rivela fondamentale per la teoria di struttura degli spazi vettoriali topologici. Inizialmente si introducono le funzioni sublineari (a valori reali) su uno spazio vettoriale e quindi si dimostra che i funzionali lineari sono esattamente le funzioni sublineari minimali. A questo punto con l'aiuto del lemma di Zorn segue facilmente che per ogni funzione sublineare f esiste una funzione lineare α con $\alpha \leq f$. Questo approccio generale può essere variato in molti modi e conduce ad enunciati di struttura estremamente importanti. In particolare si dimostra che in uno spazio vettoriale normato X per ogni sottospazio vettoriale Y ed ogni $\alpha_0 \in Y'$ esiste un'estensione $\alpha \in X'$ tale che $\|\alpha\| = \|\alpha_0\|$ e che X' separa i punti di X. Soltanto con ciò si riesce a dimostrare che $X' \neq 0$. In particolare si ottiene un'immersione isometrica lineare $X \longrightarrow X''$. Una semplice, ma tipica applicazione è il risultato che uno spazio vettoriale normato, il cui duale è separabile, è anch'esso separabile.

Nell'ottavo capitolo usiamo il teorema di Baire per dimostrare il principio di uniforme limitatezza e il teorema di Banach-Steinhaus. Quest'ultimo lo useremo nel decimo capitolo per dimostrare che per una successione $\bigcirc\limits_{x} x_n$ X'-convergente in uno spazio vettoriale normato X, l'insieme $\{\|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

Nel nono capitolo, ancora con l'aiuto del teorema di Baire, si dimostra che un'applicazione lineare continua e suriettiva tra spazi di Banach è aperta (teorema dell'applicazione aperta). Da ciò segue il teorema del grafico chiuso: un'applicazione lineare tra spazi di Banach il cui grafico è chiuso è continua.

Nel decimo capitolo per uno spazio vettoriale normato X si introducono la X'-topologia su X e la X-topologia su X', che nella letteratura sono note come topologia debole e $*$-debole. Una semplice ma importante conseguenza del teorema di Tikhonov della topologia generale è il teorema di Alaoglu: la palla unitaria del duale di X è X-compatta.

Il conclusivo undicesimo capitolo contiene un'introduzione alla teoria delle algebre di Banach commutative, dimostrando, all'inizio, che lo spettro di un operatore lineare φ in uno spazio di Banach è compatto, non vuoto e limitato dalla norma $\|\varphi\|$. In questo modo si ottiene dapprima il teorema di Gelfand-Mazur che afferma che ogni algebra di Banach che è un campo è isomorfa in modo naturale a $\mathbb{C}$. Siccome per un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di un'algebra di Banach A, l'algebra $A/\mathfrak{m}$ è sempre un campo, si arriva così al primo teorema fondamentale della teoria spettrale di Gelfand: l'applicazione $\bigcirc_a \bigcirc_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} : A \longrightarrow C(\operatorname{Max} A, \mathbb{C})$ è un omomorfismo di algebre di Banach con nucleo $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}$.

1. Richiami sugli spazi di Banach

Situazione 1.1. Usiamo le seguenti notazioni:

$$\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$$
$$\mathbb{K} := \mathbb{R} \text{ oppure } \mathbb{C}$$

Definizione 1.2. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una *seminorma* su X è un'applicazione $\|\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $x, y \in X$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

Si noti che la (2) implica $\|0\| = 0$. Se inoltre

(3) $\|x\| = 0 \implies x = 0$,

allora $\|\|$ si chiama una *norma*.

La coppia $X = (X, \|\|)$ si chiama uno *spazio seminormato* (nel caso di una seminorma) rispettivamente uno *spazio normato* (nel caso di una norma).

Nella teoria generale degli spazi vettoriali topologici (non normati) seminorme vengono spesso denotate con lettere: $p, q, \ldots$

Osservazione 1.3. Sia X uno spazio seminormato. Se poniamo $d(x, y) := \|x - y\|$, allora (X, d) è uno spazio semimetrico. Se $\|\|$ è una norma, allora (X, d) è uno spazio metrico.

Concetti topologici si riferiranno sempre alla semimetrica risp. metrica d.

Dimostrazione. È sufficiente verificare la disuguaglianza triangolare. Per $x, y, z \in X$ abbiamo

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

Lemma 1.4. *Sia* (X, d) *uno spazio semimetrico. Per* $x, y, u, v \in X$ *allora*

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

e quindi

$$d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(y, v)$$

e similmente

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v)$$

e quindi

$$d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(y, v)$$

Corollario 1.5. *Sia* (X, d) *uno spazio semimetrico. Allora l'applicazione* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *è uniformemente continua (rispetto alla semimetrica naturale su* $X \times X$*).*

Corollario 1.6. *Sia* X *uno spazio seminormato. Per* $x, y, u, v \in X$ *allora*

$$|\|x-y\| - \|u-v\|| \leq \|x-u\| + \|y-v\|$$

Corollario 1.7. *Sia* X *uno spazio seminormato. Per* $x, y \in X$ *allora*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x\| + \|y\|$$

Corollario 1.8. *Sia* X *uno spazio seminormato. Allora l'applicazione* $\|\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *è uniformemente continua.*

Definizione 1.9. Uno *spazio di Banach* (reale risp. complesso) è uno spazio normato (reale risp. complesso) completo (rispetto alla metrica definita dalla norma).

Osservazione 1.10. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\bigcirc_n x_n$ una successione di Cauchy in X. Sia $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ una successione strettamente crescente di numeri naturali tali che $\bigcirc_k x_{n_k} \longrightarrow x$ per qualche $x \in X$. Allora anche $\bigcirc_n x_n \longrightarrow x$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per $n, m \geq \nu$, perché la successione $\bigcirc_n x_n$ è di Cauchy.

La convergenza della successione $\bigcirc_k x_{n_k}$ implica però anche che esiste $k \in \mathbb{N}$ con $n_k \geq \nu$ tale che $d(x_{n_h}, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Allora per $n \geq n_k$ abbiamo

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Definizione 1.11. Sia X uno spazio normato. Una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ in X si dice *assolutamente convergente*, se la serie di numeri reali $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge.

Proposizione 1.12. *Sia* X *uno spazio normato. Allora sono equivalenti:*

(1) X *è uno spazio di Banach.*

(2) *Ogni serie assolutamente convergente in* X *converge.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Sia $\bigcirc_n a_n$ una successione di elementi di X tale che $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge. Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $x_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Per $n \geq m$ allora

$$\|x_n - x_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\|$$

È chiaro a questo punto che $\underset{n}{\bigcirc} x_n$ è una successione di Cauchy e per ipotesi questa successione converge. Ciò significa proprio che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sia $\underset{n}{\bigcirc} x_n$ una successione di Cauchy in X. Allora possiamo trovare una successione $\underset{k}{\bigcirc} n_k$ di numeri naturali tale che

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots \text{ e } \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{per ogni k.}$$

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ è allora assolutamente convergente e per ipotesi converge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$, le cui somme parziali sono proprio gli x_{n_k}. Per l'oss. 1.10 converge anche la successione $\underset{n}{\bigcirc} x_n$.

Proposizione 1.13. *Siano X uno spazio metrico ed $A \subset X$.*

(1) *Se X è completo ed A un chiuso di X, allora A è completo.*

(2) *Se A è completo, allora A è chiuso in X.*

Dimostrazione. (1) Se $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ è una successione di Cauchy in A, allora $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ è una successione di Cauchy anche in X. Perciò esiste $x \in X$ tale che $\underset{n}{\bigcirc} a_n \longrightarrow x$. Ciò significa $x \in \overline{A} = A$.

La successione $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ è perciò convergente in A.

(2) Sia $x \in \overline{A}$. Allora esiste una successione $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ in A tale che $\underset{n}{\bigcirc} a_n \longrightarrow x$. La successione convergente $\underset{n}{\bigcirc} a_n$ è di Cauchy in A; per ipotesi esiste $a \in A$ tale che $\underset{n}{\bigcirc} a_n \longrightarrow a$. Per l'unicità del limite in uno spazio metrico $x = a \in A$.

Corollario 1.14. *Siano X uno spazio di Banach ed E un sottospazio vettoriale di X. Allora sono equivalenti:*

(1) *E è uno spazio di Banach.*

(2) *E è chiuso in X.*

Definizione 1.15. Per un insieme Ω sia

$$l^\infty(\Omega) := l^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ è limitata } \}$$

Per $f \in l^\infty(\Omega)$ poniamo

$$\|f\|_\Omega := \sup\{|f(\omega)| \mid \omega \in \Omega\}$$

Invece di $\|\|_\Omega$ si usa spesso il simbolo $\|\|_\infty$.

Per spazi topologici Ω ed S siano

$C(\Omega, S) := \{f : \Omega \longrightarrow S \mid f$ è continua $\}$

$C(\Omega) := C(\Omega, \mathbb{K})$

$C_b(\Omega) := C_b(\Omega, \mathbb{K}) := C(\Omega) \cap l^\infty(\Omega)$

Se Ω è compatto, allora $C(\Omega) \subset l^\infty(\Omega)$ e per $f \in C(\Omega)$ si ha

$\|f\|_\Omega = max\,\{|f(\omega)| \mid \omega \in \Omega\}$

Proposizione 1.16. *Sia Ω un insieme non vuoto. Allora $(l^\infty(\Omega), \|\|_\Omega)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. (1) È immediato che $l^\infty(\Omega)$ è uno spazio vettoriale e si verifica facilmente che $\|\| := \|\|_\Omega$ è una norma.

(2) Dimostriamo la completezza.

Sia $\bigcirc_n f_n$ una successione di Cauchy in $l^\infty(\Omega)$. Per $n, m \in \mathbb{N}$ ed $x \in \Omega$ allora $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$, cosicché la successione $\bigcirc_n f_n(x)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ che converge a un valore che denotiamo con $f(x)$.

In questo modo otteniamo una funzione $f := \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$. Dobbiamo dimostrare che f è limitata e che $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f_m\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per $n, m \geq N$. Sia $x \in \Omega$. Siccome per costruzione $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, esiste $n' \geq N$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n \geq n'$.

In particolare $|f_{n'}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Per $n \geq N$ abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_{n'}(x)| + |f_{n'}(x) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f_{n'}\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Abbiamo perciò in particolare

$|f(x)| \leq |f_N(x)| + |f(x) - f_N(x)| \leq \|f_N\| + \varepsilon$

Si noti che N non dipende da x. Ciò mostra che la funzione f è limitata, cosicché, tenendo conto della disuguaglianza $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ valida per ogni $n \geq N$, possiamo scrivere $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ e ciò implica che $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Lemma 1.17. *Siano Ω un insieme non vuoto ed $f, g \in l^\infty(\Omega)$. Allora*

$\|fg\|_\Omega \leq \|f\|_\Omega \|g\|_\Omega$

Dimostrazione. Sia $x \in \Omega$. Allora

$|fg(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \|f\|_\Omega \|g\|_\Omega$

Proposizione 1.18. *Sia Ω uno spazio topologico non vuoto. Allora $(C_b(\Omega), \|\|_\Omega)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. $C_b(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $l^\infty(\Omega)$, perciò per la prop. 1.16 e il cor. 1.14 è sufficiente dimostrare che $C_b(\Omega)$ è chiuso in $l^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\| := \|\|_\Omega$.

Siano $\underset{n}{\bigcirc} f_n$ una successione in $C_b(\Omega)$ ed $f \in l^\infty(\Omega)$ tali che $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Dobbiamo dimostrare che f è continua.

Siano $x \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$. In primo luogo esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_m - f\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Per la continuità di f_m esiste un intorno U di x tale che per ogni $y \in U$ si abbia $|f_m(y) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ e quindi anche

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\le |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \|f - f_m\| + |f_m(y) - f_m(x)| + \|f_m - f\| \\ &< 2\|f_m - f\| + \frac{\varepsilon}{3} < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Corollario 1.19. *Sia Ω uno spazio topologico non vuoto e compatto. Allora $(C(\Omega), \|\|_\Omega)$ è uno spazio di Banach.*

Nota 1.20. In particolare è uno spazio di Banach lo spazio $C([a,b])$ per $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass (che dimostreremo nel prossimo capitolo) ogni elemento di $C([a,b])$ è limite uniforme (cioè rispetto alla norma $\|\|_\Omega$) di una successione di polinomi. Ciò mostra che $C^1([a,b])$ è denso (e quindi sicuramente non chiuso) in $C([a,b])$. Per il cor. 1.14 perciò $C^1([a,b])$ non è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\|_{[a,b]}$.

Definizione 1.21. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $\tau : X \longrightarrow X$ è detta una *contrazione*, se esiste $\alpha \in [0,1]$ tale che

$$d(\tau(x), \tau(y)) \le \alpha d(x,y)$$

per ogni $x, y \in X$. α si chiama un *fattore di contrazione* per τ.

Una contrazione è evidentemente uniformemente continua e quindi anche continua.

Proposizione 1.22 (teorema del punto fisso di Banach). *Siano (X, d) uno spazio metrico completo non vuoto e $\tau : X \longrightarrow X$ una contrazione. Allora esiste esattamente un punto fisso x_0 di τ, cioè un punto $x_0 \in X$ tale che $\tau(x_0) = x_0$.*

Inoltre $\lim\limits_{n\to\infty} \tau^n(x) = x_0$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Nibbi, pag. 15.

Definizione 1.23. Per $p \in [1, \infty)$ sia

$$l^p(\mathbb{N}) := l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

Si dimostra facilmente (utilizzando la disuguaglianza di Hölder) che $l^p(\mathbb{N})$ diventa uno spazio di Banach con la norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Lo spazio di Banach $l^\infty(\mathbb{N})$ è invece un caso speciale degli spazi $l^\infty(\Omega)$ introdotti nella definizione 1.15.

Definizione 1.24. Sia (Ω, A, p) uno spazio di misura. Per $p \in [1, \infty)$ poniamo

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{K}) := \mathcal{L}^p(\Omega, A, p, \mathbb{K}) :=$$
$$:= \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \mid \text{f misurabile e} \int |f(w)|^p dp(w) < \infty \right\}$$

Allora con $\|f\|_p := \left(\int |f(w)|^p \, dp(w)\right)^{\frac{1}{p}}$ otteniamo una seminorma su $\mathcal{L}^p(\Omega)$ che, identificando funzioni f e g per le quali $\|f - g\|_p = 0$, definisce uno spazio $L^p(\Omega)$ e una norma su di esso. Si dimostra (teorema di Riesz-Fischer) che $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach.

Similmente si definiscono $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ e lo spazio di Banach $L^\infty(\Omega)$ mediante il supremo essenziale.

Rimandiamo ai corsi di analisi per i dettagli.

Osservazione 1.25. Siccome l'integrale di una funzione misurabile $f \geq 0$ si annulla se e solo se l'insieme $(f > 0)$ ha misura nulla (Elstrodt, pag. 124), nella definizione 1.24 due funzioni f e g per $p \in [1, \infty)$ definiscono lo stesso elemento in $L^p(\Omega)$ se e solo se $\mu(f \neq g) = 0$. Segue facilmente dalla definizione di supremo essenziale che ciò rimane vero anche per $p = \infty$.

2. Il teorema di Stone-Weierstrass

Situazione 2.1. Sia Ω un insieme non vuoto, quando non indicato diversamente.

Definizione 2.2. Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{K}^\Omega$. Diciamo che $\mathcal{F}$ separa i punti, se per $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ esiste sempre una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

Osservazione 2.3. Sia $\mathcal{F}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^\Omega$ che contiene le funzioni costanti e separa i punti. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed $x, y \in \Omega$. Allora:

(1) Se $x \neq y$, allora esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) = \alpha$ ed $f(y) = \beta$.
(2) Esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) = \alpha$.

Dimostrazione. (1) Per ipotesi esiste $g \in \mathcal{F}$ tale che $g(x) \neq g(y)$. Poniamo allora

$$f := \frac{(\alpha - \beta)g + \beta g(x) - \alpha g(y)}{g(x) - g(y)}$$

Le nostre ipotesi implicano $f \in \mathcal{F}$. Inoltre

$$f(x) = \frac{(\alpha - \beta)g(x) + \beta g(x) - \alpha g(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{\alpha g(x) - \alpha g(y)}{g(x) - g(y)} = \alpha$$

$$f(y) = \frac{(\alpha - \beta)g(y) + \beta g(x) - \alpha g(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{-\beta g(y) + \beta g(x)}{g(x) - g(y)} = \beta$$

(2) Per ipotesi la costante α appartiene ad $\mathcal{F}$.

Definizione 2.4. Un *sottoreticolo vettoriale* di $\mathbb{R}^\Omega$ è un sottospazio vettoriale $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^\Omega$ tale che per f,$g \in \mathcal{F}$ si abbia sempre $f \vee g \in \mathcal{F}$ ed $f \wedge g \in \mathcal{F}$.

E' chiaro che $\mathcal{F}$ contiene le funzioni costanti se e solo se $1 \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.5. *Sia Ω uno spazio topologico compatto non vuoto. Sia $\mathcal{F}$ un sottoreticolo vettoriale di $C(\Omega, \mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti e separa i punti. Allora $\overline{\mathcal{F}} = C(\Omega, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Seguiamo Schaefer, pagg. 243-244.
La chiusura $\overline{\mathcal{F}}$ nell'enunciato si riferisce naturalmente alla topologia indotta dalla norma $\| \| := \| \|_\Omega$.

Siano $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ ed $\varepsilon > 0$.

(1) Sia $x \in \Omega$. Per l'oss. 2.3 allora per ogni $y \in \Omega$ esiste una funzione $g_y \in \mathcal{F}$ tale che $g_y - f$ si annulli sia in x che in y. Queste funzioni sono tutte continue, perciò per ogni $y \in \Omega$ esiste $U_y \in \mathcal{U}(y)$ tale che $g_y(z) > f(z) - \varepsilon$ per ogni $z \in U_y$. Siccome Ω è compatto, esistono $y_1, \ldots, y_m \in \Omega$ tali che $\Omega = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_m}$. Se adesso definiamo

$$h_x := g_{y_1} \vee \ldots \vee g_{y_m} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

allora $h_x \in \mathcal{F}$ e inoltre $h_x > f - \varepsilon$.

(2) Per ogni $x \in \Omega$ però $h_x - f$ si annulla in x, cosicché esiste $V_x \in \mathcal{U}(x)$ tale che $h_x(z) < f(z) + \varepsilon$ per ogni $z \in V_x$. Per la compattezza di Ω esistono $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$ tali che $\Omega = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}$. Sia ora

$h := h_{x_1} \wedge \ldots \wedge h_{x_n} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Allora $h \in \mathcal{F}$ e inoltre $h < f + \varepsilon$.

Siccome però $h_x > f - \varepsilon$ per ogni $x \in \Omega$, abbiamo anche $h > f - \varepsilon$ e così in tutto $f - \varepsilon < h < f + \varepsilon$. Ciò implica $\|f - h\| < \varepsilon$.

(3) Abbiamo così dimostrato che $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Definizione 2.6. Una *sottoalgebra* di $\mathbb{K}^\Omega$ è un sottospazio vettoriale $\mathcal{F}$ di $\mathbb{K}^\Omega$ tale che per $f, g \in \mathcal{F}$ si abbia sempre $fg \in \mathcal{F}$.

Osservazione 2.7. Sia $\mathcal{F}$ una sottoalgebra di $l^\infty(\Omega)$. Allora anche $\overline{\mathcal{F}}$ è una sottoalgebra di $l^\infty(\Omega)$.

Lemma 2.8 (Zemánek). *Sia $\mathcal{F}$ una sottoalgebra chiusa di $l^\infty(\Omega)$ che contiene le funzioni costanti.*

Sia $f \in \mathcal{F}$ ed $f \geq 0$. Allora $\sqrt{f} \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Seguiamo Heuser, 2^o volume, pag. 60.

Sia $\|\| := \|\|_\Omega$. Usiamo più volte il lemma 1.17.

(1) Supponiamo prima che $\|1 - f\| < 1$. Scegliamo α in modo tale che $\|1 - f\| < \alpha < 1$ e poniamo $\mathcal{E} := (\|\mathcal{F}\| \leq \alpha)$.

Per la prop. 1.16 $l^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Banach; siccome $\mathcal{F}$ è chiusa in $l^\infty(\Omega)$, per la prop. 1.13 $\mathcal{F}$ è completa. $\mathcal{E}$ è chiuso in $\mathcal{F}$ e quindi per la stessa proposizione $\mathcal{E}$ è uno spazio metrico completo, evidentemente non vuoto. Dimostriamo che l'applicazione

$A := \bigcirc_u \dfrac{1 - f + u^2}{2} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ è ben definita e una contrazione.

(a) Sia $u \in \mathcal{E}$. Allora

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1 - f + u^2}{2} \right\| &\leq \frac{\|1 - f\| + \|u^2\|}{2} \\ &\overset{1.17}{\leq} \frac{\|1 - f\| + \|u\|^2}{2} < \frac{\alpha + \alpha^2}{2} < \alpha\end{aligned}$$

Perciò l'applicazione A è ben definita.

(b) Dimostriamo che A è una contrazione. Siano $u, v \in \mathcal{E}$. Allora

$$\begin{aligned}\|A(u) - A(v)\| &= \frac{\|u^2 - v^2\|}{2} = \frac{\|(u - v)(u + v)\|}{2} \\ &\leq \frac{\|u - v\|\|u + v\|}{2} \leq \frac{\|u\| + \|v\|}{2}\|u - v\| \\ &\leq \frac{\alpha + \alpha}{2}\|u - v\| = \alpha\|u - v\|\end{aligned}$$

(c) Per la prop. 1.22 esiste perciò una funzione $u \in \mathcal{E}$ tale che $\dfrac{1 - f + u^2}{2} = u$.

Ciò significa che $1 - f + u^2 = 2u$ ovvero $f = u^2 - 2u + 1 = (1-u)^2$.

(d) Per ipotesi $f \geq 0$, perciò la funzione $\sqrt{f} = \bigcirc_x \sqrt{f(x)}$ è ben definita e chiaramente $\sqrt{f} \in l^\infty(\Omega)$.

