UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FERRARA
FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di laurea in Matematica

STRUTTURA MEDIANA E RAMIFICAZIONE DI ALBERI CON EVOLUZIONE TEMPORALE

Relatore:
Prof. Josef Eschgfäller

Laureanda:
Alessia Raimondi

Data dell'esame di laurea: 11 marzo 2005

INDICE

1. INSIEMI PARZIALMENTE ORDINATI

Bibliografia. Davey/Priestley, Erné.

Situazione 1.1. $X = (X, \leq)$ e $Y = (Y, \leq)$ siano insiemi parzialmente ordinati.

Definizione 1.2. Per $x, y \in X$ sia $x < y :\iff x \leq y$ e $x \neq y$.

Definiamo gli intervalli

$$\begin{aligned}
[x, y] &:= \{z \in X \mid x \leq z \leq y\} \\
[x, y) &:= \{z \in X \mid x \leq z < y\} \\
(x, y] &:= \{z \in X \mid x < z \leq y\} \\
(x, y) &:= \{z \in X \mid x < z < y\}
\end{aligned}$$

Inoltre siano

$S(x) := \{y \in X \mid x \leq y\}$
l'insieme dei *successori di x*,

$P(x) := \{y \in X \mid y \leq x\}$
l'insieme dei *predecessori di x* e

$L(x) := P(x) \cup S(x)$
il *lignaggio* di x.

Poniamo inoltre

$$\begin{aligned}
S^+(x) &:= S(x) \setminus x = \{y \in X \mid y > x\} \\
P^+(x) &:= P(x) \setminus x = \{y \in X \mid y < x\}
\end{aligned}$$

Più in generale poniamo

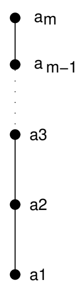
$$\begin{aligned}
P(A) &:= \bigcup_{x \in A} P(x) \\
S(A) &:= \bigcup_{x \in A} S(x) \\
L(A) &:= \bigcup_{x \in A} L(x)
\end{aligned}$$

$$\Pi(A) := \bigcap_{x \in A} P(x)$$
$$\Sigma(A) := \bigcap_{x \in A} S(x)$$
$$\Lambda(A) := \bigcap_{x \in A} L(x)$$

per $A \subset X$. Si osservi che $u \in \Sigma(A) \iff u \geq a$ per ogni $a \in A$.
In questo caso scriviamo anche $u \geq A$.
Similmente scriviamo $u \leq A$ se $u \leq a$ per ogni $a \in A$.

Definizione 1.3. Una *catena* di X è un sottoinsieme totalmente ordinato di X.

Una catena finita non vuota C possiede sempre un elemento più grande (naturalmente unico) che viene denotato con $\max(C)$. Se $C = \{a_1, \ldots, a_m\}$, scriviamo anche $max(a_1, \ldots, a_m)$.



Lemma di Zorn. *Se X non è vuoto e per ogni catena $C \neq \emptyset$ di X esiste un elemento u tale che $c \leq u$ per ogni $c \in C$, allora X possiede un elemento massimale.*

Proposizione 1.4. *Ogni catena di X è contenuta in una catena massimale.*

Dimostrazione. C sia una catena di X. Applichiamo il lemma di Zorn all'insieme di tutte le catene di X che contengono C, ordinato rispetto all'inclusione di insiemi. Questo insieme è non vuoto perchè contiene C come elemento.

Se consideriamo una catena β di catene contenenti C come sottoinsieme, è immediato che l'unione D degli elementi di β è ancora una catena che contiene C. Infatti se x, y sono elementi di D, allora esistono $K, L \in \beta$ tali che $x \in K$ e $y \in L$.

Siccome β è una catena, abbiamo, ad esempio, $K \subset L$, e quindi $x, y \in L$. Ma L è, per ipotesi, una catena rispetto all'ordine parziale dato su X, perciò ad esempio $x \leq y$.

Siccome $M \subset D$ per ogni $M \in \beta$, l'ipotesi del lemma di Zorn è soddisfatta.

Corollario 1.5. *Ogni elemento di X è contenuto in una catena massimale di X.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$. Allora $\{x\}$ è una catena di X.

Definizione 1.6. Una catena C di X si dice *saturata*, se non esistono $x, y \in C$ e $z \notin C$ con $x < z < y$ tali che $C \cup z$ sia ancora una catena.

Definizione 1.7. Un sottoinsieme A di X si dice *convesso* se vale la condizione

$x, y \in A \implies [x, y] \subset A$

Si noti che $[x, y] = \emptyset$, se non vale $x \leq y$.

Dalla transitività dell'ordine parziale segue che ogni intervallo, cioè ogni insieme della forma $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ o (a, b) è convesso.

Osservazione 1.8. *Siano $x, y \in X$. Allora:*

$$\begin{aligned} P(x) \subset P(y) &\iff x \leq y \\ P(x) = P(y) &\iff x = y \\ S(x) \subset S(y) &\iff y \leq x \\ S(x) = S(y) &\iff x = y \end{aligned}$$

Definizione 1.9. Sia A un sottoinsieme di X. Un elemento $u \in X$ si dice un *maggiorante* di A, se $a \leq u$ per ogni $a \in A$.

Osservazione 1.10. *$A_1, \ldots, A_k$ siano sottoinsiemi di X e $u_1, \ldots, u_k$ elementi di X tali che u_j sia un maggiorante di A_j per ogni j. Sia*

$v \in X$ un maggiorante di $\{u_1, \dots, u_k\}$, cioè $u_j \leq v$ per ogni j. Allora v è un maggiorante di $A_1 \cup \cdots \cup A_k$.

Dimostrazione. Sia $a \in A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Allora esiste un j tale che $a \in A_j$.

Per ipotesi $a \leq u_j \leq v$ e quindi $a \leq v$.

Osservazione 1.11. *C sia una catena di X e $\varphi : X \longrightarrow X$ un'applicazione monotona.*

Allora φC è una catena e, se $\max C$ esiste, allora $\varphi(\max C) = \max(\varphi C)$.

Dimostrazione. Siano $a, b \in \varphi C$ ed $a = \varphi c_1$ e $b = \varphi c_2$ con $c_1, c_2 \in C$. Allora, essendo C una catena, ad esempio $c_1 \leq c_2$ e dalla monotonia di φ segue $\varphi c_1 \leq \varphi c_2$, cioè $a \leq b$.

Siano ora $m = \max C$ ed $a = \varphi c$ con $c \in C$. Allora $c \leq m$, quindi $a = \varphi c \leq \varphi m$.

Definizione 1.12. Per un'applicazione f denotiamo con $\operatorname{Imm} f$ la sua immagine e, per $f \in X^X$, con

$$\operatorname{Fix} f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

l'insieme dei punti fissi di f.

Osservazione 1.13. *A sia un sottoinsieme convesso di X ed $x \in X$.*

Allora $A \setminus P(x)$ è convesso.

Dimostrazione. Siano $u, v \in A \setminus P(x)$ con $u \leq v$. Per ipotesi $[u, v] \subset A$.

Dobbiamo dimostrare che $[u, v] \cap P(x) = \emptyset$.

Sia $z \in [u, v] \cap P(x)$, cioè $u \leq z \leq v$ e $z \leq x$. Ciò implica $u \in P(x)$, una contraddizione.

Lemma 1.14. *A sia un sottoinsieme convesso e non vuoto di $[-\infty, \infty]$. Allora A è un intervallo.*

Più precisamente definiamo $a := \inf A$ e $b := \sup A$. Allora:

$$\begin{aligned}
A &= [a, b] \text{ se } a, b \in A \\
A &= (a, b] \text{ se } a \notin A \text{ e } b \in A \\
A &= [a, b) \text{ se } a \in A \text{ e } b \notin A \\
A &= (a, b) \text{ se } a, b \notin A
\end{aligned}$$

Dimostrazione. L'enunciato segue facilmente dall'ipotesi che A sia convesso. Cfr. Erné, pagg. 177-178.