Per ogni $x \in \Omega$ abbiamo $\sqrt{f(x)} = \pm(1 - u(x))$. Ciò implica $u(x) \in \mathbb{R}$ anche quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Però $u \in \mathcal{E}$, cosicché $0 \leq u(x) \leq \alpha < 1$, per cui $1 - u(x) > 0$. Ciò implica $\sqrt{f} = 1 - u$. Adesso è chiaro che $\sqrt{f} \in \mathcal{F}$.

(2) Rinunciando all'ipotesi $\|1 - f\| < 1$, supponiamo però che esista un $\varepsilon > 0$ tale che $f \geq \varepsilon$. Siccome la funzione f è limitata, abbiamo allora $0 < \varepsilon \leq f \leq \|f\|$, cosicché $\left\|1 - \dfrac{f}{\|f\|}\right\| = \dfrac{1}{\|f\|}\|\|f\| - f\| < 1$.

Per il punto (1) $\sqrt{\dfrac{f}{\|f\|}} = \dfrac{1}{\sqrt{\|f\|}}\sqrt{f} \in \mathcal{F}$ e quindi anche $\sqrt{f} \in \mathcal{F}$, perché $\mathcal{F}$ è una sottoalgebra di $l^\infty(\Omega)$.

(3) In quest'ultima parte della dimostrazione supponiamo solo che $f \geq 0$. Per il punto (2) abbiamo $\sqrt{f + \dfrac{1}{n}} \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$.

Ma

$$0 \leq \sqrt{f + \frac{1}{n}} - \sqrt{f} = \frac{\left(f + \frac{1}{n}\right) - f}{\sqrt{f + \frac{1}{n}} + \sqrt{f}} = \frac{1}{n\left(\sqrt{f + \frac{1}{n}} + \sqrt{f}\right)} \leq \frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

cosicché

$$\left\|\sqrt{f + \frac{1}{n}} - \sqrt{f}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e ciò mostra che $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{f + \dfrac{1}{n}} = \sqrt{f}$ in $l^\infty(\Omega)$.

Siccome $\sqrt{f + \dfrac{1}{n}} \in \mathcal{F}$ per ogni n, dall'ipotesi che $\mathcal{F}$ sia chiusa in $l^\infty(\Omega)$ otteniamo $\sqrt{f} \in \mathcal{F}$.

Lemma 2.9. *Sia $\mathcal{F}$ una sottoalgebra chiusa di $l^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti. Siano $f, g \in \mathcal{F}$.*

Allora anche le funzioni $|f|$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ appartengono ad $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ è quindi un sottoreticolo di $l^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. (1) Per ipotesi f e g assumono solo valori reali, per cui $f^2 \geq 0$ e $|f| = \sqrt{f^2}$. Il lemma 2.8 implica $|f| \in \mathcal{F}$.

(2) Da ciò segue che

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in \mathcal{F}$$

$$f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in \mathcal{F}$$

Teorema 2.10 (Stone-Weierstrass). *Sia Ω uno spazio topologico compatto e non vuoto. Sia $\mathcal{F}$ una sottoalgebra di $C(\Omega, \mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti e separa i punti. Allora $\overline{\mathcal{F}} = C(\Omega, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per il cor. 1.19 $C(\Omega, \mathbb{R})$ è chiusa in $l^\infty(\Omega)$ e quindi anche la sottoalgebra (oss. 2.7) $\overline{\mathcal{F}}$ è chiusa in $l^\infty(\Omega)$ e quindi, per il lemma 2.9, un sottoreticolo di $l^\infty(\Omega)$. L'enunciato segue dal teorema 2.5.

Osservazione 2.11. Una dimostrazione elementare, basata su sottili stime apposite, del teorema di Stone-Weierstrass è data nel lavoro di Brosowski/Deutsch.

Una dimostrazione che utilizza il teorema di Alaoglu e il teorema di Krein-Milman, dovuta a Louis de Branges, si trova ad esempio in Conway, pagg. 149-150.

Definizione 2.12. Uno spazio topologico X si dice *completamente regolare*, se è di Hausdorff e per ogni $x \in X$ ed ogni chiuso A di X con $x \notin A$ esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$ e $(f = 0, \text{ in } A)$.

Osservazione 2.13. Sia Ω uno spazio topologico non vuoto, compatto e di Hausdorff. Allora Ω è completamente regolare, per cui $C(\Omega, \mathbb{R})$ separa i punti.

Nota 2.14. L' oss. 2.3 e la dimostrazione del teorema di Stone-Weierstrass rimangono valide se la condizione che $\mathcal{F}$ contenga le funzioni costanti viene sostituita con la condizione più debole che $\mathcal{F}$ abbia *supporto pieno*, cioè che per ogni $x \in \Omega$ esiste una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq 0$.

Se inoltre $\mathcal{F}$ non separa i punti oppure non ha supporto pieno, ciò vale evidentemente anche per $\overline{\mathcal{F}}$. Da ciò segue che il teorema di Stone-Weierstrass può essere formulato nel modo seguente:

Siano Ω uno spazio topologico non vuoto, compatto e di Hausdorff, ed $\mathcal{F}$ una sottoalgebra di $C(\Omega, \mathbb{R})$. Allora sono equivqlenti:

(1) $\overline{\mathcal{F}} = C(\Omega, \mathbb{R})$.

(2) $\mathcal{F}$ separa i punti e possiede supporto pieno.

Questa variante si trova in Appell/Väth, pagg. 325-327.

Osservazione 2.15. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ il cui interno sia non vuoto. Se due polinomi $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sono tali che $f(\omega) = g(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$, per il principio di identità per polinomi in più variabili (ad es. Scheja/Storch, 2^o volume, pag. 48) i polinomi f e g devono coincidere. Possiamo quindi considerare $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ come sottoalgebra di $C(\Omega, \mathbb{R})$ che ovviamente contiene le funzioni costanti.

Abbiamo però anche per un qualsiasi sottoinsieme non vuoto Ω di $\mathbb{R}^n$ un'applicazione naturale $\underset{f}{\bigcirc}\underset{\omega}{\bigcirc} f(\omega) : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$; l'immagine $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_\Omega$ di quest'applicazione è una sottoalgebra di $C(\Omega, \mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti.

Corollario 2.16 (teorema di approssimazione di Weierstrass). *Sia Ω un sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{R}^n$.*

Allora $\overline{\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]} = C(\Omega, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Per l'oss. 2.15 e il teorema 2.10 è sufficiente verificare che $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ separa i punti di Ω.

Siano a, b due punti distinti di Ω; allora essi si distinguono, ad esempio, nella prima coordinata e per il polinomio $f := x_1$ abbiamo $f(a) \neq f(b)$.

Corollario 2.17. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora* $\overline{\mathbb{R}[x]_{[a,b]}} = C([a, b], \mathbb{R})$.

Nota 2.18. Per funzioni continue definite su intervalli, polinomi approssimanti possono essere indicati esplicitamente. È sufficiente considerare il caso dell'intervallo $[0, 1]$, perché ogni altro intervallo $[a, b]$ può essere trasformato in esso tramite la trasformazione affine
$\underset{x}{\bigcirc} \dfrac{x-a}{b-a}$.

Per $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ed $n \in \mathbb{N}$ definiamo l'n-esimo polinomio di Bernstein tramite

$$B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Allora la successione $\underset{n}{\bigcirc} B_n(f)$ converge uniformemente ad f.

Dimostrazione. Ad esempio Davis, pagg. 108-111, oppure Wloka, pagg. 17-18.

Definizione 2.19. Per $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^\Omega$ poniamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{F} &:= \{\operatorname{Re} f \mid f \in \mathcal{F}\} \\ \operatorname{Im} \mathcal{F} &:= \{\operatorname{Im} f \mid f \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

Teorema 2.20. *Sia Ω uno spazio topologico non vuoto e compatto. Sia $\mathcal{F}$ una sottoalgebra (complessa) di $C(\Omega, \mathbb{C})$ che soddisfa le seguenti tre condizioni:*

(1) *$\mathcal{F}$ separa i punti.*

(2) *$\mathcal{F}$ contiene le funzioni costanti.*

(3) $\operatorname{Re} \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ *e* $\operatorname{Im} \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

Allora $\overline{\mathcal{F}} = C(\Omega, \mathbb{C})$.

Dimostrazione. (1) Sia $\mathcal{F}_\mathbb{R} := \mathcal{F} \cap C(\Omega, \mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ è una sottoalgebra (reale) di $C(\Omega, \mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti.

(2) Dimostriamo che $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ separa i punti.

Siano $x, y \in \Omega$ tali che $x \neq y$. Per ipotesi esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Ciò implica però che $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ oppure $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$. Evidentemente però $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$ appartengono ad $\mathcal{F}_\mathbb{R}$.

(3) Dal teorema 2.10 segue che $\overline{\mathcal{F}_\mathbb{R}} = C(\Omega, \mathbb{R})$.

(4) Siano adesso $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ ed $\varepsilon > 0$. Per il punto (3) esistono $u, v \in \mathcal{F}_\mathbb{R}$ tali che $\|\operatorname{Re} f - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|\operatorname{Im} f - v\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi avremo

$$\|f - u + iv\| = \|\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f - u + iv\| \le \|\operatorname{Re} f - u\| + \|\operatorname{Im} f - v\| < \varepsilon$$

Dunque abbiamo dimostrato che $\overline{\mathcal{F}} = C(\Omega, \mathbb{C})$.

Osservazione 2.21. Sia $\mathcal{F}$ una sottoalgebra di $\mathbb{C}^\Omega$. Allora sono equivalenti:

(1) $\operatorname{Re} \mathcal{F} \subset \mathcal{F} \quad$ e $\quad \operatorname{Im} \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

(2) $f \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{f} \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Per $f \in \mathcal{F}$, si hanno le relazioni $\overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$, che mostra l'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2), e $\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2}$, $\operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}$, da cui segue l'implicazione (2) $\Rightarrow$ (1).

Nota 2.22. La condizione (3) del teorema 2.20 è necessaria, come si vede dal seguente esempio: Siano $\mathbb{D} := (|\mathbb{C}| < 1)$ il disco unitario aperto di $\mathbb{C}$ ed $\mathcal{F} := \{f : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua $\mid f$ olomorfa in $\mathbb{D}\}$.

È immediato che $\mathcal{F}$ è una sottoalgebra (complessa) di $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ che separa i punti e contiene le funzioni costanti. Invece, mentre $\underset{z}{\bigcirc} z \in \mathcal{F}$, la funzione $\underset{z}{\bigcirc} \overline{z}$ non fa più parte di $\mathcal{F}$, non essendo olomorfa.

Ed effettivamente, per un noto teorema dell'analisi complessa si ha $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \neq C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$.

Corollario 2.23. *Sia Ω un sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{C}^n$. Allora $\overline{\mathbb{C}[x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}]_\Omega} = C(\Omega, \mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del cor. 2.16 si dimostra che $\mathbb{C}[x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}]$ separa i punti. È chiaro allora che sono soddisfatte le ipotesi del teorema 2.20.

L'algebra $\mathbb{C}[x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}]$ è definita in analogia con l'oss. 2.15.

Proposizione 2.24. *Siano Ω e Ω' due spazi topologici non vuoti, compatti e di Hausdorff. Sia*

$$\mathcal{F} := \{ \underset{(x,y)}{\bigcirc} \sum_{k=1}^{m} f_k(x) g_k(y) \mid m \in \mathbb{N} + 1, \\ f_1, \ldots, f_m \in C(\Omega, \mathbb{R}), g_1, \ldots, g_m \in C(\Omega', \mathbb{R})\}$$

Allora $\overline{\mathcal{F}} = C(\Omega \times \Omega', \mathbb{R})$.

Dimostrazione. È chiaro che $\mathcal{F}$ è una sottoalgebra di $C(\Omega \times \Omega')$ che contiene le funzioni costanti.

Per il teorema 2.10 è sufficiente dimostrare che $\mathcal{F}$ separa i punti. Siano (x, x') e (y, y') due punti di $\Omega \times \Omega'$ e, ad esempio, $x \neq y$.

Per l'oss. 2.13 esiste $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

Allora $\varphi := \bigcirc_{(x,y)} f(x)$ appartiene ad $\mathcal{F}$ e separa i due punti. Infatti

$\varphi(x, x') = f(x) \neq f(y) = \varphi(y, y')$

Osservazione 2.25. *Sia Ω uno spazio topologico. Se $C(\Omega, \mathbb{K})$ separa i punti, allora Ω è uno spazio di Hausdorff.*

Quindi anche se nei teoremi 2.5, 2.10 e 2.20 non abbiamo supposto esplicitamente che Ω sia di Hausdorff, questa ipotesi è automaticamente soddisfatta.

Dimostrazione. Siano $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$. Per ipotesi esiste $f \in C(\Omega, \mathbb{K})$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Siccome $\mathbb{K}$ è uno spazio di Hausdorff, esistono $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$ e $V \in \mathcal{U}_{f(y)}$ tali che $U \cap V = \emptyset$ e quindi anche $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$. $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono intorni di x perché la funzione f è continua.

Proposizione 2.26. *Sia*

$$\mathcal{F} := \{f : S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \mid \textit{ esistono } n \in \mathbb{N} \textit{ e } c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \textit{ tali che}$$
$$f = \bigcirc_z \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k\}$$

Allora $\overline{\mathcal{F}} = C(S^1, \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Ovviamente $\mathcal{F}$ è una sottoalgebra di $C(S^1, \mathbb{C})$ che contiene le funzioni costanti. Dobbiamo dimostrare che sono soddisfatte le condizioni (1) e (3) del teorema 2.20.

Che $\mathcal{F}$ separa i punti è chiaro perché la funzione $\bigcirc_z z$ appartiene ad $\mathcal{F}$.

Per l'oss. 2.21 rimane da dimostrare che $f \in \mathcal{F}$ implica $\overline{f} \in \mathcal{F}$.

Ma per $z \in S^1$ si ha $\overline{z} = z^{-1}$, per cui $\overline{\bigcirc_z \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k} = \bigcirc_z \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_{-k}} z^k \in \mathcal{F}$.

Definizione 2.27. Un *polinomio trigonometrico* (su $[0, 2\pi]$) è una funzione della forma

$$\bigcirc_t (a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k cos kt + b_k sen kt)) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Per $n = 0$ naturalmente appare solo il termine costante a_0.

Nota 2.28. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ ed

$$f := \bigcirc_z \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

Consideriamo la funzione $g := \bigcirc_t f(e^{it}) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Allora $g(0) = g(2\pi)$.

Per ogni k sia $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

(1) Per $t \in [0, 2\pi]$ abbiamo allora

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_k + i\beta_k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)(\cos kt + i \sin kt) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_k \cos kt - \beta_k \sin kt) + i \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_k \sin kt + \beta_k \cos kt) \end{aligned}$$

(2) Assumiamo adesso che g (o f) assuma solo valori reali. Allora

$g(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} (\alpha_k \cos kt - \beta_k \sin kt)$

per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Però $\cos(-kt) = \cos kt$ e $\sin(-kt) = -\sin kt$, cosicché possiamo scrivere

$$\begin{aligned} g(t) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \alpha_{-k}) \cos kt - \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \beta_{-k}) \sin kt \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \end{aligned}$$

con $a_0 := \alpha_0$, $a_k := \alpha_k + \alpha_{-k}$, $b_k := \beta_{-k} - \beta_k$.

Proposizione 2.29. *Sia $\mathcal{G}$ l'insieme dei polinomi trigonometrici (su $[0, 2\pi]$). Nella topologia dell'uniforme convergenza si ha*

$\overline{\mathcal{G}} = \{\varphi \in C([0, 2\pi], \mathbb{R}) \mid \varphi(0) = \varphi(2\pi)\}$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ con $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.

Definiamo $\psi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite $\psi(e^{it}) := \varphi(t)$.

Si dimostra facilmente che ψ è ben definita e continua (cfr. ad esempio Schempp/Dreseler, pag. 11). Per la prop. 2.26 possiamo approssimare ψ con funzioni della forma $f = \bigcirc_{z} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ e quindi anche tramite le parti reali di queste funzioni (per una succesione $\tilde{f} \longrightarrow \psi$ si ha $\operatorname{Re} \tilde{f} \longrightarrow \operatorname{Re} \psi = \psi$).

Per la nota 2.28 otteniamo un'approssimazione di ψ tramite polinomi trigonometrici.

3. Il teorema del Dini

Situazione 3.1. Sia Ω uno spazio topologico non vuoto.
Scriviamo $\|\|$ invece di $\|\|_\Omega$.

Lemma 3.2. *Siano Ω compatto ed $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{R})$. Sia $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R})$ tale che per ogni $x \in \Omega$ esiste $f_{(x)} \in \mathcal{F}$ tale che $f_{(x)}(x) > \varphi(x)$.*

Allora esistono $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{F}$ tali che $f_1 \vee \ldots \vee f_m > \varphi$.

<u>Dimostrazione.</u> Dalla continuità di queste funzioni segue che per ogni $x \in \Omega$ l'insieme $(f_{(x)} > \varphi) = (f_{(x)} - \varphi > 0)$ è un aperto che per ipotesi contiene x.

Per la compattezza di Ω esistono $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$ tali che
$\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (f_{(x_i)} - \varphi > 0)$.

Per avere l'enunciato basta porre $f_i = f_{(x_i)}$.

Definizione 3.3. Un insieme quasi ordinato $(\mathcal{F}, \leq)$ si dice *diretto verso l'alto*, se per ogni $f, g \in \mathcal{F}$ esiste $h \in \mathcal{F}$ tale che $f, g \leq h$.

Proposizione 3.4. *Siano Ω compatto ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme diretto verso l'alto di $C(\Omega, \mathbb{R})$.*

Per ogni $x \in \Omega$ sia $\varphi(x) := \sup \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$. La funzione $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ così ottenuta sia continua.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f \in \mathcal{F}$ con $0 \leq \varphi - g < \varepsilon$ e quindi in particolare $\|\varphi - g\| < \varepsilon$ per ogni $g \in (\mathcal{F} \geq f)$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $\varepsilon > 0$. Allora, per costruzione di φ, per ogni $x \in \Omega$ esiste $f_{(x)} \in \mathcal{F}$ tale che $f_{(x)}(x) > \varphi(x) - \varepsilon$. Per il lemma 3.2 esistono $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{F}$ tali che $f_1 \vee \ldots \vee f_m > \varphi - \varepsilon$.

Però l'insieme $\mathcal{F}$ è diretto verso l'alto, perciò esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f \geq f_1 \vee \ldots \vee f_m$ e quindi anche $f > \varphi - \varepsilon$, ovvero $\varphi - f < \varepsilon$.

Sia ora $g \in \mathcal{F}$ con $g \geq f$. Per la definizione di φ si ha allora $f \leq g \leq \varphi$, cosicché $0 \leq \varphi - g \leq \varphi - f < \varepsilon$. Ciò a sua volta implica $\|\varphi - g\| < \varepsilon$.

Teorema 3.5 (teorema del Dini). *Siano Ω compatto ed $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ una successione monotona di funzioni continue $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $\bigcirc\limits_n f_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ per ogni $x \in \Omega$.*

*Allora la successione converge uniformemente, si ha cioè
$\bigcirc\limits_n \|\varphi - f_n\| \longrightarrow 0$.*

<u>Dimostrazione.</u> Ciò è una conseguenza immediata della prop. 3.4 applicata all'insieme $\mathcal{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Infatti è chiaro che $\varphi = \sup \mathcal{F}$.

4. Spazi metrici totalmente limitati

Nota 4.1. Per i concetti di filtro e ultrafiltro rimandiamo ai libri di testo di Topologia generale oppure a Chiodera.

Proposizione 4.2. *Siano X uno spazio topologico compatto ed A un chiuso di X. Allora A è compatto.*

Dimostrazione. Chiodera, pag. 17.

Proposizione 4.3. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff ed A un sottoinsieme compatto di X. Allora A è chiuso in X.*

Dimostrazione. Chiodera, pag. 18.

Proposizione 4.4. *Ogni spazio metrico è sottospazio denso di uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Engelking, pag. 721.

Definizione 4.5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un filtro $\dot{x}$ su X si dice *di Cauchy*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $F \in \dot{x}$ tale che $d(u, v) < \varepsilon$ per ogni $u, v \in F$.

Definizione 4.6. Siano X uno spazio topologico, $\dot{x}$ un filtro su X ed $x \in X$. Diciamo che $\dot{x}$ *converge ad* x e scriviamo $\dot{x} \longrightarrow x$, se $\mathcal{U}(x) \subset \dot{x}$.

Lemma 4.7. *Uno spazio metrico (X, d) è completo se e solo se ogni filtro di Cauchy su X converge.*

Dimostrazione. (1) Assumiamo che ogni filtro di Cauchy su X converga. Sia $\bigcirc_n x_n$ una successione di Cauchy in X. Sia

$$\dot{x} := \{F \subset X \mid \text{ esiste } n_0 \text{ con } \{x_n \mid n \geq n_0\} \subset F\}$$

il filtro ottenuto da $\bigcirc_n x_n$. È chiaro che $\dot{x}$ è un filtro di Cauchy.

Per ipotesi esiste $x \in X$ con $\dot{x} \longrightarrow x$.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste n_0 tale che $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subset (d(X, x) < \varepsilon)$. Ma ciò significa che $d(x_n, x) < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$ e vediamo che $\bigcirc_n x_n \longrightarrow x$.

(2) Siano X completo ed $\dot{x}$ un filtro di Cauchy su X. Dobbiamo dimostrare che $\dot{x}$ converge.

Siccome $\dot{x}$ è un filtro di Cauchy, per ogni $n \geq 1$ esiste $F_n \in \dot{x}$ tale che $d(u, v) < 1/n$ per ogni $u, v \in F_n$. Possiamo fare in modo che $F_{n+1} \subset F_n$.

Gli insiemi F_n non sono vuoti, quindi per ogni n possiamo scegliere un punto $x_n \in F_n$.

È chiaro che $\bigcirc_n x_n$ è una successione di Cauchy. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che $1/n_0 < \varepsilon$.