Lemma 1.15. *Siano $A, B \subset X$. Allora $S(A) \cap P(B)$ è convesso.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in S(A) \cap P(B)$ con $x \leq y$. Allora esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a \leq x \leq y \leq b$. Sia $z \in [x, y]$. Allora $a \leq x \leq z \leq y \leq b$, quindi $z \in S(A) \cap P(B)$.

Osservazione 1.16. *C sia una catena di X.*

(1) Se esiste $\sup C$, allora $C \cup \sup C$ è una catena.

(2) Se esiste $\inf C$, allora $C \cup \inf C$ è una catena.

Dimostrazione. Chiaro.

Lemma 1.17. *X sia una catena ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione monotona e biiettiva. Allora f è un isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che f^{-1} è monotona.

Siano $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \leq y_2$ e $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Dobbiamo dimostrare che $x_1 \leq x_2$. Se non fosse così, si avrebbe però $x_1 > x_2$, perchè X è una catena.

Dalla monotonia di f e dalla biettività seguirebbe allora $y_1 > y_2$, una contraddizione.

2. ALBERI

Bibliografia. Davey/Priestley, Erné.

Definizione 2.1. L'insieme parzialmente ordinato X si chiama un *albero*, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $P(x)$ è una catena per ogni $x \in X$.
(2) Esiste un elemento *più piccolo* $q \in \bigcap\limits_{x \in X} P(x)$.

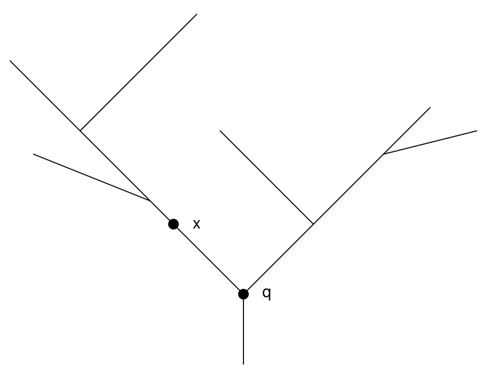
In particolare $X \neq \emptyset$.

Seguiamo qui Davey/Priestley, pag. 26.

q si chiama l' *origine* di X.

Per un sottoinsieme A di X sia

$$A^+ := A \setminus q.$$



Lemma 2.2. *X sia un albero, M una catena massimale di X ed $x \in M$.*

Allora $P(x) \subset M$.

Dimostrazione. Dimostriamo che l'unione $M \cup P(x)$ è ancora una catena.
Siano $a, b \in M \cup P(x)$.

(1) Se $a, b \in M$ oppure $a, b \in P(x)$, si ha, ad esempio, $a \leq b$ perchè sia M che $P(x)$ sono catene.
(2) Siano $a \in P(x)$ e $b \in M \setminus P(x)$. Allora $a \leq x$. Siccome M è una catena e per ipotesi $x \in M$, si ha $x \leq b$ oppure $b \leq x$. Ma $b \leq x$ significherebbe $b \in P(x)$, una contraddizione, quindi $x \leq b$. Ma allora $a \leq x \leq b$ implica $a \leq b$.

Corollario 2.3. *Ogni catena massimale di un albero è convessa.*

Corollario 2.4. *X sia un albero, M una catena massimale di X ed $x \in X$.*

Allora $M \setminus P(x)$ è convesso.

Dimostrazione. M è convessa per il corollario 2.3. Per l'osservazione 1.13 anche $M \setminus P(x)$ è convesso.

Lemma 2.5. *X sia un albero e C una catena di X. Allora sono equivalenti:*

(1) C è convessa.
(2) C è saturata.
(3) Per ogni catena massimale M contenente C vale

$$[x, y] \cap M = [x, y] \cap C \text{ per ogni } x, y \in C.$$

(4) Esiste una catena massimale M tale che

$$[x, y] \cap M = [x, y] \cap C \text{ per ogni } x, y \in C.$$

E' chiaro che allora $C \subset M$.

(5) Per ogni $x, y \in C$ esiste una catena massimale M tale che

$$[x, y] \cap M = [x, y] \cap C.$$

Dimostrazione. $(1) \implies (2)$: Siano $x, y \in C$ e $z \in X$ tali che $x < z < y$. Per ipotesi si ha $z \in C$, e quindi la condizione della definizione 1.6 è banalmente soddisfatta.