Per $n, m \geq n_0$ abbiamo allora $x_n, x_m \in F_{n_0}$ e quindi $d(x_n, x_m) < 1/n_0 < \varepsilon$. Siccome X è completo, esiste $x \in X$ con $\bigcirc_n x_n \longrightarrow x$. Dobbiamo dimostrare che $\dot{x} \longrightarrow x$. Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N} + 1$ tale che $1/n < \varepsilon/2$ e $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Sia $U := (d(X, x) < \varepsilon)$. Dimostriamo che $U \in \dot{x}$. Per $z \in F_n$ abbiamo

$$d(z, x) \leq d(z, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ciò implica $F_n \subset U \in \dot{x}$, per cui $U \in \dot{x}$.

Lemma 4.8. *Siano X uno spazio metrico completo ed $\dot{x}$ un filtro di Cauchy su X. Siano $\dot{y}$ un filtro su X con $\dot{x} \subset \dot{y}$ ed $x \in X$ tale che $\dot{y} \longrightarrow x$. Allora $\dot{x} \longrightarrow x$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Dimostriamo che $(d(X, x) < \varepsilon) \in \dot{x}$.

Siccome $\dot{x}$ è un filtro di Cauchy, esiste $F \in \dot{x}$ tale che $d(u, v) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per ogni $u, v \in F$. Siccome $\dot{y} \longrightarrow x$, si ha inoltre $U := (d(X, x) < \varepsilon) \in \dot{y}$. Però anche $F \in \dot{y}$, per cui $U \cap F \neq \emptyset$. Sia $w \in U \cap F$. Allora per ogni $z \in F$ si ha

$$d(x, z) \leq d(x, w) + d(w, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ciò significa $F \subset (d(X, \varepsilon) < \varepsilon)$ e quindi $(d(X, \varepsilon) < \varepsilon) \in \dot{x}$.

Proposizione 4.9. *Uno spazio metrico compatto è completo.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico compatto. Per la prop. 4.4 X è sottospazio denso di uno spazio metrico completo E. Dal lemma 4.3 segue che X è chiuso in E e deve quindi coincidere con E.

Invece della prop. 4.4 possiamo anche usare il lemma 4.7. Siano infatti $\dot{x}$ un filtro di Cauchy su X ed $\ddot{x}$ un ultrafiltro con $\dot{x} \subset \ddot{x}$.

Siccome X è compatto, esiste $x \in X$ tale che $\ddot{x} \longrightarrow x$. Per il lemma 4.8, $\dot{x} \longrightarrow x$. Il lemma 4.7 implica che X è completo.

Definizione 4.10. Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* (o *precompatto*), se X è vuoto oppure per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a_1, \ldots, a_m \in X$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (d(X, a_i) < \varepsilon) = X$.

Osservazione 4.11. Uno spazio metrico compatto è totalmente limitato.

Lemma 4.12. *Uno spazio metrico X è totalmente limitato se e solo se ogni ultrafiltro su X è un filtro di Cauchy.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che $X \neq \emptyset$.

(1) Siano X totalmente limitato ed $\ddot{x}$ un ultrafiltro su X. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono $a_1, \ldots, a_m \in X$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (d(X, a_i) < \varepsilon) = X$. Per una nota proprietà degli ultrafiltri (Chiodera, pag. 13) esiste un i tale che $F := (d(X, a_i) < \varepsilon/2) \in \ddot{x}$.

Per $u, v \in F$ abbiamo allora

$$d(u, v) \le d(u, a_i) + d(a_i, v) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ciò mostra che $\ddot{x}$ è un filtro di Cauchy.

(2) Sia X non totalmente limitato. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che X non può essere ricoperto con un numero finito di palle aperte di raggio ε.

Ciò implica che, se per $x \in X$ poniamo $A_x := (d(X, x) \ge \varepsilon)$, allora $\alpha := \{A_x \mid x \in X\}$ è un intreccio (possiede cioè la proprietà dell'intersezione finita, cfr. Chiodera, pag. 6). Perciò esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X con $\alpha \subset \ddot{x}$. Dimostriamo che $\ddot{x}$ non è un filtro di Cauchy. Supponiamo, per assurdo, che esista $F \in \ddot{x}$ tale che $d(u, v) < \varepsilon$ per ogni $u, v \in F$.

Scegliamo un punto arbitrario $u \in F$. Abbiamo $A_u \in \ddot{x}$, quindi anche $F \cap A_u \in \ddot{x}$ e di conseguenza $F \cap A_u \neq \emptyset$. Possiamo quindi scegliere un $v \in F \cap A_u$.

Allora $u, v \in F \in \dot{x}$ e $d(u, v) \ge \varepsilon$, in contrasto con la scelta di F.

Teorema 4.13. *Uno spazio metrico X è compatto se e solo se è totalmente limitato e completo.*

Dimostrazione. (1) Sia X compatto. Allora X è totalmente limitato per l'oss. 4.11 e completo per la prop. 4.9.

(2) Sia X totalmente limitato e completo. Per il lemma 4.12 ogni ultrafiltro su X è di Cauchy e quindi converge per il lemma 4.7.

Corollario 4.14. *Uno spazio metrico completo è compatto se e solo se è totalmente limitato.*

Lemma 4.15. *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato. Allora ogni sottospazio di X è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Sia $Y \subset X$. Siano $\ddot{y}$ un ultrafiltro su Y ed $i : Y \longrightarrow X$ l'inclusione. Allora $i(\ddot{y})$ è un ultrafiltro su X (Chiodera, prop. 2.38) e quindi un filtro di Cauchy. Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $F \in i(\ddot{y})$ tale che $d(F) < \varepsilon$. Però $F \in i(\ddot{y})$ significa che $A \cap F \in \ddot{y}$ ed è chiaro che anche $d(A \cap F) < \varepsilon$. Ciò mostra che $\ddot{y}$ è di Cauchy.

Lemma 4.16. *Siano E uno spazio metrico ed X un sottoinsieme di E. Allora X è totalmente limitato se e solo se $\overline{X}$ è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Se $\overline{X}$ è totalmente limitato, lo è anche X, per il lemma 4.15.

Sia X totalmente limitato. Possiamo assumere che $X \neq \emptyset$. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono $a_1, \ldots, a_m \in X$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (d(X, a_i) < \varepsilon/2) = X$. Allora è chiaro che

$$\overline{X} \subset \bigcup_{i=1}^{m} (d(X, a_i) < \varepsilon/2) \quad \text{e quindi} \quad \bigcup_{i=1}^{m} (d(\overline{X}, a_i) < \varepsilon) = \overline{X}.$$

Definizione 4.17. Siano E uno spazio topologico ed $X \subset E$. X si dice *relativamente compatto* in E, se la chiusura $\overline{X}$ di X in E è compatta.

Proposizione 4.18. *Siano E uno spazio metrico completo ed X un sottoinsieme di E. Allora sono equivalenti:*

(1) *X è totalmente limitato.*

(2) *X è relativamente compatto in E.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Sia X totalmente limitato. Per il lemma 4.16 anche $\overline{X}$ è totalmente limitato. Per la prop. 1.13 però $\overline{X}$ è completo e quindi compatto per il teorema 4.13.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sia $\overline{X}$ compatto. Allora $\overline{X}$ è totalmente limitato e quindi lo è anche X, per il lemma 4.15.

Osservazione 4.19. Uno spazio metrico (X, d) totalmente limitato è limitato.

Dimostrazione. Per ipotesi esistono $a_1, \ldots, a_m \in X$ tali che
$\bigcup_{i=1}^{m} (d(X, a_i) < 1) = X$.

Sia $\rho := max\,\{d(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq m\}$. Per $x, y \in X$ allora esistono i, j tali che $d(x, a_i) < 1$ e $d(y, a_j) < 1$ e quindi

$$d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y) < 2 + \rho$$

Osservazione 4.20. Per un sottoinsieme $X \subset \mathbb{K}^n$ sono equivalenti:

(1) X è totalmente limitato.

(2) X è limitato.

(3) X è relativamente compatto in $\mathbb{K}^n$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Oss. 4.19.

(2) $\Rightarrow$ (3): Se X è limitato, allora $\overline{X}$ è limitato e chiuso, quindi compatto.

(3) $\Rightarrow$ (1): Prop. 4.18.

Nota 4.21. Il criterio nell'oss. 4.20 vale solo per sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$, non in uno spazio metrico completo generale. Infatti, in ogni spazio metrico (X, d) si può sostituire la metrica con $D(x, y) := \min(1, d(x, y))$ per ottenere una metrica limitata (con $D(x, y) \leq 1$ per ogni x, y) che induce la stessa topologia; cfr. Engelking, pagg. 250-251 e 269.

È chiaro che (X, D) è completo se e solo se lo è (X, d) e quindi risulterebbe che ogni spazio metrico completo è compatto.

Per esempio, se su $\mathbb{R}$ introduciamo una nuova metrica con
$D(x, y) := \min(1, |x - y|)$, allora otteniamo uno spazio metrico completo limitato omeomorfo alla retta reale euclidea e quindi non compatto.

5. Il teorema di Ascoli-Arzelà

Nota 5.1. Sia Ω uno spazio topologico non vuoto. Per un insieme di funzioni $\mathcal{F} \subset \mathbb{K}^\Omega$ ed $x \in \Omega$, $A \subset \Omega$ siano

$\mathcal{F}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$

$\mathcal{F}(A) := \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}, a \in A\}$

Scriviamo $\|\|$ invece di $\|\|_\Omega$.

Definizione 5.2. Sia (S, θ) uno spazio metrico. Un insieme di funzioni $\mathcal{F} \subset S^\Omega$ si dice

(1) *equicontinuo*, se per ogni $x \in \Omega$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $\theta(f(x), f(y)) < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $y \in U$;

(2) *limitato in ogni punto*, se l'insieme $\mathcal{F}(x)$ è limitato per ogni $x \in \Omega$.

Osservazione 5.3. Siano (S, θ) uno spazio metrico ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di S^Ω. Allora $\mathcal{F} \subset C(\Omega, S)$.

Proposizione 5.4. *Ogni sottoinsieme totalmente limitato di $C_b(\Omega, \mathbb{K})$ è equicontinuo.*

<u>Dimostrazione.</u> Sia $\mathcal{F} \subset C_b(\Omega, \mathbb{K})$ ed $\mathcal{F}$ totalmente limitato. Siano $x \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}$ tali che $\bigcup_{i=1}^{m} (\|\mathcal{F} - g_i\| < \varepsilon/3) = \mathcal{F}$. Ciò significa che per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste un i tale che $\|f - g_i\|_\Omega < \varepsilon/3$. Sia ora $U := \{y \in \Omega \mid |g_i(y) - g_i(x)| < \varepsilon/3 \text{ per ogni } i\}$.

È chiaro che U è un aperto di Ω, quindi, siccome evidentemente $x \in \Omega$, abbiamo $U \in \mathcal{U}(x)$.

Siano $y \in U$ ed $f \in \mathcal{F}$. Allora esiste un i tale che $\|f - g_i\|_\Omega < \varepsilon/3$, per cui

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - g_i(x)| + |g_i(x) - g_i(y)| + |g_i(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Osservazione 5.5. L'applicazione $\underset{f}{\bigcirc} f(x) : C_b(\Omega, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ è continua per ogni $x \in \Omega$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $x \in \Omega$. Siano $\underset{n}{\bigcirc} f_n$ una successione in $C_b(\Omega, \mathbb{K})$ ed $f \in C_b(\Omega, \mathbb{K})$ tali che $\bigcirc n \|f_n - f\| \longrightarrow 0$.

Siccome $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|$ per ogni $x \in \Omega$, è chiaro che $\underset{n}{\bigcirc} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$, cioè $\underset{n}{\bigcirc} f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Corollario 5.6. *Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme relativamente compatto di $C_b(\Omega, \mathbb{K})$. Per ogni $x \in \Omega$ allora l'insieme $\mathcal{F}(x)$ è limitato.*

<u>Dimostrazione.</u> Per ipotesi $\overline{\mathcal{F}}$ è compatto. Dall'oss. 5.5 segue che $\overline{\mathcal{F}}(x)$ è compatto e quindi un sottoinsieme limitato di $\mathbb{K}$. Perciò anche $\mathcal{F}(x)$ è limitato.

Nota 5.7. Lo spazio $\mathbb{K}^\Omega$ può essere dotato della *topologia prodotto* (detta anche topologia della *convergenza puntuale*), in cui per ogni $g \in \mathbb{K}^\Omega$ gli insiemi della forma

$$W_\varepsilon(x_1, \ldots, x_m) := \left\{h \in \mathbb{K}^\Omega \mid |h(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \text{ per } i = 1, \ldots, m\right\}$$

con $\varepsilon > 0$ ed $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$, formano una base per gli intorni di g.

Una *rete* (successione di Moore-Smith, cfr. Willard, pagg. 73-77, oppure Riviera, pagg. 1-5) $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda$ *converge* ad f nella topologia prodotto se e solo se $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda(x) \longrightarrow f(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Proposizione 5.8. *Siano $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$ ed $\widehat{\mathcal{F}}$ la chiusura di $\mathcal{F}$ nella topologia prodotto.*

Allora anche $\widehat{\mathcal{F}}$ è un insieme equicontinuo e quindi in particolare si ha $\widehat{\mathcal{F}} \subset C(\Omega, \mathbb{K})$.

Dimostrazione. Siano $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $y \in U$. Dimostriamo che $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ per ogni $g \in \widehat{\mathcal{F}}$ ed ogni $y \in U$.

Sia infatti $g \in \widehat{\mathcal{F}}$. Allora, nella notazione della nota 5.7, l'insieme $W_{\varepsilon/3}(x, y)$ è un intorno di g nella topologia prodotto, per cui esiste un $f \in \mathcal{F} \cap W_{\varepsilon/3}(x, y)$.

Ciò significa che esiste un $f \in \mathcal{F}$ tale che $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ e $|f(y) - g(y)| < \varepsilon/3$.

Ciò implica

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)| &\le |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Proposizione 5.9. *Siano Ω compatto ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$. Allora su $\mathcal{F}$ la topologia prodotto coincide con la topologia indotta dalla norma $\|\|_\Omega$.*

Dimostrazione. (1) È chiaro che la convergenza in norma implica la convergenza puntuale.

(2) Siano $f \in \mathcal{F}$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda$ una rete in $\mathbb{K}^\Omega$ che puntualmente converge ad f. Sia $\varepsilon > 0$.

Per l'ipotesi di equicontinuità, per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno $U_x \in \mathcal{U}(x)$ tale che $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/3$ per ogni $y \in U_x$ ed ogni $g \in \mathcal{F}$.

Per la compattezza di Ω esistono $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$ tali che $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m} = \Omega$. Per ogni i e per ogni $x \in U_{x_i}$ abbiamo quindi $|g(x) - g(x_i)| < \varepsilon/3$ per ogni $g \in \mathcal{F}$.

La convergenza puntuale implica che esiste un indice λ_0 tale che $|f_\lambda(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/3$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $\lambda \ge \lambda_0$.

Dimostriamo che $|f_\lambda(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in \Omega$, per ogni $\lambda \ge \lambda_0$.

Sia $x \in \Omega$. Allora esiste un i tale che $x \in U_{x_i}$. Per $\lambda \geq \lambda_0$ allora

$$\begin{aligned} |f_\lambda(x) - f(x)| &\leq |f_\lambda(x) - f_\lambda(x_i)| + |f_\lambda(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Corollario 5.10. *Siano Ω compatto ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$. Denotiamo di nuovo con $\widehat{\mathcal{F}}$ la chiusura di $\mathcal{F}$ nella topologia prodotto. Allora:*

(1) $\widehat{\mathcal{F}} \subset C(\Omega, \mathbb{K})$.

(2) $\widehat{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}$.

Qui naturalmente $\overline{\mathcal{F}}$ denota la chiusura di $\mathcal{F}$ in $C(\Omega, \mathbb{K})$.

Dimostrazione. (1) Prop. 5.8.

(2) È chiaro che $\overline{\mathcal{F}} \subset \widehat{\mathcal{F}}$.

Sia $g \in \widehat{\mathcal{F}}$. Allora esiste una rete $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda$ in $\mathcal{F}$ tale che $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda \longrightarrow g$ puntualmente. Per la prop. 5.8 però anche l'insieme $\widehat{\mathcal{F}}$ è equicontinuo, cosicché possiamo applicare la prop. 5.9 ad $\widehat{\mathcal{F}}$ e vediamo che $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda \longrightarrow g$ in $C(\Omega, \mathbb{K})$. Ciò significa $g \in \overline{\mathcal{F}}$.

Corollario 5.11. *Siano Ω compatto ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$. Allora l'applicazione $\underset{(f,x)}{\bigcirc} f(x) : \mathcal{F} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ è continua.*

La topologia considerata su $\mathcal{F}$ è la toplogia prodotto oppure, equivalentemente (per la prop. 5.9), la topologia indotta dalla norma $\|\|_\Omega$.

Dimostrazione. Siano date reti convergenti $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda \longrightarrow f$ in $\mathcal{F}$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda \longrightarrow x$ in Ω. Dobbiamo dimostrare che $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$.

Sia $\varepsilon > 0$. $\underset{\lambda}{\bigcirc} f_\lambda \longrightarrow f$ significa che esiste un λ_0 tale che $\|f_\lambda - f\| < \varepsilon/2$ per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda \longrightarrow x$ significa che esiste un λ_1 tale che $|x_\lambda - x| < \varepsilon/2$ per ogni $\lambda \geq \lambda_1$. $\mathcal{F}$ è equicontinuo, perciò esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/2$ per ogni $y \in U$ ed ogni $g \in \mathcal{F}$.

Sia $\lambda \geq \max(\lambda_0, \lambda_1)$. Allora

$$|f_\lambda(x_\lambda) - f(x)| \leq |f_\lambda(x_\lambda) - f_\lambda(x)| + |f_\lambda(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Lemma 5.12. *Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$.*

Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ ed ogni $x \in (|\mathcal{F}| \leq a)$ esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \subset (|\mathcal{F}| \leq 1 + a)$.

Dimostrazione. Siano $x \in \Omega$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che $|f(x)| \leq a$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. Siccome l'insieme $\mathcal{F}$ è equicontinuo, esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq 1$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $y \in U$.

Per ogni $y \in U$ ed ogni $f \in \mathcal{F}$ vale quindi anche

$$|f(y)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + a$$

Teorema 5.13 (Ascoli-Arzelà). *Sia Ω compatto ed $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{K})$.*

Allora sono equivalenti:

(1) *$\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $C(\Omega)$.*

(2) *$\mathcal{F}$ è equicontinuo e limitato in ogni punto.*

(3) *$\mathcal{F}$ è equicontinuo e per ogni $x \in \Omega$ l'insieme $\mathcal{F}(x)$ è relativamente compatto in $\mathbb{K}$.*

(4) *$\mathcal{F}$ è equicontinuo e l'insieme $\mathcal{F}(\Omega)$ è limitato.*

(5) *$\mathcal{F}$ è equicontinuo e limitato (come sottoinsieme di $C(\Omega, \mathbb{K})$, cioè rispetto alla norma $\|\|_\Omega$).*

Dimostrazione. La compattezza di Ω implica $C_b(\Omega, \mathbb{K}) = C(\Omega, \mathbb{K})$.

$(1) \Rightarrow (2)$: Sia $\mathcal{F}$ relativamente compatto in $C(\Omega, \mathbb{K})$. Per il cor. 5.6 l'insieme $\mathcal{F}(x)$ è limitato per ogni $x \in \Omega$. Per la prop. 4.18 $\mathcal{F}$ è totalmente limitato e quindi equicontinuo per la prop. 5.4.

$(2) \Rightarrow (3)$: Oss. 4.20.

$(3) \Rightarrow (1)$: Usiamo le notazioni del cor. 5.10. Dall'oss. 5.5 segue che per ogni $x \in \Omega$ abbiamo $\overline{\mathcal{F}}(x) \subset \overline{\mathcal{F}(x)}$. Siccome però $\overline{\mathcal{F}} \subset \prod\limits_{x \in \Omega} \overline{\mathcal{F}}(x)$, abbiamo quindi $\widehat{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \subset \prod\limits_{x \in \Omega} \overline{\mathcal{F}(x)}$.

Per ipotesi $\overline{\mathcal{F}}(x)$ è compatto per ogni $x \in \Omega$, quindi per il teorema di Tikhonov anche $\prod\limits_{x \in \Omega} \overline{\mathcal{F}(x)}$ è compatto nella topologia prodotto.

Per la prop. 4.2 $\widehat{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}$ è compatto nella topologia prodotto che, per la prop. 5.9, su $\overline{\mathcal{F}}$ coincide con la topologia indotta dalla norma.

$(4) \Leftrightarrow (2)$: Segue dal lemma 5.12 usando la compattezza di Ω.

$(4) \Leftrightarrow (5)$: Chiaro.

Osservazione 5.14. Siano Ω compatto ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme relativamente compatto di $C(\Omega, \mathbb{K})$.

Allora ogni successione in $\overline{\mathcal{F}}$ contiene una sottosuccessione convergente in $C(\Omega, \mathbb{K})$.

Dimostrazione. Ciò segue dal fatto che nello spazio metrico $C(\Omega, \mathbb{K})$ compattezza e compattezza per successioni coincidono.

Cfr. Engelking, pag. 209.

Corollario 5.15. *Siano Ω compatto e $\bigcirc_n f_n$ una successione in $C(\Omega, \mathbb{K})$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) *L'insieme $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è equicontinuo.*

(2) *Per ogni $x \in \Omega$ l'insieme $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.*

Allora la successione $\bigcirc_n f_n$ conterrà una sottosuccessione convergente in $C(\Omega, \mathbb{K})$.

Nota 5.16. Il teorema di Ascoli-Arzelà ha molte applicazioni in analisi funzionale. Una classica conseguenza del cor. 5.15 è l'esistenza di una soluzione di un'equazione differenziale $\dot{x} = f(t, x(t))$ passante per un qualsiasi punto interno $(t_0, x(0))$ di un dominio chiuso e limitato su cui la funzione f sia continua (*teorema di esistenza di Peano*); una dimostrazione si trova in Kolmogorov/Fomin, pagg 111-112, Heuser [GD], pagg. 135-138, oppure Aulbach, pagg. 52-59.

Lemma 5.17. *Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$.*

Allora l'insieme degli $x \in \Omega$, per i quali $\mathcal{F}(x)$ è limitato, è aperto e chiuso in Ω.

Dimostrazione. (1) Che è aperto segue dal lemma 5.12.

(2) $\mathcal{F}(x)$ non sia limitato. Di nuovo esiste un intorno $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $|f(y) - f(x)| \leq 1$ per ogni $y \in U$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Sia $a \in \mathbb{R}$. Siccome $\mathcal{F}(x)$ non è limitato, esiste $f \in \mathcal{F}$ con $|f(x)| \geq a$. Per ogni $y \in U$ allora

$$a \leq |f(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)| \leq 1 + |f(y)|$$

ovvero $|f(y)| \geq a - 1$. Siccome U non dipende da f o da a, vediamo che $\mathcal{F}(y)$ è non limitato per ogni $y \in U$.

Corollario 5.18. *Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $\mathbb{K}^\Omega$. Se Ω è connesso e se esiste un $x_0 \in \Omega$ per il quale $\mathcal{F}(x_0)$ è limitato, allora $\mathcal{F}(x)$ è limitato per ogni $x \in \Omega$.*

Definizione 5.19. Sia $\Omega = (\Omega, d)$ uno spazio metrico.

Un insieme di funzioni $\mathcal{F} \subset \mathbb{K}^\Omega$ si dice *uniformemente equicontinuo*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $x, y \in \Omega$ con $d(x, y) < \delta$ si abbia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

È chiaro allora che $\mathcal{F}$ è equicontinuo.

Teorema 5.20 (lemma di ricoprimento di Lebesgue). *Siano $\Omega = (\Omega, d)$ uno spazio metrico compatto ed α un ricoprimento aperto di Ω. Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \subset \Omega$ con $d(A) < \delta$ esiste $U \in \alpha$ con $A \subset U$.*

Dimostrazione. Supponiamo non sia così . Allora per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$ esiste un sottoinsieme $A_n \subset \Omega$ con $d(A_n) < 1/n$ e tale che A_n non sia contenuto in alcun elemento di α.

Scegliamo per ogni n un punto $a_n \in A$. Siccome Ω è uno spazio metrico compatto, la successione così ottenuta possiede una sottosuccessione convergente, ad esempio $\bigcirc_{n_k} a_{n_k} \longrightarrow x$ con $x \in \Omega$. Allora esiste $U \in \alpha$ tale che $x \in U$.

Siccome U è aperto esiste $\delta > 0$ tale che $(d(\Omega, x) < \delta) \subset U$. Possiamo trovare un k_0 tale che $d(a_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ per ogni $k \geq k_0$. Scegliamo $k \geq k_0$ in modo che per $m := n_k$ si abbia $1/m < \varepsilon/2$.

Dimostriamo che, in contrasto con l'ipotesi, $A_m \subset U$.

Infatti sia $a \in Am$. Allora $d(a, a_m) < 1/m$, cosicché

$$d(a, x) \leq d(a, a_m) + d(a_m, x) < 1/m + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Ma $(d(\Omega, x) < \varepsilon) \subset U$ e quindi $a \in U$.

Proposizione 5.21. *Siano $\Omega = (\Omega, d)$ uno spazio metrico compatto, (S, θ) uno spazio metrico ed $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equicontinuo di $C(\Omega, S)$. Allora $\mathcal{F}$ è uniformemente equicontinuo.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno $U_x \in \mathcal{U}(x)$ tale che $\theta(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ per ogni $f \in \mathcal{F}$, per ogni $y \in U_x$.

Per il teorema 5.20 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \in \Omega$ con $d(A) < \delta$ esiste $x \in \Omega$ con $A \subset U_x$.

Siano $y, z \in \Omega$ con $d(y, z) < \delta$. Con $A := \{y, z\}$ abbiamo $d(A) < \delta$, per cui esiste $x \in \Omega$ con $y, z \in U_x$. Ciò implica

$$\theta(f(y), f(z)) \leq \theta(f(y), f(x)) + \theta(f(x), f(z)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Corollario 5.22. *Siano $\Omega = (\Omega, d)$ uno spazio metrico compatto, (S, θ) uno spazio metrico ed $f : \Omega \longrightarrow S$ una funzione continua.*

Allora la funzione f è uniformemente continua.

Dimostrazione. La continuità di f è equivalente all'equicontinuità dell'insieme $\{f\}$ e similmente f è uniformemente continua se e solo se l'insieme $\{f\}$ è uniformemente equicontinuo. L'enunciato segue perciò dalla prop. 5.21.

Naturalmente, il corollario si può dimostrare anche direttamente.

6. Il teorema di Baire

Situazione 6.1. Sia X uno spazio topologico.

Definizione 6.2. Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice *denso* in X, se $\overline{A} = X$.

Definizione 6.3. X si dice uno *spazio di Baire*, se per ogni successione $A_1, A_2, \dots$ di aperti densi di X anche $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ è denso in X.

Osservazione 6.4. Un sottoinsieme $A \subset X$ è denso in X se e solo se per ogni aperto $U \neq \emptyset$ di X si ha $A \cap U \neq \emptyset$.

Lemma 6.5. *Siano $\dot{x}$ un filtro su X ed x tale che $\dot{x} \longrightarrow x$.*

Allora $x \in \bigcap\limits_{F \in \dot{x}} \overline{F}$.

Dimostrazione. Sia $F \in \dot{x}$. Per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ allora $U \in \dot{x}$ e quindi $F \cap U \in \dot{x}$, per cui necessariamente $F \cap U \neq \emptyset$.

Definizione 6.6. Lo spazio topologico X si dice *regolare*, se è di Hausdorff e per ogni $x \in X$ ed ogni chiuso $A \subset X$ con $x \notin A$ esistono aperti U, V di X tali che $x \in U$ e $A \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Osservazione 6.7. Se X è completamente regolare, allora X è regolare.

Dimostrazione. Assumiamo che X sia completamente regolare. Siano $x \in X$ e A un chiuso di X con $x \notin A$. Per ipotesi esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f(x) = 1$ e $(f = 0, \text{ in } A)$. Allora $U := (f > 3/4)$ e $V := (f < 1/4)$ sono aperti di X con $x \in U$, $A \in V$ e $U \cap V \neq \emptyset$.

Osservazione 6.8. Ogni spazio metrico è completamente regolare e quindi regolare.

Dimostrazione. Siano (X, d) uno spazio metrico, A un chiuso di X ed $x \in X \setminus A$. Allora $d(x, A) \neq 0$ e possiamo definire una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite $f(z) = \min\left(1, \dfrac{d(z,A)}{d(x,A)}\right)$. La funzione f è continua e si ha $(f = 0, \text{in } A)$ ed $f(x) = 1$.

Lemma 6.9. *Sia X regolare e P un aperto di X. Allora per ogni $x \in P$ esiste un aperto U tale che $x \in U \subset \overline{U} \subset P$.*

Se $P \neq \emptyset$, allora esiste in particolare un aperto $U \neq \emptyset$ tale che $\overline{U} \subset P$.

Dimostrazione. Sia $x \in P$. Allora $A := X \setminus P$ è chiuso ed $x \notin A$.

Per ipotesi esistono U, V aperti di X disgiunti tali che $x \in U$ e $A \subset V$. $A \subset V$ significa $X \setminus P \subset V$ ovvero $X \setminus V \subset P$. Però $U \cap V = \emptyset$, cosicché $U \subset X \setminus V$ e perciò $\overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset P$.

Teorema 6.10 (primo teorema di Baire). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora X è di Baire.*

Dimostrazione. Sia $A_1, A_2, \ldots$ una successione di aperti densi di X. Sia E_1 un aperto $\neq \emptyset$ di X. Dobbiamo dimostrare che $E_1 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Siccome A_1 è denso, $E_1 \cap A_1$ è un aperto non vuoto. Per il lemma 6.9 esiste un aperto $E_2 \neq \emptyset$ tale che $\overline{E_2} \subset E_1 \cap A_1$.

Possiamo assumere che $d(E_1) < 1$ e $d(E_2) < 1/2$.

Siccome A_2 è denso, $E_2 \cap A_2$ è aperto on vuoto, perciò esiste un aperto E_3 non vuoto tale che $\overline{E_3} \subset E_2 \cap A_2 \subset E_1 \cap A_1 \cap A_2$.

Possiamo assumere che $d(E_3) < 1/3$. In questo modo otteniamo una successione decrescente di aperti non vuoti $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ tali che $\overline{E_{n+1}} \subset E_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \subset E_1 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ e $d(E_n) < 1/n$.

È quindi sufficiente dimostrare che $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \neq \emptyset$.

Però la famiglia $\{E_1, E_2, \ldots\}$ è un intreccio e genera quindi un filtro $\dot{x}$ che è evidentemente di Cauchy, perciò esiste $x \in X$ tale che $\dot{x} \longrightarrow x$.

Per il lemma 6.5 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$.

Corollario 6.11. *Ogni spazio di Banach è uno spazio di Baire.*

Definizione 6.12. Per $A \subset X$ poniamo

$$\mathcal{U}(A) := \{U \subset X \mid \text{ esiste un aperto } V \text{ con } A \subset V \subset U\}$$

Gli elementi di $\mathcal{U}(A)$ sono detti intorni di A.

Lemma 6.13. *Sia A un sottoinsieme compatto di X. Allora ogni ultrafiltro su X che contiene $\mathcal{U}(A)$ converge ad un punto di A.*

Dimostrazione. Sia $\ddot{x}$ un ultrafiltro su X con $\mathcal{U}(A) \subset \ddot{x}$. Supponiamo che $\ddot{x}$ non converga ad un punto di A. Allora per ogni $a \in A$ esiste un aperto $U_a \in \mathcal{U}(a)$ con $U_a \notin \ddot{x}$.

La famiglia $\rho := \{U_a \cap A \mid a \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A che per la compattezza di A contiene un sottoricoprimento finito. Perciò esistono $a_1, \ldots, a_n \in A$ con $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap A) = A \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i} = A$.

Allora $U := \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i} \in \mathcal{U}(A)$ e per ipotesi $U \in \ddot{x}$.

Siccome $\ddot{x}$ è un ultrafiltro, uno degli U_{a_i} deve appartenere a $\ddot{x}$, una contraddizione.

Proposizione 6.14. *Sia X compatto e di Hausdorff. Allora X è regolare.*

Dimostrazione. Siano $x \in X$ ed A un chiuso di X con $x \notin A$. Assumiamo, per assurdo, che $U \cap V \neq \emptyset$ per ogni coppia di aperti U, V con $x \in U$ e $A \subset V$.

Allora $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(A)$ è un intreccio, perciò esiste un ultrafiltro $\ddot{x}$ su X tale che $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(A) \subset \ddot{x}$. Ciò implica $\ddot{x} \longrightarrow x$.

Però A è compatto, quindi per il lemma 6.13 esiste $a \in A$ con $\ddot{x} \longrightarrow a$. Siccome X è di Hausdorff, ciò implica $x = a \in A$, una contraddizione.

Definizione 6.15. Lo spazio topologico X si dice *localmente compatto*, se per ogni $x \in X$ ed ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ esiste un intorno compatto $M \in \mathcal{U}(x)$ con $M \subset U$.

Lemma 6.16. *Sia X di Hausdorff e ogni punto di X possieda un intorno compatto. Allora X è regolare.*

Dimostrazione. Siano $x \in X$ ed A un chiuso di X con $x \notin A$. Allora $X \setminus A \in \mathcal{U}(x)$. Per ipotesi esiste un intorno compatto $K \in \mathcal{U}(x)$. Siccome X è di Hausdoff, K è chiuso.

Inoltre $(X \setminus A) \cap K$ è un intorno di x in K. Per la prop. 6.14 K è regolare, perciò esiste un intorno W di x in K tale che $x \in W \subset \overline{W} \subset (X \setminus A) \cap K$, dove la chiusura $\overline{W}$ di W in K coincide con la chiusura di W in X.

Siccome $K \in \mathcal{U}(x)$, W è anche un intorno di x in X, perciò con $U := \operatorname{int} W$ abbiamo $x \in U$, mentre $\overline{U} = \overline{W} \subset X \setminus A$ implica che $A \subset X \setminus U := V$.

In questo modo abbiamo trovato due aperti U, V con $x \in U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Proposizione 6.17. *Sia X di Hausdorff. Allora sono equivalenti:*

(1) *X è localmente compatto.*

(2) *Ogni punto di X possiede un intorno compatto.*

Dimostrazione. $(1) \Rightarrow (2)$: Chiaro.

$(2) \Rightarrow (1)$: Sia $x \in X$. Per ipotesi esiste un intorno compatto $K \in \mathcal{U}(x)$.

Sia $U \in \mathcal{U}(x)$. Allora $K \cap U \in \mathcal{U}(x)$ è un intorno di x anche in K. Per il lemma 6.16 K è regolare, perciò per il lemma 6.9 esiste un intorno V di x in K con $x \in V \subset \overline{V} \subset K \cap U$, dove la chiusura $\overline{V}$ di V in K coincide con la chiusura di V in X. Siccome $K \in \mathcal{U}(x)$, V è anche un intorno di x in X, cosicché $\overline{V}$ è un intorno compatto di x in X contenuto in $K \cap U$e quindi anche in U.

Corollario 6.18. *Se X è compatto e di Hausdoff, allora X è localmente compatto.*

Osservazione 6.19. Siano X localmente compatto e di Hausdorff ed U un sottoinsieme aperto di X. Allora U è localmente compatto.

Dimostrazione. Sia $x \in U$. Allora $U \in \mathcal{U}(x)$ e per ipotesi esiste un intorno compatto M in $\mathcal{U}(x)$ con $M \subset U$. Allora M è anche un intorno compatto di x in U e dalla prop. 6.17 segue che U è localmente compatto.

Osservazione 6.20. Siano X localmente compatto e di Hausdorff ed A un sottoinsieme chiuso di X. Allora A è localmente compatto.

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Per ipotesi esiste un intorno compatto $K \in \mathcal{U}(X)$, cosicché $K \cap A$ è un intorno compatto di x in A.

Osservazione 6.21. Siano X localmente compatto e di Hausdorff ed A e B due sottoinsiemi localmente compatti di X. Allora $A \cap B$ è ancora localmente compatto.

Dimostrazione. Sia $x \in A \cap B$. Per ipotesi esistono un intorno compatto K di x in A e un intorno compatto L di x in B.

Ciò implica che esistono due intorni $U, V \in \mathcal{U}(x)$ tali che $U = U \cap A$, $L = V \cap B$. Allora $K \cap L = (U \cap V) \cap (A \cap B)$ è un intorno compatto di x in $A \cap B$.

Lemma 6.22. *Siano U un aperto di X ed $Y \subset X$.*

Allora $U \cap \overline{Y} \subset \overline{U \cap Y}$.

Dimostrazione. Siano $x \in U \cap \overline{Y}$ e $V \in \mathcal{U}(x)$. Allora $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$, per cui $(U \cap V) \cap Y = V \cap (U \cap Y) \neq \emptyset$. Ciò mostra che $x \in \overline{U \cap Y}$.

Proposizione 6.23. *Siano X localmente compatto e di Hausdorff e $Y \subset X$. Allora sono equivalenti:*

(1) *Y è localmente compatto.*

(2) *Y è aperto in $\overline{Y}$.*

(3) *Y è intersezione di un aperto e di un chiuso in X.*

Dimostrazione. $(1) \Rightarrow (2)$: Sia $y \in Y$. Per ipotesi esiste un intorno compatto K di y in Y. Ciò implica che esiste un aperto U di X con $y \in U \cap Y \subset K \subset Y$. Allora per il lemma 6.22
$U \cap \overline{Y} \subset \overline{U \cap Y} \subset \overline{K} = K \subset Y \subset \overline{Y}$. Ciò mostra che Y è aperto in $\overline{Y}$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Sia Y aperto in $\overline{Y}$. Allora esiste un aperto U di X con $Y = U \cap \overline{Y}$, perciò Y è intersezione di un aperto e di un chiuso.

$(3) \Rightarrow (1)$: Oss. 6.21.

Corollario 6.24. *Siano X localmente compatto e di Hausdorff e Y un sottoinsieme denso di X. Allora sono equivalenti:*

(1) *Y è localmente compatto.*

(2) *Y è aperto.*

Dimostrazione. $(1) \Rightarrow (2)$: Per la prop. 6.23 esistono un aperto U ed un chiuso A tali che $Y = U \cap A$. Dimostriamo che $A = X$.

Se non fosse così, $X \setminus A$ sarebbe un aperto $\neq \emptyset$, cosicché, essendo Y denso, avremmo, per l'oss. 6.4, $U \cap A \cap (X \setminus A) = Y \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, e ciò è impossibile.

Perciò $Y = U \cap X = U$ è aperto.

$(2) \Rightarrow (1)$: Oss. 6.19.

Corollario 6.25. $\mathbb{Q}$ *non è localmente compatto.*

Lemma 6.26. *Siano X localmente compatto e di Hausdorff e P un aperto $\neq \emptyset$ di X. Allora esiste un aperto $U \neq \emptyset$ tale che $\overline{U}$ sia compatto e $\overline{U} \subset P$.*

Dimostrazione. Siccome $P \neq \emptyset$, possiamo scegliere un punto $x \in P$. Per ipotesi esiste un intorno compatto K di x con $K \subset P$. Allora esiste un aperto U con $x \in U \subset K$, per cui $\overline{U} \subset \overline{K} = K \subset P$. Però $\overline{U}$ è compatto essendo sottoinsieme chiuso di un compatto.

Teorema 6.27 (secondo teorema di Baire). *Sia X localmente compatto e di Hausdorff. Allora X è di Baire.*

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è simile a quella usata nella dimostrazione del teorema 6.10.

Sia $A_1, A_2, \ldots$ una successione di insiemi aperti densi di X. Sia E_1 un aperto non vuoto di X. Dimostriamo che vale $E_1 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Siccome A_1 è denso, $E_1 \cap A_1$ è aperto e non vuoto. Per il lemma 6.26 esiste un aperto $E_2 \neq \emptyset$ tale che $\overline{E_2}$ è compatto e $\overline{E_2} \subset E_1 \cap A_1$.
Siccome A_2 è denso, anche $E_2 \cap A_2$ è aperto non vuoto, perciò esiste E_3 aperto non vuoto con $\overline{E_3}$ compatto e $\overline{E_3} \subset E_2 \cap A_2 \subset E_1 \cap A_1 \cap A_2$.
In questo modo otteniamo una successione $E_1, E_2, E_3, \ldots$ tale che $\overline{E_{n+1}}$ è compatto e $\overline{E_{n+1}} \subset E_n \cap A_n$ per ogni n e quindi $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \subset E_1 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Siccome E_1 è compatto si ha $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \neq \emptyset$.

Definizione 6.28. Un sottoinsieme Y di X si chiama un G_δ in X, se è intersezione di una famiglia numerabile di insiemi aperti.

Teorema 6.29. *Siano E uno spazio compatto e di Hausdorff ed X un G_δ in E. Allora X è uno spazio di Baire.*

Dimostrazione. Seguiamo Willard, pag 186.

Per ipotesi esistono aperti $H_1, H_2, \ldots$ di E tali che $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$.
Possiamo assumere che X sia denso in E (altrimenti sostituiamo E con $\overline{X}$).

Siano $A_1, A_2, \ldots$ aperti densi di X. Per ogni n esiste allora un aperto denso B_n di E tale che $A_n = B_n \cap X$. E è uno spazio di Baire per il teorema 6.27.

Ma $B_1, H_1, B_2, H_2, \ldots$ è una successione di aperti densi di X, per cui

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (H_n \cap B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = X \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

è denso in E e quindi anche in X.

Osservazione 6.30. Sia X localmente compatto e di Hausdorff. Allora esiste uno spazio compatto e di Hausdorff E di cui X è sottospazio aperto e denso (*compattificazione di Alexandrov*, cfr. Engelking, pagg. 169-170).

Perciò il secondo teorema di Baire può essere ottenuto anche come corollario del teorema 6.29 (in Willard questo teorema viene dimostrato sena ricorrere al teorema 6.27).

Osservazione 6.31. Sia X uno spazio metrico completo. Allora X è un G_δ nella sua compattificazione di Stone-Čech (cfr. Willard, pagg. 180-181).

Perciò anche il primo teorema di Baire può essere ottenuto come corollario del teorema 6.29. Questi risultati sono però molto meno elementari della compattificazione di Alexandrov.

Definizione 6.32. Sia $A \subset X$.

(1) A si dice *in nessuna parte denso* in X, se $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$. Scriviamo allora $A \in \mathcal{B}_0(X)$.

(2) A si dice *di prima categoria* in X (o magro in X), se A è unione di una famiglia numerabile di insiemi che sono di classe $\mathcal{B}_0$ in X. Scriviamo allora $A \in \mathcal{B}_1(X)$.

(3) A si dice *di seconda categoria* in X, se $A \notin \mathcal{B}_1(X)$. Scriviamo allora $A \in \mathcal{B}_2(X)$.

Allora quindi $\mathcal{B}_0(X) \subset \mathcal{B}_1(X)$ e $\mathcal{P}(X) = \mathcal{B}_1(X) \dot\cup \mathcal{B}_2(X)$.

Osservazione 6.33. Sia $A \in \mathcal{B}_1(X)$. Allora ogni sottoinsieme di A appartiene a $\mathcal{B}_1(X)$.

Osservazione 6.34. Siano $A_1, A_2, \ldots$ elementi di $\mathcal{B}_1(X)$.

Allora $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_1(X)$.

Osservazione 6.35. Sia $A \subset X$. Allora $A \in \mathcal{B}_0(X)$ se e solo se $X \setminus \overline{A}$ è denso in X.

<u>Dimostrazione.</u> Infatti

$$\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset \iff X \setminus \overline{X \setminus \overline{A}} = \emptyset \iff \overline{X \setminus \overline{A}} = X$$

Lemma 6.36. *Siano X uno spazio di Baire ed $M \in \mathcal{B}_1(X)$.*

Allora $\overline{X \setminus M} = X$ e quindi $\operatorname{int} M = \emptyset$.