$(2) \implies (1)$: Siano $x, y \in C$ e $z \notin C$ con $x < z < y$. Sia $a \in C$. Siccome C è una catena si ha $a > y$ oppure $a \leq y$. Se $a > y$, allora $z < a$. Se invece $a \leq y$, allora a e z appartengono entrambi alla catena $P(y)$ e sono quindi confrontabili.

Ciò mostra che $C \cup z$ è una catena, in contraddizione all'ipotesi.

$(1) \implies (3)$: C sia convessa e M una catena massimale con $C \subset M$. Siano $x, y \in C$. Per ipotesi $[x, y] \subset C$. Allora $C \cap M = C$ e $[x, y] \cap C = [x, y]$, quindi $[x, y] \cap M = [x, y] \cap C \cap M = [x, y] \cap C$.

(3) $\implies$ (4): Chiaro, perchè per il corollario 1.5 esiste almeno una catena massimale che contiene C.

(4) $\implies$ (5): Chiaro.

(5) $\implies$ (1): Siano $x, y \in C$ e supponiamo $x \leq y$. Per ipotesi esiste una catena massimale M con $[x, y] \cap M = [x, y]$. Siccome $y \in [x, y] \cap C$, ciò implica $y \in M$. Per il lemma 2.2 $[x, y] \subset P(y) \subset M$, e quindi $[x, y] = [x, y] \cap M = [x, y] \cap C$, per cui $[x, y] \subset C$.

Osservazione 2.6. $S(x) \cap S(y) \neq \emptyset \implies x \leq y$ *oppure* $y \leq x$.

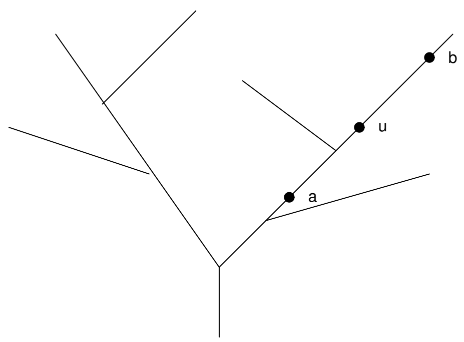
Dimostrazione. Sia $z \in S(x) \cap S(y)$. Allora $x, y \in P(z)$ e l'enunciato segue dall'ipotesi che X sia un albero.

Lemma 2.7. *X sia un albero ed $a, b, u \in X$ con $u \in [a, b]$ (e quindi $a \leq b$). Allora $[a, b] = [a, u] \cup [u, b]$.*

Dimostrazione. Sia $x \in [a, b]$. Allora u e x appartengono alla catena $P(b)$, per cui $u \leq x$ oppure $x \leq u$.

Se $u \leq x$ allora $x \in [u, b]$, se invece $x \leq u$ allora $x \in [a, u]$.

Viceversa la transitività dell'ordine parziale implica$[a, u] \subset [a, b]$ e $[u, b] \subset [a, b]$, per cui $[a, u] \cup [u, b] \subset [a, b]$.



3. SEMIRETICOLI

Bibliografia. Davey/Priestley, Erné, Bandelt/Hedlíková.

Definizione 3.1. Un insieme parzialmente ordinato X si chiama un *semireticolo* (inferiore), se per ogni $a, b \in X$ esiste un elemento $u \in X$ tale che

$P(a) \cap P(b) = P(u)$

Per l'osservazione 1.8 $u =: a \wedge b$ è allora univocamente determinato e si chiama l' *inf* di a e b.

Più avanti scriveremo $ab := a \wedge b$. Con quella notazione abbiamo quindi

$P(a) \cap P(b) = P(ab)$

Osservazione 3.2. *X sia un semireticolo ed $a, b, c \in X$. Allora*

$$\begin{aligned} & a \wedge a = a \\ & a \wedge b = b \wedge a \\ & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \end{aligned}$$

$(X, \wedge)$ è quindi un semigruppo commutativo, in cui ogni elemento è idempotente.

<u>Dimostrazione.</u> I primi due enunciati sono evidenti.