<u>Dimostrazione.</u> Per ipotesi esistono $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathcal{B}_0(X)$ tali che $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$. Allora $X \setminus M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A) \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n})$. Per l'oss. 6.35 gli insiemi $X \setminus \overline{A_n}$ sono tutti aperti e densi e quindi, essendo X di Baire, $\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n})} = X$. Ciò implica $\overline{X \setminus M} = X$.

Infine $\operatorname{int} M = X \setminus \overline{X \setminus M} = X \setminus X = \emptyset$.

Corollario 6.37. *Siano X uno spazio di Baire ed $U \neq \emptyset$ un aperto di$X$. Allora $U \in \mathcal{B}_2(X)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $U \in \mathcal{B}_1(X)$. Allora, per il lemma 6.36, si ha che $\emptyset = \operatorname{int} U = U$, una contraddizione.

Corollario 6.38. *Sia X uno spazio di Baire $\neq \emptyset$. Allora $X \in \mathcal{B}_2(X)$.*

Osservazione 6.39. Siano $Y \subset X$ ed $A \subset Y$. Allora la chiusura di A in Y è data da $Y \cap \overline{A}$.

Dimostrazione. Ad esempio Engelking, pag. 66.

Lemma 6.40. *Siano $Y \subset X$ ed $A \subset Y$. Allora:*

(1) $A \in \mathcal{B}_0(Y) \Rightarrow A \in \mathcal{B}_0(X)$.

(2) $A \in \mathcal{B}_1(Y) \Rightarrow A \in \mathcal{B}_1(X)$.

Dimostrazione. (1) Sia $A \in \mathcal{B}_0(Y)$. Assumiamo, per assurdo, che esista un aperto $U \neq \emptyset$ di X tale che $U \subset \overline{A}$. Allora per l'oss. 6.39 $Y \cap \overline{A}$ è la chiusura di A in Y. Per ipotesi $U \cap Y \cap \overline{A} = \emptyset$, perciò $U \cap Y = \emptyset$, essendo $U \subset \overline{A}$. Ciò implica $Y \subset X \setminus U$, da cui risulta che $\overline{A} \subset \overline{Y} \subset \overline{X \setminus U} = X \setminus U$ e quindi $\overline{A} \cap U = \emptyset$, una contraddizione.

(2) Segue da (1).

Definizione 6.41. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *residuale* in X, se $X \setminus Y \in \mathcal{B}_1(X)$.

Lemma 6.42. *Sono equivalenti:*

(1) *X è uno spazio di Baire.*

(2) *Per ogni $M \in \mathcal{B}_1(X)$ vale $\overline{X \setminus M} = X$.*

(3) *Ogni sottoinsieme residuale di X è denso in X.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Lemma 6.36.

(2) $\Rightarrow$ (1): Siano $A_1, A_2, \ldots$ aperti densi in X. Sia $M := X \setminus \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$.
Allora $M \subset X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$. Per ipotesi, per ogni n si ha che $A_n = X \setminus (X \setminus A_n) = X \setminus \overline{X \setminus A_n}$ è denso in X e per l'oss. 6.35 $\overline{X \setminus A_n} \in \mathcal{B}_0(X)$. Ciò mostra $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X \setminus A_n} \in \mathcal{B}_1(X)$ e quindi per l'oss. 6.33 anche $M \in \mathcal{B}_1(X)$. Per ipotesi $\overline{X \setminus M} = X$. Ciò significa però che
$X = \overline{\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Chiaro.

Proposizione 6.43. *Siano X uno spazio di Baire ed Y un sottoinsieme residuale di X. Allora Y è uno spazio di Baire.*

Dimostrazione. Sia $M \in \mathcal{B}_1(Y)$. Per il lemma 6.42 è sufficiente dimostrare che $Y \cap \overline{Y \setminus M} = Y$, cioè che $Y \subset \overline{Y \setminus M}$. Per il lemma 6.40 però $M \in \mathcal{B}_1(X)$, mentre per ipotesi $N := X \setminus Y \in \mathcal{B}_1(X)$. Dall'oss. 6.34 segue $N \cup M \in \mathcal{B}_1(X)$ cosicché dal lemma 6.36 abbiamo

$$\overline{Y \setminus M} = \overline{(X \setminus N) \setminus M} = \overline{X \setminus (M \cup N)} = X$$

Proposizione 6.44. *Siano X uno spazio di Baire ed $Y \subset X$. Allora sono equivalenti:*

(1) *Y è residuale in X.*

(2) *Y contiene un G_δ denso in X.*

(3) *Esistono aperti densi $A_1, A_2, \ldots$ in X tali che $Y \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Sia Y residuale in X. Allora esistono $A_1, A_2, \ldots$ con $Y = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$ tali che $\operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$ per ogni n.

Sia $I := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n})$. Allora I è un G_δ in X con $I \subset Y$.

Dimostriamo che I è denso in X. Ma $X \setminus I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{B}_1(X)$ e dal lemma 6.36 segue $\overline{I} = X$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sia I un G_δ denso in X e $Y \supset I$. Allora I è della forma $I = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ con A_n aperti. Siccome I è denso, anche ogni singolo A_n è denso.

(3) $\Rightarrow$ (1): Siano $A_1, A_2, \ldots$ aperti densi in X con $Y \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Allora $X \setminus Y = X \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n$, mentre per ogni n si ha

$$\emptyset = X \setminus \overline{A_n} = X \setminus (\overline{X \setminus (X \setminus A_n)}) = \operatorname{int}(X \setminus A_n)$$

Ciò implica $X \setminus Y \in \mathcal{B}_1(X)$.

Osservazione 6.45. Proprietà che valgono per tutti i punti di un G_δ denso di X vengono spesso dette *generiche* in X.

Corollario 6.46. *Ogni G_δ denso di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire.*

Nota 6.47. Una tipica applicazione elementare del teorema di Baire è il seguente enunciato, la cui dimostrazione si trova ad esempio in Querenburg, pagg. 153-154:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e per ogni $x \in X$ esiste il limite $f(x) := \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n(x)$. Allora l'insieme C dei punti in cui la funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ così ottenuta è continua è residuale in$X$.

Se quindi X è uno spazio di Baire, per la prop. 6.44 C contiene un G_δ denso in X ed è in particolare denso in X.

Forse ancora più utile è un risultato simile che dimostreremo nella prossima proposizione.

Proposizione 6.48. *Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e C l'insieme dei* *punti in cui la f è continua. Se C è denso in X allora C è residuale in X.*

<u>Dimostrazione.</u> Per ogni $n \in \mathbb{N}+1$ e per ogni $x \in C$ esiste un intorno aperto U_n^x di x tale che $|f(y)-f(x)| < \frac{1}{n}$ per ogni $y \in U_n^x$.
Allora $U_n := \bigcup\limits_{x \in C} U_n^x$ è un aperto con $C \subset U_n$.

Siccome C è denso, si ha $\overline{U_n} = X$ e quindi $\operatorname{int}(X \setminus U_n) = X \setminus \overline{U_n} = \emptyset$. Perciò $X \setminus U_n \in \mathcal{B}_0(X)$, per cui $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n) \in \mathcal{B}_1(X)$.

Se invece $x_0 \in C$, allora esiste un $n \in \mathbb{N}+1$ tale che ogni intorno di x_0 contiene un punto z con $|f(x_0)-f(z)| \geq \frac{1}{n}$ e quindi $x_0 \notin U_{2n}$.

Ciò implica $X \setminus C \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n)$ e vediamo che $X \setminus C \in \mathcal{B}_1(X)$.

Corollario 6.49. *Non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in ogni punto di $\mathbb{Q}$ e discontinua in ogni altro punto.*

Lemma 6.50. *Siano X uno spazio vettoriale normato e W un sottospazio vettoriale di X. Allora:*

(1) ***Se** $\dim W < \infty$**, allora** W **è chiuso in** X.*

(2) ***Se** $W \neq X$**, allora** $\operatorname{int} W = \emptyset$.*

<u>Dimostrazione.</u> (1) Scelta una base $e_1, \ldots, e_n$ di W, si dimostra che W è completo allo stesso modo in cui si dimostra che $\mathbb{K}^n$ è completo. Per la prop. 1.13 W è chiuso in V.

(2) Sia $x \in \operatorname{int} W$. Ciò significa che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(\|V - x\| < \varepsilon) \subset W$. In particolare $x \in W$.

Per ipotesi esiste $v \in V \setminus W_0$. Allora $v \neq 0$ e con $\lambda := \frac{\varepsilon}{2\|v\|}$ e $y := x + \lambda v$ abbiamo $\|y - x\| = \|\lambda v\| = \frac{\varepsilon}{2}$, per cui $y \in W$. Perciò $\lambda v \in W$ e quindi $v = \frac{1}{\lambda}\lambda v \in W$, una contraddizione.

Proposizione 6.51. *Sia X uno spazio di Banach. Allora non esiste una base E di X con $|E| = |\mathbb{N}|$.*

<u>Dimostrazione.</u> L'enunciato è sicuramente vero se $\dim X < \infty$. Siano quindi $\dim X = \infty$ ed $e_1, e_2, \ldots$ un base numerabile di X.

Per ogni n sia $V_n := SV(e_1, \ldots, e_n)$. Per il lemma 6.50 ogni V_n è chiuso in X e inoltre $\operatorname{int} \overline{V_n} = \operatorname{int} V_n = \emptyset$. D'altra parte $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, per cui $X \in \mathcal{B}_1(X)$, in contrasto con il cor. 6.38.

7. Il teorema di Hahn-Banach

Situazione 7.1. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Allora X è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e un'applicazione $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dirà lineare se è $\mathbb{R}$-lineare.

Nella prima parte del capitolo seguiamo Hirzebruch/Scharlau, pagg. 29-34.

Definizione 7.2. Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice

(1) *convessa*, se per ogni $x, y \in X$ ed ogni $t \in [0, 1]$ vale

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

(2) *sublineare*, se per ogni $x, y \in X$ ed ogni $s, t \geq 0$ vale

$$f(tx + sy) \leq tf(x) + sf(y)$$

(3) *subadditiva*, se per ogni $x, y \in X$ vale

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

(4) *positivamente omogenea*, se per ogni $x \in X$ ed ogni $t \geq 0$ vale

$$f(tx) = tf(x)$$

Lemma 7.3. *Per una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sono equivalenti:*

(1) *f è sublineare.*

(2) *f è convessa e positivamente omogenea.*

(3) *f è subadditiva e positivamente omogenea.*

Dimostrazione. $(1) \Rightarrow (2)$: Sia f sublineare. È chiaro che f è convessa. Dimostriamo che f è positivamente omogenea. Siano $x \in X$ e $t \geq 0$. Allora

$$f(tx) = f(tx + 0 \cdot 0) \leq tf(x) + 0f(0) = tf(x)$$

In particolare abbiamo

$$f(0) = f(0 \cdot 0) \leq 0 \cdot f(0) = 0$$

D'altra parte però

$$f(0) = f(0 + 0) \leq f(0) + f(0)$$

per cui $0 =\leq f(0)$ e vediamo che

$f(0) = 0$ e quindi anche $f(0 \cdot x) = 0f(x)$.

Supponiamo ora $t > 0$. La sublinearità di f implica in particolare che

$f(tx) \leq tf(x)$ per ogni x e quindi $tf(x) = tf(\frac{t}{t}x) \leq t\frac{1}{t}f(tx) = f(tx)$.

Vediamo così che $f(tx) = tf(x)$ anche per $t > 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Chiaro.

$(3) \Rightarrow (1)$: Siano $x, y \in X$, $t \in [0, 1]$ ed f sia subadditiva e positivamente omogenea. Allora

$f(tx + (1-t)y) \leq f(tx) + f((1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$

Osservazione 7.4. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sublineare. Allora $f(0) = 0$.

Dimostrazione. Per il lemma 7.3 f è positivamente omogenea. Perciò $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.

Oppure si riutilizzi la dimostrazione del lemma 7.3.

Esempio 7.5. (1) Ogni seminorma è sublineare.

(2) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f è positivamente omogenea, allora per $t \geq 0$ si ha $f(t) = f(t \cdot 1) = tf(1)$, mentre per $t \leq 0$ vale $f(t) = f((-t)(-1)) = (-t)f(-1)$.

Le funzioni sublineari $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono quindi esattamente le funzioni convesse $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il cui grafico risulta composto di due semirette che si intersecano nell'origine. Una tale funzione è una seminorma se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Definizione 7.6. Denotiamo con $\mathrm{Sub}\, X$ l'insieme delle funzioni sublineari da $X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Come sottoinsieme dell'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{R}^X, \leq)$ l'insieme $(\mathrm{Sub}\, X, \leq)$ è a sua volta parzialmente ordinato.

Lemma 7.7. *Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ subadditiva e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \leq g$. Allora $f(x) \geq f(0) - g(-x)$ per ogni $x \in X$.*

Se f è sublineare si ha quindi $f(x) \geq -g(-x)$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Sia $x \in X$. Per ipotesi

$f(0) = f(x - x) \leq f(x) + f(-x) \leq f(x) + g(-x)$

e quindi $f(x) \geq f(0) - g(-x)$.

Lemma 7.8. *Siano $\mathcal{F}$ una catena non vuota di $\mathrm{Sub}\, X$ ed $h := \inf \mathcal{F}$.*

(1) *Sia g un elemento arbitrario di $\mathcal{F}$. Allora*

$$f(x) \geq \min(g(x), -g(-x))$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $x \in X$.

h è quindi una ben definita funzione da $X \longrightarrow \mathbb{R}$.

(2) *h è sublineare.*

(3) *$h \leq f$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. (1) Siano $x \in X$ ed $f \in \mathcal{F}$.

Se $f(x) \geq g(x)$, l'enunciato del punto (1) è verificato.

Altrimenti $f \leq g$ perché $\mathcal{F}$ è una catena. Dal lemma 7.7 segue allora che $f(x) \geq -g(-x)$.

(2) È chiaro che h è positivamente omogenea. Dimostriamo la subadditività . Siano $x, y \in X$. Assumiamo, per assurdo, che esista un $\varepsilon > 0$ tale che $h(x + y) > h(x) + h(y) + \varepsilon$.

Per ipotesi esistono $f, g \in \mathcal{F}$ tali che $f(x) \leq h(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $g(y) \leq h(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Siccome $\mathcal{F}$ è una catena si ha, ad esempio, $f \leq g$ e quindi anche $f(y) \leq h(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ciò implica

$$\begin{aligned} h(x+y) \leq f(x+y) \leq f(x) + f(y) \leq h(x) + \frac{\varepsilon}{2} + h(y) + \frac{\varepsilon}{2} \\ = h(x) + h(y) + \varepsilon < h(x+y). \end{aligned}$$

e ciò è impossibile.

(3) Chiaro.

Osservazione 7.9. Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ subadditiva ed $x, y \in X$. Allora

$$-f(-x) \leq f(x+y) - f(y) \leq f(x)$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$f(y) = f(x + y - x) \leq f(x+y) + f(-x)$$

e $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, per cui $-f(-x) \leq f(x+y) - f(y) \leq f(x)$.

Proposizione 7.10. *Gli elementi minimali di* $\operatorname{Sub} X$ *coincidono con le applicazioni lineari* $X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dimostrazione. (1) Siano $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare ed $f \in \operatorname{Sub} X$ tale che $f \leq g$. Dal lemma 7.7 segue che $f(x) \geq -g(-x) = g(x)$ per ogni $x \in X$, cioè $f \geq g$, e ciò implica $f = g$.

(2) Sia g un elemento minimale di $\operatorname{Sub} X$. È sufficiente dimostrare che $g(x+y) = g(x) + g(y)$ per ogni $x, y \in X$, perché allora per ogni $t < 0$ si ha $g(tx) = g(0) - g(-tx) \overset{7.4}{=} g(-tx) = tg(x)$.

(A) Sia $y \in X$ fissato. Allora definiamo $g_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$g_y(x) := \inf\{g(x + \lambda y) - \lambda g(y) \mid \lambda \geq 0\} \qquad (*)$$

L'applicazione g_y è ben definita, perché per ogni $x \in X$ ed ogni $\lambda \geq 0$ per l'oss. 7.9 si ha

$$-g(-x) \leq g(x + \lambda y) - g(\lambda y) = g(x + \lambda y) - \lambda g(y) \leq g(x)$$

Questa relazione mostra inoltre che $g_y \leq g$.

(B) Assumiamo di essere in grado di dimostrare che g_y è sublineare per ogni $y \in Y$. Per la minimalità di g allora $g_y = g$ e ciò implica, con $\lambda = 1$ in (*), che $g(x+y) - g(y) \geq g(x)$ ovvero $g(x) + g(y) \leq g(x+y)$.

La subadditività di g implica allora $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

(C) Rimane quindi da dimostrare che g_y è sublineare. Dalla (*) segue $g_y(0) = 0$ usando l'omogeneità positiva di g. Sia $t > 0$. Allora

$$\begin{aligned} g_y(tx) &= \inf\{g(tx + \lambda y) - \lambda g(y) \mid \lambda \geq 0\} \\ &= \inf\left\{tg\left(x + \frac{\lambda}{t}y\right) - \lambda g(y) \mid \lambda \geq 0\right\} \\ &= \inf\left\{t\left[g\left(x + \frac{\lambda}{t}y\right) - \frac{\lambda}{t}g(y)\right] \mid \lambda \geq 0\right\} \\ &= \inf\{t\,[g(x + \lambda y) - \lambda g(y)] \mid \lambda \geq 0\} = tg_y(x) \end{aligned}$$

Dobbiamo ancora dimostrare la subadditività di g_y. Siano $x_1, x_2 \in X$ ed $\varepsilon > 0$. Allora esistono $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tali che

$$g(x_1 + \lambda_1 y) - \lambda_1 g(y) \leq g_y(x_1) + \varepsilon$$

$$g(x_2 + \lambda_2 y) - \lambda_2 g(y) \leq g_y(x_2) + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} g_y(x_1 + x_2) &\leq g(x_1 + x_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)y) - (\lambda_1 + \lambda_2)g(y) \\ &\leq g(x_1 + \lambda_1 y) - \lambda_1 g(y) + g(x_2 + \lambda_2 y) - \lambda_2 g(y) \\ &\leq g_y(x_1) + \varepsilon + g_y(x_2) + \varepsilon = g_y(x_1) + g_y(x_2) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Siccome ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, vediamo che

$$g_y(x_1 + x_2) \leq g_y(x_1) + g_y(x_2)$$

Teorema 7.11 (Hahn-Banach). *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sublineare. Allora esiste una funzione lineare $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\alpha \leq f$.*

Dimostrazione. Per il lemma 7.8 possiamo applicare il lemma di Zorn a $\operatorname{Sub} X$. Perciò esiste un elemento minimale α di $\operatorname{Sub} X$ con $\alpha \leq f$. Per la prop. 7.10 α è lineare.

Osservazione 7.12. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in X$ ed ogni $t > 0$ valga $f(tx) = tf(x)$. Allora f è positivamente omogenea.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $f(0) = 0$.

L'ipotesi implica però che $f(0) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{1}{2} f(0)$ e ciò è possibile solo se $f(0) = 0$.

Osservazione 7.13. La prop. 7.10 implica in particolare che se per due applicazioni lineari $\alpha, \beta : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si ha $\alpha \leq \beta$, allora $\alpha = \beta$.

Proposizione 7.14. *Siano $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione sublineare. Siano Y un sottospazio vettoriale di X ed $\alpha_0 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare con $(\alpha_0 \leq f, \operatorname{in} Y)$.*

Allora esiste una funzione lineare $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(\alpha = \alpha_0, \operatorname{in} Y)$ ed $\alpha \leq f$.

Dimostrazione. Definiamo $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$g(x) := \inf \{ f(x - y) + \alpha_0(y) \mid y \in Y \}$$

per ogni $x \in X$.

(1) Assumiamo di aver dimostrato che g è ben definita e sublineare. Per il teorema 7.11 allora esiste una funzione lineare $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\alpha \leq g$. Per $x \in X$ allora

$$g(x) \leq f(x - 0) + \alpha_0(0) = f(x)$$

per cui $\alpha \leq g \leq f$. Inoltre per $y \in Y$ abbiamo

$$g(y) \leq f(y - y) + \alpha_0(y) \overset{7.12}{=} \alpha_0(y)$$

e quindi $\alpha \leq g \leq \alpha_0$.

Per ipotesi g è sublineare su X e quindi anche su Y e siccome α_0 è lineare da $(g \le \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$ dalla prop. 7.10 segue che $(g = \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$.

Ciò implica adesso che $(\alpha \le g = \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$, e ciò, per l'oss. 7.13, è possibile solo se $(\alpha = \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$.

(2) Dimostriamo che l'applicazione g è ben definita, cioè che $g(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$.

Per $y \in Y$ abbiamo però

$$\begin{aligned} f(x-y) + \alpha_0(y) &\ge f(x-y-x) - f(-x) + \alpha_0(y) \\ &= f(-y) - f(-x) + \alpha_0(y) \\ &= f(-y) - \alpha_0(-y) - f(-x) \ge -f(-x) \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato l'ipotesi $(\alpha_0 \le f, \mathrm{in}\, Y)$.

(3) Dimostriamo che g è positivamente omogenea.

Per $t > 0$ e $x \in X$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(tx) &= \inf \{ f(tx - y) + \alpha_0(y) \mid y \in Y \} \\ &= \inf \{ f(t(x-y)) + \alpha_0(ty) \mid y \in Y \} \\ &= \inf \{ t[f(x-y) + \alpha_0(y)] \mid y \in Y \} = tg(x) \end{aligned}$$

(4) Dimostriamo che g è subadditiva. Per $x_1, x_2 \in X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esistono $y_1, y_2 \in Y$ tali che

$g(x_1) \ge f(x_1 - y_1) + \alpha_0(y_1) - \varepsilon$

$g(x_2) \ge f(x_2 - y_2) + \alpha_0(y_2) - \varepsilon$

e quindi

$$\begin{aligned} g(x_1) + g(x_2) &\ge f(x_1 - y_1) + \alpha_0(y_1) - \varepsilon + f(x_2 - y_2) + \alpha_0(y_2) - \varepsilon \\ &\ge f(x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)) + \alpha_0(y_1 + y_2) - 2\varepsilon \\ &\ge g(x_1 + x_2) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Siccome ε è arbitrario, ciò mostra che $g(x_1) + g(x_2) \ge g(x_1 + x_2)$.

Osservazione 7.15. Siano $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ed $\alpha := X \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare. Allora per ogni $x \in X$ si ha $\operatorname{Im} \alpha(x) = -\operatorname{Re} \alpha(ix)$.

Se perciò β è un'altra applicazione lineare $X \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta$, allora $\alpha = \beta$.

Dimostrazione. Sia $\alpha := u + iv$ con $u = \operatorname{Re} \alpha$, $v = \operatorname{Im} \alpha$. Per $x \in X$ allora

$\alpha(ix) = i\alpha(x) = iu(x) - v(x)$, però anche

$\alpha(ix) = u(ix) + iv(ix)$. Ciò implica $u(x) = v(ix)$ e $v(x) = -u(ix)$ e quindi $\operatorname{Im} \alpha(x) = -\operatorname{Re} \alpha(ix)$.

Proposizione 7.16. *Siano $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma, Y un sottospazio vettoriale di X ed $\alpha_0 : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ un'applicazione lineare con* $(|\alpha_0| \le p, \mathrm{in}\, Y)$.

Allora esiste un'applicazione lineare $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{K}$ con $(\alpha = \alpha_0,$ in $Y)$ e $|\alpha| \le p$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Siccome una seminorma è sublineare e l'ipotesi $(|\alpha_0| \le p, \mathrm{in}\, Y)$ implica che anche $(\alpha_0 \le p, \mathrm{in}\, Y)$, possiamo applicare la prop. 7.14.

Perciò esiste un'applicazione lineare $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(\alpha = \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$ ed $\alpha \le p$.

Dobbiamo solo dimostrare che $|\alpha| \le p$.

Per $x \in X$ però $-\alpha(x) = \alpha(-x) \le p(-x) = p(x)$.

(2) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Allora l'applicazione $\mathrm{Re}\, \alpha_0 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$-lineare e $(|\mathrm{Re}\, \alpha_0| \le |\alpha_0| \le p, \mathrm{in}\, Y)$. Per il punto (1) esiste quindi un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $\beta : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(\beta = \mathrm{Re}\, \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$ e $|\beta| \le p$.

Definiamo $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tramite $\alpha(x) := \beta(x) - i\beta(ix)$.

(A) Dimostriamo che α è $\mathbb{C}$-lineare. È chiaro che α è additiva.

Siano $x \in X$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
\alpha((a+ib)x) &= \beta((a+ib)x) - i\beta((ia+b)x) \\
&= \beta(ax + bix) - i\beta(aix - bx) \\
&= a\beta(x) + b\beta(ix) - ia\beta(ix) + ib\beta(x) \\
&= a[\beta(x) - i\beta(ix)] + ib[-i\beta(ix) + \beta(x)] \\
&= (a+ib)(\beta(x) - i\beta(ix)) \\
&= (a+ib)\alpha(x)
\end{aligned}$$

(B) Per definizione per $y \in Y$ si ha $\mathrm{Re}\, \alpha(y) = \beta(y) = \mathrm{Re}\, \alpha_0(y)$ e dall'oss. 7.15 segue che $(\alpha = \alpha_0, \mathrm{in}\, Y)$.

(C) Sia $x \in X$. Allora $\alpha(x) = |\alpha(x)|\, e^{i\varphi}$ per qualche $\varphi \in \mathbb{R}$, per cui

$$\begin{aligned}
|\alpha(x)| &= \alpha(x)e^{-i\varphi} = \alpha(e^{-i\varphi}x) \\
&= \beta(e^{-i\varphi}x) \le p(e^{-i\varphi}x) = \left|e^{-i\varphi}\right| p(x) = p(x)
\end{aligned}$$

Nota 7.17. Se X ed Y sono spazi vettoriali topologici (ad esempio spazi vettoriali normati) su $\mathbb{K}$, con $\mathcal{L}(X, Y)$ denotiamo l'insieme delle applicazioni lineari continue $X \longrightarrow Y$.

È chiaro che $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.

Lo spazio $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ si chiama *spazio duale* di X.

Se X ed Y sono spazi vettoriali normati, per un'applicazione lineare $\varphi : X \longrightarrow Y$ possiamo definire $\|\varphi\| := \sup\{\|\varphi x\| \mid x \in (\|X\| = 1)\}$.

Si dimostra facilmente che φ è continua se e solo se $\|\varphi\| < \infty$. In tal caso si ha $\|\varphi x\| \le \|\varphi\|\|x\|$ per ogni $x \in X$.

$\mathcal{L}(X, Y)$ con $\|\|$ diventa uno spazio vettoriale normato che è uno spazio di Banach, se Y è uno spazio di Banach.

In particolare il duale X' è uno spazio di Banach per ogni spazio vettoriale normato X.

Corollario 7.18. *Siano X uno spazio vettoriale normato, Y un sottospazio vettoriale di X ed $\alpha_0 \in Y'$. Allora esiste $\alpha \in X'$ tale che $(\alpha = \alpha_0, \text{in}\, Y)$ e $\|\alpha\| = \|\alpha_0\|$.*

Dimostrazione. Per $x \in X$ sia $p(x) := \|x\|\|\alpha_0\|$. Per $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora

$$p(x+y) = \|x+y\|\|\alpha_0\| \leq \|x\|\|\alpha_0\| + \|y\|\|\alpha_0\| \leq p(x) + p(y)$$

$$p(\lambda x) = \|\lambda x\|\|\alpha_0\| = |\lambda|\,\|x\|\|\alpha_0\| = \lambda p(x)$$

Ciò mostra che p è una seminorma. Per ogni $y \in Y$ inoltre

$$|\alpha_0(y)| \leq \|y\|\|\alpha_0\| = p(y)$$

Per la prop. 7.16 esiste un'applicazione lineare $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{K}$ con $(\alpha = \alpha_0, \text{in}\, Y)$ e $|\alpha| \leq p$.

L'ultima disuguaglianza implica che per ogni $x \in X$ si ha $|\alpha(x)| \leq \|x\|\|\alpha_0\|$, per cui $\|\alpha\| \leq \|\alpha_0\|$. Ciò mostra che $\alpha \in X'$. Siccome però chiaramente $\|\alpha_0\| \leq \|\alpha\|$, necessariamente $\|\alpha\| = \|\alpha_0\|$.

Proposizione 7.19. *Sia X uno spazio vettoriale normato. Allora:*

(1) *Per ogni $x \in X \setminus 0$ esiste $\alpha \in X'$ tale che $\alpha(x) = \|x\|$ ed $\|\alpha\| = 1$.*

(2) *Per ogni $x \in X \setminus 0$ esiste $\alpha \in X'$ tale che $\alpha(x) \neq 0$.*

(3) *X' separa i punti di X.*

(4) *Se $X \neq 0$, allora anche $X' \neq 0$.*

Dimostrazione. (1): Siano $x \in X \setminus 0$ ed $Y := \mathbb{K}x$ la retta generata da x. Per $y = tx$ definiamo $\alpha_0(y) := t\|x\|$. Allora α_0 è un ben definito elemento di Y'. Per il cor. 7.18 esiste $\alpha \in X'$ tale che $\alpha(x) = \alpha_0(x) = 1$ e in più $\|\alpha\| = \|\alpha_0\|$.

Per $\|tx\| = 1$ inoltre $|\alpha_0(tx)| = |t|\,\|x\| = \|tx\| = 1$, per cui $\|\alpha_0\| = 1$.

(2): Chiaro.

(3): Siano $x, y \in X$ ed $x \neq y$. Per il punto (1) esiste $\alpha \in X'$ con $\alpha(x) - \alpha(y) = \alpha(x-y) \neq 0$ e ciò implica $\alpha(x) \neq \alpha(y)$.

(4): Da (2).

Osservazione 7.20. Siano X, Y spazi vettoriali normati, entrambi non nulli. Allora $\mathcal{L}(X,Y) \neq 0$.

Dimostrazione. $X \neq 0$ vuol dire che esiste $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Per la prop. 7.19 esiste $\alpha \in X'$ tale che $\alpha_0(x_0) \neq 0$. Scelto $y_0 \in Y \setminus 0$, definiamo $\varphi := X \longrightarrow Y$ con $\varphi(x) := \alpha(x)y_0$. Allora $\varphi \in \mathcal{L}(X,Y) \setminus 0$.

Corollario 7.21. *Sia X uno spazio vettoriale normato $\neq 0$. Allora per ogni $x \in X$ vale*

$$\|x\| = \max\{|\alpha(x)| \mid \alpha \in (\|X'\| = 1)\}$$

Dimostrazione. Per $x = 0$ abbiamo solo bisogno dell'esistenza di $\alpha \in X$ con $\|\alpha\| = 1$, ma ciò segue dalla prop. 7.19.

Per $x \neq 0$ dalla stessa proposizione segue l'esistenza di $\alpha \in (\|X'\| = 1)$ con $\alpha(x) = \|x\|$ e quindi anche $|\alpha(x)| = \|x\|$.

Viceversa per ogni $\beta \in (\|X'\| = 1)$ vale $|\beta(x)| \leq \|\beta\|\|x\| = \|x\|$.

Lemma 7.22. *Sia X uno spazio vettoriale normato $\neq 0$. Per $x \in X$ sia $j(x) := \bigcirc_{\alpha} \alpha(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K}$. Allora $j(x) \in X''$.*

Dimostrazione. È chiaro che j è lineare.

Dimostriamo la continuità . Per $\alpha \in X'$ vale $\|j(x)(\alpha)\| = \|\alpha(x)\| \leq \|\alpha\|\|x\|$ e ciò implica $\|j(x)\| \leq \|x\| < \infty$.

Definizione 7.23. Per uno spazio vettoriale normato X sia $j := \bigcirc_{x} \bigcirc_{\alpha} \alpha(x) : X \longrightarrow X''$.

Quest'applicazione è ben definita per il lemma 7.22 ed è detta *immersione canonica* di X in X''.

Definizione 7.24. Un'applicazione $\varphi : X \longrightarrow Y$ tra spazi metrici si dice un'*isometria*, se per ogni $x, y \in X$ si ha $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$.

È chiaro allora che φ è iniettiva; non chiediamo invece la suriettività .

Osservazione 7.25. Un'applicazione lineare $\varphi : X \longrightarrow Y$ tra spazi vettoriali normati è un'isometria se e solo se $\|\varphi x\| = \|x\|$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$.

(1) Se φ è un'isometria allora

$\|\varphi x\| = \|\varphi(x - 0)\| = \|\varphi x - \varphi 0\| = \|x - 0\| = \|x\|$.

(2) Se la condizione è soddisfatta, allora

$\|\varphi x - \varphi y\| = \|\varphi(x - y)\| = \|(x - y)\|$.

Proposizione 7.26. *Sia X uno spazio vettoriale normato. Allora l'applicazione $j : X \longrightarrow X''$ è lineare e isometrica.*

Dimostrazione. (1) È chiaro che j è lineare.

(2) Sia $x \in X$. Nella dimostrazione del lemma 7.22 abbiamo visto che $\|j(x)\| \leq \|x\|$, quindi è sufficiente dimostrare che $\|j(x)\| \geq \|x\|$. Ciò è banale per $x = 0$; sia quindi $x \neq 0$.

Per la prop. 7.19 esiste $\alpha \in X'$ tale che $\|\alpha\| = 1$ e $\alpha(x) = \|x\|$. Ma allora, per la definizione della norma su X'', si ha $\|j(x)\| \geq \|j(x)(\alpha)\| = \|\alpha(x)\| = \|x\|$.

Definizione 7.27. Uno spazio vettoriale normato X si dice *riflessivo*, se l'applicazione $j : X \longrightarrow X''$ è biiettiva.

Per la nota 7.17, X è allora uno spazio di Banach.

Proposizione 7.28. *Siano X uno spazio vettoriale normato, Y un sottospazio vettoriale di X ed $x \in X$ tale che $x \notin \overline{Y}$. Allora esiste $\alpha \in X'$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) $(\alpha = 0, \text{in}\, Y)$.

(2) $\alpha(x) = d(x, Y)$.

(3) $\|\alpha\| = 1$.

Dimostrazione. Seguiamo Heuser [FA], pagg. 232-233.

Poniamo $\rho := d(x, Y)$. Sia $W := SV(x, Y)$. Gli elementi di W sono i vettori della forma $v = tx + y$ con $t \in \mathbb{K}$ e $y \in Y$ univocamente determinati.

L'applicazione $\alpha_0 : W \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da $\alpha_0(tx + y) := t\rho$ è evidentemente lineare, inoltre $(\alpha_0 = 0, \text{ in } Y)$ ed $\alpha_0(x) = \rho$.

Dobbiamo dimostrare che $\|\alpha_0\| = 1$; allora $\alpha_0 \in W'$ e possiamo trovare α applicando il cor. 7.18.

(A) Siano $t \in \mathbb{K}$ e $y \in Y$. Allora

$$|\alpha_0(tx + y)| = |t\rho| = |t|\,\rho \leq |t| \left\| x - \frac{-y}{t} \right\| = \|tx + y\|$$

e ciò mostra $\|\alpha_0\| \leq 1$.

(B) Sia $\varepsilon > 0$. Allora possiamo trovare un $y \in Y$ tale che $0 < \rho \leq \|x - y\| < \rho + \varepsilon$.

Per $w := \dfrac{x - y}{\|x - y\|}$ allora $w \in W$ e $\|\alpha_0\| \geq |\alpha(w)| = \dfrac{\rho}{\|x - y\|} > \dfrac{\rho}{\rho + \varepsilon}$. Per $\varepsilon \to 0$ vediamo che necessariamente $\|\alpha_0\| = 1$.

Definizione 7.29. Uno spazio topologico si dice *separabile*, se contiene un sottoinsieme numerabile (cioè di una cardinalità $\leq |\mathbb{N}|$) denso.

Osservazione 7.30. Un sottoinsieme di uno spazio topologico separabile non è necessariamente separabile (Willard, pag. 109).

Un sottoinsieme di uno spazio metrico separabile è invece ancora separabile: ciò segue ad esempio da Willard, pag. 166, oppure Engelking, pag. 216.

Una dimostrazione diretta si trova in Alt, pag. 114.

Lemma 7.31. (1) *Siano X uno spazio topologico ed A un sottoinsieme di X. Se A è separabile, anche $\overline{A}$ è separabile.*

(2) *Siano X uno spazio vettoriale normato ed E un sottoinsieme separabile (ad esempio numerabile) di X. Allora $SV(E)$ è separabile.*

Dimostrazione. Alt, pag. 114.

Proposizione 7.32. *Sia X uno spazio vettoriale normato il cui duale X' è separabile. Allora X stesso è separabile.*

Dimostrazione. Per l'oss. 7.30 l'insieme $(\|X'\| = 1)$ è separabile. Sia E un sottoinsieme denso di $(\|X'\| = 1)$. Per ogni $\beta \in E$ possiamo trovare un $x_\beta \in X$ con $\|x_\beta\| = 1$ e $|\beta(x_\beta)| \geq 1/2$.

Per il lemma 7.31 è sufficiente dimostrare che $\overline{SV(E)} = X$.

Sia $Y := \overline{SV(E)}$. Allora Y è un sottospazio vettoriale chiuso di X. Assumiamo per assurdo che $Y \neq X$. Allora esiste $x \in X \setminus Y$ e quindi $d(x, Y) > 0$ perché Y è chiuso. Per la prop. 7.28 esiste $\alpha \in (\|X'\| = 1)$ tale che $(\alpha = 0, \text{ in } Y)$ e quindi in particolare $\alpha(x_\beta) = 0$ per ogni $\beta \in E$, cosicché

$$\frac{1}{2} \leq |\beta(x_\beta)| = |\beta(x_\beta) - \alpha(x_\beta)| = |(\beta - \alpha)(x_\beta)| \leq \|\beta - \alpha\|$$

per ogni $\beta \in E$.

Ma ciò è in contrasto con l'ipotesi che E sia denso in $(\|X'\| = 1)$.

Osservazione 7.33. La prop. 7.28 viene spesso usato (come abbiamo fatto nella prop. 7.32) per dimostrare che un sottospazio vettoriale Y di uno spazio vettoriale normato X è denso in X: altrimenti esiste $x \in X$ con $d(x, Y) > 0$, per cui si può trovare un $\alpha \in X'$ come nella prop. 7.28 e da cui deriva, quando la tecnica ha successo, una contraddizione.

Questa idea è contenuta anche nella prop. 7.35.

Osservazione 7.34. Siano X uno spazio vettoriale normato, Y un sottospazio vettoriale denso di X ed $\alpha_0 \in Y'$. Allora esiste un unico $\alpha \in X'$ tale che $(\alpha = \alpha_0, \text{ in } Y)$.

<u>Dimostrazione.</u> L'unicità è evidente. Sia $x \in X$. Allora esiste una successione $\underset{n}{\bigcirc} y_n$ in Y con $\underset{n}{\bigcirc} y_n \longrightarrow x$. Siccome un'applicazione lineare continua è uniformemente continua, la successione $\underset{n}{\bigcirc} \alpha_0(y_n)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{K}$. Perciò esiste $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_0(y_n) =: \alpha(x)$. Adesso è chiaro che in questo modo otteniamo un elemento $\alpha \in X'$ tale che $(\alpha = \alpha_0, \text{ in } Y)$.

Proposizione 7.35. *Siano X uno spazio vettoriale normato ed Y un sottospazio di X. Allora sono equivalenti:*

(1) *Y è denso in X.*

(2) *Se $\alpha \in X'$ è tale che $(\alpha = 0, \text{in}\, Y)$, allora $\alpha = 0$.*

<u>Dimostrazione.</u> $(1) \Rightarrow (2)$: Chiaro.

$(2) \Rightarrow (1)$: Sia $\overline{Y} \neq X$. Allora esiste $x \in X$ tale che $\rho := d(x, Y) > 0$, quindi per la prop. 7.28 esiste $\alpha \in X'$ con $(\alpha = 0, \text{ in } Y)$ ed $\alpha(x) = \rho$. Ciò è in contrasto con l'ipotesi.

Proposizione 7.36. *Sia X uno spazio vettoriale normato ed I un insieme di indici. Per ogni $i \in I$ sia dato un punto $x_i \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) *Per ogni $i \in I$ vale $x_i \notin \overline{SV(x_j \mid j \in I \setminus i)}$.*

(2) *Esiste una famiglia $\underset{i}{\bigcirc} \alpha_i : I \longrightarrow X'$ tale che $\alpha_i(x_j) = \delta_{ij}$*

per ogni $i, j \in I$.

<u>Dimostrazione.</u> Per $i \in I$ poniamo $X_i := \overline{SV(x_j \mid j \in I \setminus i)}$. Allora X_i è un sottospazio vettoriale chiuso di X.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sia $i \in I$. Per ipotesi $x_i \notin X_i$. Per la prop. 7.28 esiste $\beta_i \in X'$ tale che $(\beta_i = 0,\ \text{in } X_i)$ e $\beta_i(x_i) \neq 0$.

Possiamo porre $\alpha_i = \alpha/\beta_i(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Siano $x_i \in X_i$ e la famiglia $\underset{j}{\bigcirc} \alpha_j$ scelta come nell'enunciato.

Dalla prop. 7.35 segue che $(\alpha_i = 0,\ \text{in } X_i)$ e quindi anche $\alpha_i(x_i) = 0$. Per ipotesi però $\alpha_i(x_i) = 1$.

Corollario 7.37. *Sia X uno spazio vettoriale normato ed $x_1, \ldots, x_m$ elementi di X. Allora sono equivalenti:*

(1) *Gli elementi $x_1, \ldots, x_m$ sono linearmente indipendenti.*

(2) *Esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in X'$ tali che $\alpha_i(x_j) = \delta_{ij}$ per ogni $i, j \in I$.*

Dimostrazione. Ciò segue dalla prop. 7.36, perché $\overline{SV(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_m)} = SV(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_m)$ per il lemma 6.50.

8. Il teorema di Banach-Steinhaus

Teorema 8.1 (principio della limitatezza uniforme). *Siano X uno spazio topologico e Z un sottoinsieme di seconda categoria di X. Sia inoltre $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ limitato in ogni punto di Z, cioè tale che per ogni $z \in Z$ l'insieme $\mathcal{F}(z)$ sia limitato.*

Allora esiste un aperto non vuoto U di X tale che $\mathcal{F}(U)$ sia limitato.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$A_n := \{x \in X \mid \mathcal{F}(x) \subset [-n, n]\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} (f \in [-n, n]).$$

Tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ sono continui, perciò ogni insieme $(f \in [-n, n])$ è chiuso e quindi anche ogni A_n è chiuso.

Per l'ipotesi su $\mathcal{F}$ abbiamo $Z \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Assumiamo per assurdo che $\operatorname{int} A_n = \operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$ per ogni n. Allora Z è di prima categoria per l'oss. 6.33,in contrasto con l'ipotesi. Perciò devono esistere $n \in \mathbb{N}$ ed un aperto non vuoto U tale che $U \subset A_n$ e quindi $\mathcal{F}(U) \subset [-n, n]$.

Corollario 8.2. *Siano X uno spazio metrico completo $\neq \emptyset$ ed $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ limitato in ogni punto. Allora esiste un aperto non vuoto U di X tale che $\mathcal{F}(U)$ sia limitato.*

Dimostrazione. Per il teorema 6.10 e il cor. 6.38 X è di seconda categoria, cosicché l'enunciato segue dal teorema 8.1.

Teorema 8.3 (teorema di Banach-Steinhaus). *Siano X ed Y spazi vettoriali normati, Z un sottoinsieme di seconda categoria di X ed $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ tale che per ogni $z \in Z$ l'insieme $\{\|\varphi z\| \mid \varphi \in \mathcal{H}\}$ sia limitato. Allora l'insieme $\{\|\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}\}$ è limitato.*

Dimostrazione. Per $\varphi \in \mathcal{H}$ sia $f_\varphi := \bigcirc_{x} \|\varphi x\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Allora $\mathcal{F} := \{f_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}\} \subset C(X, \mathbb{R})$ e l'ipotesi significa che per ogni $z \in Z$ l'insieme $\mathcal{F}(z)$ è limitato. Per il teorema 8.1 esiste un aperto U non vuoto tale che $\mathcal{F}(U)$ è limitato. Ciò significa che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|\varphi(u)\| \leq n$ per ogni $u \in U$ ed ogni $\varphi \in \mathcal{H}$.

Esistono perciò $x_0 \in X$ ed $r > 0$ con $\|\varphi(u)\| \leq n$ per ogni $u \in X$ per il quale $\|u - x_0\| \leq r$. Dimostriamo ora che $\|\varphi\| < n/r$ per ogni $\varphi \in \mathcal{H}$.

Siano infatti $\varphi \in \mathcal{H}$ ed $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$. Per $u := x_0 + rx$ vale allora $\|u - x_0\| \leq r$ e quindi $\|\varphi(u)\| \leq n$, cioè $\|\varphi(x_0 + rx)\| \leq n$, cosicché

$$\begin{aligned} \|\varphi x\| &= \frac{1}{2} \left\| \varphi \left(\frac{x_0 + rx}{r} - \frac{x_0 - rx}{r} \right) \right\| = \frac{1}{2r} \|\varphi(x_0 + rx) - \varphi(x_0 - rx)\| \\ &\leq \frac{1}{2r} \|\varphi(x_0 + rx)\| + \frac{1}{2r} \|\varphi(x_0 - rx)\| \leq \frac{n}{r} \end{aligned}$$

Corollario 8.4. *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio vettoriale normato ed $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ tale che per ogni $x \in X$ l'insieme $\{\|\varphi x\| \mid \varphi \in \mathcal{H}\}$ sia limitato. Allora l'insieme $\{\|\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}\}$ è limitato.*

Proposizione 8.5. *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio vettoriale normato e $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$ tale che il limite $\varphi x := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n x$ esiste per ogni $x \in X$. Allora:*

(1) $\varphi \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(2) *L'insieme delle norme $\{\|\varphi_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.*

(3) $\|\varphi\| \leq \underline{\lim\limits_{n}} \|\varphi_n\|$.

Dimostrazione. L'ipotesi di convergenza puntuale implica che l'insieme $\{\|\varphi_n x\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato. Per il cor. 8.4 quindi anche l'insieme $\{\|\varphi_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato. Ciò mostra il punto (2).

Ciò significa inoltre che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\|\varphi_n\| \leq a$ per ogni n, per cui $\|\varphi_n x\| \leq ax$ per ogni n ed ogni $x \in X$.

Da ciò segue $\|\varphi\| \leq a$ per cui φ è continua.

Infine è evidente che $\|\varphi\| \leq \underline{\lim\limits_{n}} \|\varphi_n\|$.

Corollario 8.6. *Siano X e Z spazi vettoriali normati, Y uno spazio di Banach. Siano $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$, $\underset{n}{\bigcirc}\psi_n$ una successione in $\mathcal{L}(Y,Z)$, entrambe convergenti puntualmente: $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n x \longrightarrow \varphi x$ per ogni $x \in X$ e $\underset{n}{\bigcirc}\psi_n y \longrightarrow \psi y$ per ogni $y \in Y$.*

Allora $\underset{n}{\bigcirc}\psi_n\varphi_n x \longrightarrow \underset{n}{\bigcirc}\psi\varphi x$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Per la prop. 8.5 la successione $\underset{n}{\bigcirc}\|\psi_n\|$ è limitata, cosicché l'enunciato segue dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned}\|\psi_n\varphi_n x - \psi\varphi x\| &= \|\psi_n(\varphi_n - \varphi)x + (\psi_n - \psi)\varphi x\| \\ &\leq \|\psi_n(\varphi_n - \varphi)x\| + \|(\psi_n - \psi)\varphi x\| \\ &\leq \|\psi_n\|\|(\varphi_n - \varphi)x\| + \|(\psi_n - \psi)\|\|\varphi x\|\end{aligned}$$

Teorema 8.7. *X e Y siano spazi di Banach e $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$. Allora sono equivalenti:*

(1) *Esiste $\varphi \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n x \longrightarrow \varphi x$ per ogni $x \in X$.*

(2) *L'insieme $\{\|\varphi_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato e inoltre esiste un sottoinsieme denso D di X tale che per ogni $x \in D$ la successione $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n x$ converge.*

Dimostrazione. $(1) \Rightarrow (2)$: Ciò segue direttamente dalla prop. 8.5.

$(2) \Rightarrow (1)$: Per la prop. 8.5 è sufficiente dimostrare che la successione $\underset{n}{\bigcirc}\varphi_n x$ converge per ogni $x \in X$. Sia quindi $x \in X$.

Scegliamo $\varepsilon > 0$ e poniamo $\gamma := \sup_n \|\varphi_n\|$. Per ipotesi $\gamma < \infty$.

Siccome D è denso in X, esiste un $x_0 \in D$ tale che $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3\gamma}$.

Però $\bigcirc_n \varphi_n x_0$ converge, perciò esiste n_0 tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha $\|\varphi_n x_0 - \varphi_m x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Per questi n, m allora vale

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n x - \varphi_m x\| &\leq \|\varphi_n x - \varphi_n x_0\| + \|\varphi_n x_0 - \varphi_m x_0\| + \|\varphi_m x_0 - \varphi_m x\| \\
&< \|\varphi_n\|\|x - x_0\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|\varphi_m\|\|x - x_0\| \\
&< \gamma\frac{\varepsilon}{3\gamma} + \frac{\varepsilon}{3} + \gamma\frac{\varepsilon}{3\gamma} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ciò implica che la successione $\bigcirc_n \varphi_n x$ è una successione di Cauchy. Siccome per ipotesi anche Y è completo, essa converge.

9. Il teorema dell'applicazione aperta

Osservazione 9.1. Seguiamo Meise/Vogt.

Definizione 9.2. Per uno spazio metrico $X = (X, d)$ ed $x \in X$, $\varepsilon > 0$, poniamo

$$U_\varepsilon(x) := (d(X, x) < \varepsilon) = \{y \in Y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Se X è uno spazio vettoriale normato e d è la metrica indotta dalla norma, allora $U_\varepsilon(x) = x + U_\varepsilon(0)$.

Definizione 9.3. Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice *aperta* se $f(U)$ è aperto per ogni aperto $U \subset X$.

Osservazione 9.4. Siano X e Y spazi metrici. Allora la funzione $f : X \longrightarrow Y$ è aperta se e solo se per ogni $x \in X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $U_\delta(f(x)) \subset f(U_\varepsilon(x))$.

Lemma 9.5. *Siano X e Y spazi metrici ed $f : X \longrightarrow Y$ una funzione continua. Se X è completo e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $U_\delta(f(x)) \subset \overline{f(U_\varepsilon(x))}$ per ogni $x \in X$, allora la funzione f è aperta.*

Dimostrazione. Per l'oss. 9.4 è sufficiente dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che $U_\rho(f(x)) \subset f(U_\varepsilon(x))$ per ogni $x \in X$.

(1) Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$ poniamo $\varepsilon_n := \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ e scegliamo (usando l'ipotesi) un δ_n con $0 < \delta_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Per $x \in X$ fissato sia $y \in U_{\delta_1}(f(x))$ scelto in modo arbitrario.

Definiamo in modo induttivo una successione $\bigcirc_n x_n$ in X con $x_0 = x$ e

$$d(f(x_n), y) < \delta_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad d(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon_n \qquad (*)$$

per ogni $n \in \mathbb{N} + 1$, nel modo seguente:

Dopo aver scelto x_n con $d(f(x_n), y) < \delta_{n+1}$, dall'ipotesi abbiamo $y \in U_{\delta_{n+1}}(f(x_n)) \subset \overline{f(U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n))} \subset \bigcup_{\xi \in U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n)} U_{\delta_{n+2}}(f(\xi))$.

Perciò esiste un $x_{n+1} \in U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n)$ con $y \in U_{\delta_{n+2}}(f(x_{n+1}))$, ovvero

$$d(f(x_{n+1}), y) < \delta_{n+2} \quad \text{e} \quad d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon_{n+1}$$

(2) Dalla (*) segue che $\bigcirc_n x_n$ è una successione di Cauchy in X. Siccome X è completo, esiste un $\xi := \lim_{n \to \infty} x_n$ e dalla relazione (*) abbiamo

$$\begin{aligned} d(x, \xi) = d(x_0, \xi) &= \lim_{k \longrightarrow \infty} d(x_0, x_k) \\ &\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k} d(x_n, x_{n-1}) < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon \end{aligned}$$

per cui $\xi \in U_\varepsilon(x)$.

Siccome la f è continua, utilizzando ancora (*) abbiamo
$y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$, perciò $U_\rho(f(x)) \subset f(U_\varepsilon(x))$ con $\rho = \delta_1$.

Osservazione 9.6. Sia X uno spazio vettoriale normato. Allora per ogni $W \in \mathcal{U}(0)$ si ha $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nW$.

<u>Dimostrazione.</u> Poiché la moltiplicazione per uno scalare è continua, abbiamo che $\bigcirc_{n} x/n \longrightarrow 0$. Perciò $x/n \in U$ per ogni $n >> 0$, cioè $x \in nU$ per ogni $n >> 0$.

Lemma 9.7. *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio vettoriale normato e $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua. Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $U_\delta(0) \subset \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))}$, allora φ è aperta e suriettiva.*

<u>Dimostrazione.</u> (1) Dimostriamo prima che φ è aperta. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste un $\delta > 0$ tale che $U_\delta(0) \subset \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))}$.

Per ogni $x \in X$ allora, siccome ogni traslazione è un morfismo, si ha

$$\begin{aligned} U_\delta(\varphi x) &= \varphi x + U_\delta(0) \subset \varphi x + \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))} = \overline{\varphi x + \varphi(U_\varepsilon(0))} \\ &\overset{1}{=} \overline{\varphi(x + U_\varepsilon(0))} = \overline{\varphi(U_\varepsilon(x))} \end{aligned}$$

dove in $\overset{1}{=}$ abbiamo sfruttato la linearità di φ.

(2) Siccome X è completo, dal lemma 9.4 segue che φ è aperta. In particolare è aperta l'immagine $\varphi(X)$.

(3) Dimostriamo la suriettività di φ. Siccome $0 \in \varphi(X)$, per il punto (2) possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che $U_\delta(0) \subset \varphi(X)$. Poiché φ è lineare, dall'oss. 9.6 segue che $Y = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nU_\delta(0)$. Ma $nU_\delta(0) \subset \varphi(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e vediamo che $Y \subset \varphi(X)$.

Lemma 9.8. *Siano X e Y spazi vettoriali normati e $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua. Se $\varphi(X)$ è di seconda categoria in Y, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $U_\delta(0) \subset \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))}$.*

<u>Dimostrazione.</u> Siccome la funzione $\bigcirc_{(x,y)} x - y : X \times X \longrightarrow X$ è continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $W \in \mathcal{U}(0)$ tale che $W - W \subset U_\varepsilon(0)$. Per l'oss. 9.6 abbiamo

$$\varphi(X) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nW\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\varphi(W) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{n\varphi(W)}$$

Poiché $\varphi(X)$ è di seconda categoria in Y, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $\operatorname{int} \overline{m\varphi(W)} \neq \emptyset$.

L'applicazione $\bigcirc_{y} my : Y \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo, perciò anche $\overline{\varphi(W)}$ contiene un punto interno y_0. Dalla scelta di W abbiamo

$$\overline{\varphi(W)} - y_0 = \overline{\varphi(W) - y_0} \subset \overline{\varphi(W) - \varphi(W)} = \overline{\varphi(W - W)} \subset \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))}$$

Perciò $0 = y_0 - y_0$ è un punto interno di $\overline{\varphi(W)} - y_0 \subset \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))}$.
Di conseguenza esiste un $\delta > 0$ tale che $U_\delta(0) \subset \overline{\varphi(U_\varepsilon(0))}$.

Proposizione 9.9. *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio vettoriale normato e $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare e continua. Se $\varphi(X)$ è di seconda categoria in Y, allora φ è aperta e suriettiva.*

Dimostrazione. Ciò segue dai lemmi 9.7 e 9.8.

Teorema 9.10 (teorema dell'applicazione aperta). *Siano X e Y spazi di Banach e $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare, continua e suriettiva.*

Allora φ è aperta.

Dimostrazione. Per il cor. 6.38 $\varphi(X) = Y \in \mathcal{B}_2(Y)$, cosicché l'enunciato segue dai lemmi 9.7 e 9.8.

Teorema 9.11 (teorema dell'isomorfismo di Banach). *Siano X e Y spazi di Banach e $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare, continua e biiettiva.*

Allora φ^{-1} è continua.

Dimostrazione. Poiché l'applicazione biiettiva φ è aperta se e solo se φ^{-1} è continua, l'enunciato segue immediatamente dal teorema 9.10.

Corollario 9.12. *Siano X e Y spazi di Banach. Allora per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *φ è iniettiva e $\varphi(X)$ è chiuso in Y.*

(2) *Esiste un $\mu > 0$ tale che $\mu\|\varphi x\| \geq \|x\|$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Se $\varphi(X)$ è chiuso in Y, allora $\varphi(X)$ è uno spazio di Banach per la prop. 1.13. Per il teorema 9.11 quindi φ induce un isomorfismo $X \longrightarrow \varphi(X)$. Perciò esiste un $\mu > 0$ tale che $\|\varphi^{-1}y\| \leq \mu\|y\|$ per ogni $y \in \varphi(X)$ e quindi $\|x\| \leq \mu\|\varphi x\|$ per ogni $x \in X$.

(2) $\Rightarrow$ (1): L'ipotesi implica, per la nota 7.17, che φ induce un isomorfismo $X \longrightarrow \varphi(X)$. Perciò $\varphi(X)$ è completo e quindi chiuso in Y.

Definizione 9.13. Siano X e Y insiemi e $f : X \longrightarrow Y$ una funzione. Il *grafico* di f è l'insieme

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

Nota 9.14. (1) Se X e Y sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, allora $f : X \longrightarrow Y$ è lineare se e solo se $\Gamma(f)$ è un sottospazio vettoriale di $X \times Y$.

(2) Se X e Y sono spazi metrici, allora per ogni $f : X \longrightarrow Y$ il grafico $\Gamma(f)$ è chiuso in $X \times Y$ se e solo se $\underset{n}{\bigcirc} x_n \longrightarrow x$ e $\underset{n}{\bigcirc} f(x_n) \longrightarrow y$ implica $y = f(x)$.

In particolare, il grafico di funzioni continue è chiuso. L'inversa di questa affermazione non è vera: l'applicazione

$$\varphi := \underset{f}{\bigcirc} f' : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$$

non è continua, ma il grafico $\Gamma(\varphi)$ è chiuso.

(3) Se X e Y sono spazi vettoriali normati e $\varphi : X \longrightarrow Y$ è un'applicazione lineare, allora il grafico $\Gamma(\varphi)$ è chiuso se e solo se $\underset{n}{\bigcirc}\, x_n \longrightarrow 0$ e $\underset{n}{\bigcirc}\, \varphi(x_n) \longrightarrow y$ implica $y = 0$.

Teorema 9.15 (teorema del grafico chiuso). *Siano X e Y spazi di Banach e $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare. Se $\Gamma(\varphi)$ è chiuso in $X \times Y$, allora φ è continua.*

Dimostrazione. Per la prop. 1.13 e il punto (1) della nota 9.14 $\Gamma(\varphi)$ è uno spazio di Banach. Siano $\pi_X : \Gamma(\varphi) \longrightarrow X$ e $\pi_Y : \Gamma(\varphi) \longrightarrow Y$ le proiezioni canoniche. Allora π_X e π_Y sono lineari e continue e inoltre per $z := (x, \varphi(x)) \in \Gamma(\varphi)$ abbiamo $(\varphi \circ \pi_X)(z) = \varphi(x) = \pi_Y(z)$ e vediamo che $\varphi \circ \pi_X = \pi_Y$.

Notiamo adesso che l'applicazione π_X è biiettiva, per cui $\varphi = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}$. Siccome π_X è continua, per il teorema 9.11 anche π_X^{-1} è continua e quindi anche φ è continua.

10. Topologie deboli e dualità

Situazione 10.1. Sia X uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{K}$.

Definizione 10.2. (1) La X'*-topologia* su X è la più debole topologia su X nella quale tutti gli elementi di X' sono applicazioni continue. Nella letteratura questa topologia è detta *topologia debole*.
In essa una rete $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda$ in X converge a un punto x se e solo se $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha(x_\lambda) \longrightarrow \alpha(x)$ per ogni $\alpha \in X'$. Scriviamo allora $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda \xrightarrow{X'} x$.
Denotiamo lo spazio topologico così ottenuto con $(X, \xrightarrow{X'})$.

(2) La X*-topologia* su X' è la più debole topologia su X' nella quale tutte le applicazioni $\underset{\alpha}{\bigcirc} \alpha(x) : X' \longrightarrow \mathbb{K}$ per $x \in X$ sono continue.
Nella letteratura questa topologia è detta *topologia* $*$*-debole*.
In essa una rete $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda$ in X' converge ad α se e solo se $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda(x) \longrightarrow \alpha(x)$ per ogni $x \in X$. Scriviamo allora $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda \xrightarrow{X} \alpha$.
Denotiamo lo spazio topologico così ottenuto con $(X', \xrightarrow{X})$.

Definizione 10.3. Diremo che un sottoinsieme di X è X'-compatto (oppure X'-aperto oppure X'-limitato) se è compatto (risp. aperto, limitato) nella X'-topologia.

Similmente per la X-topologia su X'.

Osservazione 10.4. Tramite l'immersione canonica $j : X \longrightarrow X''$ vista nella def. 7.23 possiamo considerare X come sottospazio di X''.
Su X' è definita anche la X''-topologia in cui $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda \xrightarrow{X''} \alpha$ se e solo se $\underset{\lambda}{\bigcirc} \theta(\alpha_\lambda) \longrightarrow \theta(\alpha)$ per ogni $\theta \in X''$.

È chiaro che $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda \xrightarrow{X''} \alpha$ implica $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda \xrightarrow{X} \alpha$, ma in genere la X''-topologia su X' è strettamente più fine della X-topologia.

Proposizione 10.5. *Lo spazio* $(X, \xrightarrow{X'})$ *è di Hausdorff.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $x, y \in X$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda$ una rete in X tale che $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda \xrightarrow{X'} x$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} x_\lambda \xrightarrow{X'} y$. Allora per la prop. 7.19 esiste un $\alpha \in X'$ con $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. Però allora abbiamo $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha(x_\lambda) \longrightarrow \alpha(x)$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha(x_\lambda) \longrightarrow \alpha(y)$ in $\mathbb{K}$ e ciò è impossibile perché $\mathbb{K}$ è di Hausdorff.

Proposizione 10.6. *Lo spazio* $(X', \xrightarrow{X})$ *è di Hausdorff.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $\alpha, \beta \in X'$, con $\alpha \neq \beta$, e $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda$ una rete in X' tale che $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda \longrightarrow \alpha$ e $\underset{\lambda}{\bigcirc} \alpha_\lambda \longrightarrow \beta$. L'ipotesi $\alpha \neq \beta$ significa che esiste

un $\in X$ tale che $\alpha(x) \neq \beta(x)$. Però $\bigcirc_\lambda \alpha_\lambda(x) \longrightarrow \alpha(x)$ e $\bigcirc_\lambda \alpha_\lambda \longrightarrow \beta(x)$ per ogni $x \in X$ e ciò è impossibile, essendo $\mathbb{K}$ di Hausdorff.

Proposizione 10.7. *La successione $\bigcirc_n x_n \in X^{\mathbb{N}}$ sia X'-convergente.*

Allora l'insieme $\{\|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

Dimostrazione. Sia $H := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. L'ipotesi implica che per ogni $\alpha \in X'$ l'insieme $\{\|\alpha(h)\| \mid h \in H\}$ è limitato.

Usando l'iniezione canonica $j : X \longrightarrow X''$ (def. 7.23) si ottiene $j(H) \subset \mathcal{L}(X', \mathbb{R})$. Per $h \in H$ ed $\alpha \in X'$ si ha $\alpha(h) = j(h)(\alpha)$ e da ciò si vede che l'insieme $\{\|\varphi(\alpha)\| \mid \varphi \in j(H)\}$ è limitato.

L'enunciato segue dal cor. 8.4, sostituendo X con X' e Y con $\mathbb{R}$.

Lemma 10.8. *Sia Y unospazio vettoriale normato.*

Allora $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{L}((X, \xrightarrow{X'}), (Y, \xrightarrow{Y'}))$

Dimostrazione. Siano $\varphi \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\bigcirc_\lambda x_\lambda$ una rete in X e $x \in X$ tali che $\bigcirc_\lambda x_\lambda \xrightarrow{X'} x$. Sia $\beta \in Y'$. Allora $\beta \circ \varphi \in X'$, per cui
$\bigcirc_\lambda \beta(\varphi(x_\lambda)) \longrightarrow \beta(\varphi(x))$.

Teorema 10.9 (teorema di Alaoglu). $(\|X'\| \leq 1)$ *è X-compatto.*

Dimostrazione. (1) Sia $\mathcal{E} := (\|X'\| \leq 1)$. Con la topologia prodotto $\mathcal{E}$ è sottospazio di $\mathbb{K}^X$. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{E}$ è compatto.

Per $\alpha \in \mathcal{E}$ ed $x \in X$ si ha $\|\alpha(x)\| \leq \|\alpha\|\|x\| \leq \|x\|$, perciò $\mathcal{E}$ è anche sottospazio di $\mathcal{K} := \prod_{x \in X} (|\mathbb{K}| \leq \|x\|)$. $\mathcal{K}$ è uno spazio compatto e di Hausdorff, perciò è sufficiente dimostrare che $\mathcal{E}$ è chiuso in $\mathcal{K}$.

(2) Sia $\alpha \in \overline{\mathcal{E}}$, la chiusura di $\mathcal{E}$ nella topologia prodotto. Dobbiamo dimostrare che α è lineare e che $\|\alpha\| \leq 1$ (ciò implica automaticamente che α è continua).

Per ipotesi esiste una rete $\bigcirc_\lambda \alpha_\lambda$ in $\mathcal{E}$ con $\bigcirc_\lambda \alpha_\lambda \xrightarrow{X} \alpha$. Per $a \in \mathbb{K}$ ed $x, y \in X$ si ha allora $\bigcirc_\lambda \alpha_\lambda(ax+y) \longrightarrow \alpha(ax+y)$ e quindi anche $\bigcirc_\lambda \alpha_\lambda(ax+y) = \bigcirc_\lambda (a\alpha_\lambda(x) + \alpha_\lambda(y)) \longrightarrow a\alpha(x) + \alpha(y)$.

Ciò mostra $\alpha(ax+y) = a\alpha(x) + \alpha(y)$ e con ciò la linearità di α.

Infine $\|\alpha_\lambda(x)\| \leq \|x\|$ per ogni λ e naturalmente $\bigcirc_\lambda \|\alpha_\lambda(x)\| \longrightarrow \|\alpha(x)\|$, cosicché $\|\alpha(x)\| \leq \|x\|$ per ogni $x \in X$ e $\|\alpha\| \leq 1$.

Nota 10.10. Sia $x \in X$. Allora $\sup\{|\alpha(x)| \mid \alpha \in (\|(\|X') \leq 1)\} = \|x\|$

Dimostrazione. Per $x = 0$ l'enunciato è banale. Sia $x \neq 0$.

Per la prop. 7.19 esiste un $\beta \in X'$ con $\beta(x) = \|x\|$ e $\|\beta\| = 1$. Allora $\beta \in (\|X'\| \leq 1)$ e $|\beta(x)| = \|x\|$. Per ogni $\alpha \in (\|X'\| \leq 1)$ abbiamo però $|\alpha(x)| \leq \|\alpha\|\|x\| \leq \|x\|$.

11. Algebre di Banach

Definizione 11.1. Un'*algebra* su $\mathbb{C}$ è un anello A che contiene $\mathbb{C}$ come sottoanello (per cui in particolare $1_A = 1$). A è allora automaticamente uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Se questo spazio vettoriale è dotato di una norma tale che $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ per ogni $a, b \in A$ e tale che $\|1\| = 1$, allora $A = (A, \|\|)$ si chiama un'*algebra normata*.

A si chiama un'*algebra di Banach*, se lo spazio vettoriale normato è di Banach.

Situazione 11.2. Sia A un'algebra di Banach commutativa.

Seguiamo Hirzebruch/Scharlau.

Osservazione 11.3. Si dimostra facilmente che $\mathcal{L}(A, A)$ è un'algebra normata (non commutativa), la quale, per la nota 7.17, è un'algebra di Banach.

Nota 11.4. Per $a \in A$ sia $L_a := \underset{x}{\bigcirc} ax : A \longrightarrow A$. È chiaro che L_a è lineare. Inoltre

$$\|L_a x\| = \|ax\| \leq \|a\|\|x\| \qquad \text{per ogni } x \in A$$

$$\|L_a 1\| = \|a\| = \|a\|\|1\|$$

per cui $\|L_a\| = \|a\|$. Ciò mostra che $L_a \in \mathcal{L}(A, A)$ e che l'applicazione $L := \underset{a}{\bigcirc} L_a : A \longrightarrow \mathcal{L}(A, A)$ è un'isometria.

Infine $L_{ab}x = abx = L_a L_b x$ per ogni $x \in A$, per cui $L_{ab} = L_a L_b$ e siccome L_1 coincide evidentemente con l'identità, vediamo che L è un'immersione isometrica dall'algebra A nell'algebra $\mathcal{L}(A, A)$.

Corollario 11.5. *Ogni algebra di Banach commutativa è isometricamente isomorfa ad un'algebra di operatori lineari continui in uno spazio di Banach.*

Definizione 11.6. Sia X uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $\varphi \in \mathcal{L}(X, X)$. Poniamo allora:

(1) $\mathrm{Ris}\,\varphi := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ è biiettiva $\}$.

$\mathrm{Ris}\,\varphi$ si chiama l'*insieme risolvente* di φ.

(2) $\mathrm{Spett}\,\varphi := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ris}\,\varphi$.

$\mathrm{Spett}\,\varphi$ si chiama lo *spettro* di φ.

Osservazione 11.7. Siano X uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $\varphi \in \mathcal{L}(X, X)$.

(1) Per ogni $\lambda \in \mathrm{Ris}\,\varphi$ l'applicazione $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ è continua.

(2) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di φ, cioè tale che $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \emptyset$, allora $\lambda \in \mathrm{Spett}\,\varphi$.

Dimostrazione. (1) Ciò segue dal teorema 9.10.

(2) Chiaro.

Lemma 11.8. *Siano X ed Y spazi di Banach non vuoti e $\psi \in \mathcal{L}(X,X)$ biiettiva. Sia $\theta \in \mathcal{L}(X,Y)$ tale che $\|\psi - \theta\| < \dfrac{1}{\|\psi^{-1}\|}$.*

Allora anche θ è biiettiva.

Dimostrazione. Abbiamo $\theta = \psi(\mathrm{id} - \psi^{-1}(\psi - \theta))$.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\psi^{-1}(\psi - \theta))^n$ converge, come si vede da

$$\| \sum_{k=n}^{m} \|(\psi^{-1}(\psi - \theta))^n \leq \sum_{k=n}^{m} \|(\psi^{-1}(\psi - \theta))^n\| \leq \sum_{k=n}^{m} \rho^k$$

con $\rho := \|\psi - \theta\|\|\psi^{-1}\| < 1$.

Adesso si verifica direttamente che $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\psi^{-1}(\psi - \theta))^n)\psi^{-1}$ è l'inversa di θ.

Corollario 11.9. *Siano X uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $\varphi \in \mathcal{L}(X,X)$.*

Allora l'insieme $\mathrm{Ris}\,\varphi$ è aperto.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathrm{Ris}\,\varphi$. Allora $\varphi - \lambda\,\mathrm{id} \in \mathcal{L}(X,X)$ è biiettiva. Dal lemma 11.8 segue che per $\mu \in \mathbb{C}$ sufficientemente vicino a λ anche $\varphi - \mu\,\mathrm{id}$ è biiettiva.

Proposizione 11.10. *Siano X uno spazio di Banach e $\varphi \in \mathcal{L}(X,X)$.*

Allora l'applicazione

$$\bigcirc_{\lambda}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} : \mathrm{Ris}\,\varphi \longrightarrow \mathcal{L}(X,X)$$

è analitica.

Dimostrazione. Fissiamo $\lambda_0 \in \mathrm{Ris}\,\varphi$ e poniamo $\psi := \varphi - \lambda_0\,\mathrm{id}$.

Siano $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|\psi^{-1}\|}$ e $\theta := \varphi - \lambda\,\mathrm{id}$.

Allora $\|\psi - \theta\| = |\lambda - \lambda_0|$, per cui dal lemma 11.8 segue che anche θ è biiettiva.

Inoltre, come nella dimostrazione del lemma 11.8, si ha

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi^{-1}(\psi - \theta))^n \psi^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi - \lambda_0\,\mathrm{id})^{-n-1}(\lambda - \lambda_0)^n$$

Teorema 11.11. *Siano Xuno spazio di Banach e $\varphi \in \mathcal{L}(X,X)$. Allora:*

(1) $\mathrm{Spett}\,\varphi \subset (|\mathbb{C}| \leq \|\varphi\|)$.

(2) $\mathrm{Spett}\,\varphi$ *è compatto.*

(3) $\mathrm{Spett}\,\varphi \neq \emptyset$.

Dimostrazione. (1) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|\varphi\|$. Poniamo $\psi := -\lambda\,\mathrm{id}$ e $\theta := \varphi - \lambda\,\mathrm{id}$. Allora ψ è invertibile e inoltre

$$\|\psi - \theta\| = \|\varphi\| < |\lambda| = \frac{1}{\|\psi^{-1}\|}$$

per cui $\theta = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ è invertibile per il lemma 11.8. Ma ciò significa $\lambda \notin \mathrm{Spett}\,\varphi$.

(2) $\mathrm{Spett}\,\varphi$ è chiuso per il cor. 11.9 e limitato per il punto (1), perciò compatto.

(3) Assumiamo, per assurdo, che $\mathrm{Spett}\,\varphi = \emptyset$. Allora la funzione $f := \underset{\lambda}{\bigcirc}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(X, X)$ è ben definita ed analitica per la prop. 11.10.

Essa è quindi continua e perciò limitata nel disco $(|\mathbb{C}| \leq 2\|\varphi\|)$.

Osservando che

$$f(\lambda) = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = -(\lambda(\mathrm{id} - \tfrac{1}{\lambda}\varphi))^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(\mathrm{id} - \frac{1}{\lambda}\varphi)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \lambda^{-n-1}$$

per $|\lambda| \geq 2\|\varphi\|$ abbiamo invece

$$|f(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi\|^n\, |\lambda|^{-n-1} = \frac{1}{|\lambda| - \|\varphi\|} \leq \frac{1}{\|\varphi\|}$$

Perciò f è limitata su tutto $\mathbb{C}$. Dal teorema di Liouville segue che f è costante e ciò è impossibile.

Osservazione 11.12. Sia $a \in A$. Allora sono equivalenti:

(1) a è invertibile.

(2) L_a è invertibile.

In tal caso $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Sia a invertibile. Allora possiamo scrivere

$\mathrm{id} = L_1 = L_{aa^{-1}} = L_a L_{a^{-1}}$ e

$\mathrm{id} = L_1 = L_{a^{-1}a} = L_{a^{-1}} L_a$

(2) $\Rightarrow$ (1): Sia L_a invertibile. Allora

$a(L_a^{-1})1 = L_a(L_a)^{-1}1 = 1$

e vediamo che a è invertibile con $a^{-1} = (L_a)^{-1}1$.

Definizione 11.13. Per $a \in A$ sia $\mathrm{Spett}\,a := \mathrm{Spett}\,L_a$.

Corollario 11.14. *Sia $a \in A$. Allora*

$\mathrm{Spett}\,a = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda$ *non è invertibile* $\}$

Proposizione 11.15. *Sia $a \in A$. Allora:*

(1) $\mathrm{Spett}\,a \neq \emptyset$.

(2) $\mathrm{Spett}\,a$ *è compatto.*

(3) $\mathrm{Spett}\,a \subset (|\mathbb{C}| \leq \|a\|)$.

Dimostrazione. Ciò segue dal teorema 11.11 tenendo conto dell'uguaglianza $\|L_a\| = \|a\|$ vista nella nota 11.4.

Proposizione 11.16 (teorema di Gelfand-Mazur). *Sia A un campo.*

Allora $A = \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Per la prop. 11.15 esiste un $\lambda \in \operatorname{Spett} A$. Per l'oss. 11.12 allora $a - \lambda$ non è invertibile. Siccome A è un campo, ciò è possibile solo se $a = \lambda \in \mathbb{C}$.

Definizione 11.17. Un ideale di A è un sottogruppo $I \neq A$ di $(A, +)$ tale che $AI \subset I$.

Siccome $\mathbb{C} \subset A$, ogni ideale di A è anche un sottospazio vettoriale di A.

Osservazione 11.18. Un ideale di A non può contenere elementi invertibili.

Dimostrazione. Sia I un ideale di A e $a \in I$ invertibile.
Allora $1 = a_{-1}a \in I$, una contraddizione.

Lemma 11.19. *Sia $a \in A$ tale che $\|1 - a\| < 1$.*

Allora a è invertibile.

Dimostrazione. Ciò segue dal lemma 11.8 con $\psi := \mathrm{id} = L_1$ e $\theta := L_a$.

Lemma 11.20. *Sia I un ideale di A. Allora anche $\overline{I}$ è un ideale di A.*

Dimostrazione. (1) È chiaro che $\overline{I}$ è un sottospazio vettoriale di A.

(2) Per $a \in A$ l'operatore L_a è continuo, perciò $a\overline{I} \subset \overline{aI} \subset \overline{I}$, e quindi anche $A\overline{I} \subset \overline{I}$.

(3) Dobbiamo ancora dimostrare che $1 \notin \overline{I}$.

Per il lemma 11.9 esiste però un intorno $U \in \mathcal{U}(1)$ i cui elementi sono tutti invertibili. Per l'oss. 11.18 ciò implica $U \cap I = \emptyset$, per cui $1 \notin \overline{I}$.

Definizione 11.21. Un ideale di A si dice *massimale*, se non è contenuto in nessun altro ideale di A.

Indichiamo con $\operatorname{Max} A$ l'insieme degli ideali massimali di A.

Proposizione 11.22. *Ogni ideale massimale di A è chiuso.*

Dimostrazione. Ciò è una conseguenza immediata del lemma 11.20.

Lemma 11.23. *Sia I un ideale chiuso di A. Allora A/I è, in modo naturale, un'algebra di Banach (ovviamente commutativa).*

Dimostrazione. Facile verifica. Cfr. Hirzebruch/Scharlau, pag. 124.

Osservazione 11.24. Sia $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Allora $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$.

Dimostrazione. È noto dall'algebra che $A/\mathfrak{m}$ è un campo. L'enunciato segue dalla prop. 11.16.

Nota 11.25. Sia $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Per ogni $a \in A$ allora, tramite la proiezione canonica $A \longrightarrow A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$, secondo l'oss. 11.24, otteniamo un elemento $f_{\mathfrak{m}}(a) \in \mathbb{C}$.

In questo ragionamento però si usa un'implicita identificazione, per cui è preferibile descrivere $f_\mathfrak{m}$ in modo più concreto, ritornando alla dimostrazione della prop. 11.16.

Per il cor. 11.14 esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $a - \lambda + \mathfrak{m}$ non è invertibile in $A/\mathfrak{m}$.

Siccome $A/\mathfrak{m}$ è un campo, ciò implica $a - \lambda \in \mathfrak{m}$. λ è univocamente determinato per l'oss. 11.18.

Possiamo quindi porre $f_\mathfrak{m}(a) := \lambda$. Si noti che $f_\mathfrak{m}(a) = 0$ se e solo se $a \in \mathfrak{m}$.

Proposizione 11.26. *Sia* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. *Allora è definito un omomorfismo di algebre di Banach* $f_\mathfrak{m} : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *nel modo seguente:*

Per ogni $a \in A$ *sia* $f_\mathfrak{m}(a)$ *l'unico* $\lambda \in \mathbb{C}$ *per il quale* $a - \lambda \in \mathfrak{m}$.

Dimostrazione. Che l'applicazione $f_\mathfrak{m}(a)$ è ben definita segue dalla nota 11.25.

Si verifica facilmente che si tratta di un omomorfismo di algebre di Banach.

Osservazione 11.27. Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ un omomorfismo di algebre di Banach ed $\mathfrak{m} = \operatorname{Ker} f$. Allora $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ e $f_\mathfrak{m} = f$.

Possiamo quindi identificare $\operatorname{Max} A$ con l'insieme degli omomorfismi di algebre di Banach $A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha

$$f(a) = \lambda \Longleftrightarrow a - \lambda \in \mathfrak{m} \Longleftrightarrow f_\mathfrak{m}(a) = \lambda$$

Lemma 11.28. *Sia* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *un omomorfismo di algebre di Banach.*

Allora $\|f\| = 1$.

Dimostrazione. (1) $f(1) = 1 \Longrightarrow \|f\| \geq 1$.

(2) Siano $a \in A$ e $\lambda := f(a)$. Allora $f(a - \lambda) = 0$. Ma allora $a - \lambda$ non può essere invertibile e quindi $\lambda \in \operatorname{Spett} A$. Dalla prop. 11.15 segue $|f(a)| = |\lambda| \leq \|a\|$ e quindi $\|f\| \leq 1$.

Osservazione 11.29. Per la prop. 11.26 e il lemma 11.28 possiamo considerare $\operatorname{Max} A$ come sottoinsieme di $(\|A'\| = 1) \subset (\|A'\| \leq 1)$.

Proposizione 11.30. $\operatorname{Max} A$ *è un sottoinsieme* A*-chiuso di* $(\|A'\| \leq 1)$.

Dimostrazione. Sia $\bigcirc_\lambda f_\lambda$ una rete di omomorfismi di algebre di Banach $f_\lambda : A \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\alpha \in A$ tali che $\bigcirc_\lambda f_\lambda \xrightarrow{A} \alpha$. È chiaro allora che anche α è un omomorfismo di algebre di Banach.

Corollario 11.31. $\operatorname{Max} A$ *è* A*-compatto.*

Dimostrazione. Prop. 11.30 e teorema 10.9.

Teorema 11.32. *Sia* $\rho := \bigcirc_a \bigcirc_\mathfrak{m} f_\mathfrak{m}(a) : A \longrightarrow C(\operatorname{Max} A, \mathbb{C})$. *Allora:*

(1) ρ *è un omomorfismo di algebre di Banach.*

(2) $\|\rho\| \leq 1$.

(3) $\operatorname{Ker}\rho = \bigcap\limits_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Max}A} \mathfrak{m}$.

<u>Dimostrazione.</u> (1) Chiaro.

(2) Per ogni $a \in A$ e per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ si ha

$$\|\rho(a)(\mathfrak{m})\| = \|f_{\mathfrak{m}(a)}\| \overset{11.28}{\leq} \|a\|$$

per cui $\|\rho\| \leq \|1\|$.

(3) Per definizione $\rho(a) = 0 \Longleftrightarrow f_{\mathfrak{m}(a)} = 0$ per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ $\Longleftrightarrow a \in \mathfrak{m}$ per ogni $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$.

Bibliografia

H. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Springer 2006.

J. Appell/M. Väth: Elemente der Funktionalanalysis. Vieweg 2005.

B. Aulbach: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Spektrum 2004.

L. de Branges: The Stone-Weierstrass theorem. Proc. AMS 10 (1959), 822-824.

B. Brosowski/F. Deutsch: An elementary proof of the Stone-Weierstrass theorem. Proc. AMS 81/1 (1981), 89-92.

L. Chiodera: La compattificazione di Stone-Čech di un insieme discreto. Tesi LT, Ferrara 2006.

J. Conway: A course in functional analysis. Springer 1985.

P. Davis: Interpolation and approximation. Dover 1975.

J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie. Springer 2005.

R. Engelking: General topology. Heldermann 1989.

H. Heuser [A2]: Lehrbuch der Analysis II. Teubner 1986.

H. Heuser [FA]: Funktionalanalysis. Teubner 1986.

H. Heuser [GD]: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Teubner 1989.

F. Hirzebruch/W. Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibl. Inst. 1971.

A. Kolmogorov/S. Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale. Mir 1980.

R. Meise/D. Vogt: Einführung in die Funktionalanalysis. Vieweg 1992.

R. Nibbi: Topologia dei frattali. Tesi, Ferrara 1991.

B. Querenburg: Mengentheoretische Topologie. Springer 1979.

P. Riviera: Il semigruppo di Ellis di un sistema dinamico compatto. Tesi, Ferrara 1994.

H. Schaefer: Topological vector spaces. Springer 1999.

G. Scheja/U. Storch: Lehrbuch der Algebra. 2 volumi. Teubner 1988.

W. Schempp/B. Dreseler: Einführung in die harmonische Analyse. Teubner 1980.

H. Schröder: Funktionalanalysis. Deutsch 2000.

S. Willard: General topology. Dover 2004.

J. Wloka: Funktionalanalysis und Anwendungen. De Gruyter 1971.

J. Zemánek: A simple proof of the Weierstrass-Stone theorem. Comm. Math. 20 (1977), 495-497.

Conosco il mio percorso da sempre. Eppure non è facile percorrerlo. Ci sono momenti in cui mi sento più fragile, in cui spesso non ho voglia del dovere ed è forte la paura di non farcela. Però vado avanti e posso dire di aver raggiunto, finalmente, il primo vero obiettivo della mia vita, la laurea in matematica.

In primis, dico grazie alla mia testa dura, che, anche se un po' matta, qualche volta ragiona!

Se penso a come è cominciato tutto, la prima persona che mi viene in mente è la Vale. Grazie Vale, l'equilibrio e la forza che mi hai trasmesso sono stati indispensabili per me.

Un'altra figura molto importante è Porto (comunemente Marzia). Sei la persona più diversa da me al mondo! Ma forse la tua importanza deriva proprio da questo; in fondo mi hai fatto crescere, perché, come dico io, sei la mia coscienza. Mi hai fatto arrabbiare come pochi e, come pochi, ridere di gusto! Insomma, sei stata la mia salvezza. Grazie gnocca.

Andri, come farei senza di te? Sei un punto di riferimento, una spalla in ogni occasione, una certezza alla quale non potrei mai rinunciare. Grazie davvero.

Un pensiero va inoltre ad una fanciulla di nome Alessia, che, oltre ad essere un'amica, mi ha affiancato in diversi esami, sopportando i miei incredibli ritardi. Perciò grazie, ma soprattutto, scusa!

Quindi ringrazio le varie compagne di facoltà , per aver reso lo studio più piacevole.

D'altra parte, voglio dirti grazie Lù, con te mi sono svagata, hai tirato fuori lati di me che non conoscevo, mi hai fatto innervosire, divertire, emozionare e tutto questo in così poco tempo.

Come ho scritto all'inizio, conosco il mio percorso da sempre, o meglio dalle elementari; per questo un grazie è per la mia maestra Liliana.

Grazie di cuore Josef, per avermi aiutato e dedicato gran parte del suo tempo, per la sua ironia e i suoi insegnamenti, ma, in special modo, per aver creduto in me, sostenendomi nel momento di maggior bisogno.

Non possono di certo mancare all'appello i miei genitori e forse questi sono i ringraziamenti più difficili. Grazie mamma, perché mi chiami ogni giorno, perché anche se sbaglio mi lasci fare, grazie perché non hai mai dubitato di me; e grazie papà, perché nonostante tutto ci sei, grazie per come sei stato e per quello che mi hai lasciato dentro.