Dimostriamo l'associatività.

$P(a \wedge (b \wedge c)) = P(a) \cap P(b \wedge c) = P(a) \cap P(b) \cap P(c)$, ma questo per simmetria è anche uguale a $P((a \wedge b) \wedge c)$.

Corollario 3.3. *X sia un semireticolo e $a_1, \ldots, a_m \in X$. Allora*

$P(a_1) \cap \cdots \cap P(a_m) = P(a_1 \wedge \cdots \wedge a_m)$

Osservazione 3.4. *X sia un semireticolo ed $a, b \in X$. Allora*

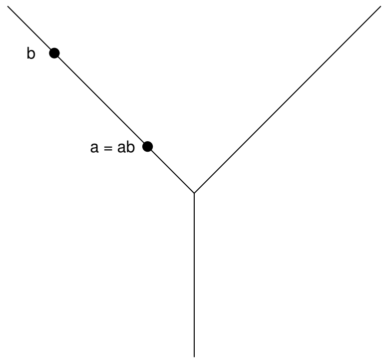
$a \leq b \iff ab = a$

<u>Dimostrazione.</u> Ognuno dei seguenti enunciati implica quello successivo.

$a \leq b$

$P(a) \subset P(b)$

$P(a) \cap P(b) = P(a)$
$a \in P(b)$
$a \leq b.$



Proposizione 3.5. $(X, \cdot)$ *sia un semigruppo commutativo in cui ogni elemento è idempotente. Se per* $a, b \in X$ *poniamo allora* $a \leq b :\Longleftrightarrow ab = a$*, otteniamo un ordine parziale su* X*.* $(X, \leq)$ *è un semireticolo in cui* $a \wedge b = ab$*.*

Useremo perciò la notazione abbreviata $ab := a \wedge b$ *anche in un semireticolo.*

Dimostrazione.

(1) La riflessività segue da $aa = a$.
(2) $a \leq b \leq a$ significa $ab = a$ e $ba = b$ e dalla commutatività segue $a = b$.
(3) Sia $a \leq b \leq c$. Allora $ab = a$ e $bc = b$, per cui $ac = abc = ab = a$ e quindi $a \leq c$.
Ciò mostra che $\leq$ è un ordine parziale su X.
(4) Per definizione $ab \in P(a) \cap P(b)$. Sia invece $x \in X$ con $x \in P(a) \cap P(b)$, cioè $ax = bx = x$. Allora $abx = ax = x$ e quindi $x \leq ab$.

Proposizione 3.6. *X sia un semireticolo. Allora il quasiordine costruito secondo la proposizione 3.5 rispetto al semigruppo* $(X, \wedge)$ *coincide con* $\leq$ *.*

Dimostrazione. Segue dalla proposizione 3.5 e dall'osservazione 1.8.

Osservazione 3.7. *X sia un semireticolo. Allora*

$$a \leq b \text{ e } c \leq d \implies ac \leq bd$$

In particolare $a \leq b \implies ac \leq bc$.

Dimostrazione. Abbiamo $ab = a$ e $cd = c$, e quindi $acbd = abcd = ac$ per cui $ac \leq bd$.

Lemma 3.8. *X sia un semireticolo. C e D siano catene non vuote.*

Allora $CD := \{cd \mid c \in C, d \in D\}$ *è una catena non vuota e, se* $\max(C)$ *e* $\max(D)$ *esistono,*

$$\max(CD) = \max(C)\max(D).$$

In particolare

$$\max(aC) = a\max(C) \text{ per ogni } a \in X.$$

Dimostrazione.

(1) Siano $u, v \in CD$ con $u = c_1d_1, v = c_2d_2$ con $c_1, c_2 \in C$ e $d_1, d_2 \in D$. Allora, ad esempio, $c_1 \leq c_2$ e $d_1 \leq d_2$, per cui $c_1d_1 \leq c_2d_2$. Ciò mostra che CD è una catena, naturalmente non vuota.

(2) Siano $m := \max(C)$ e $n := \max(D)$. Per ogni $c \in C$ e $d \in D$ abbiamo allora $c \leq m$ e $d \leq n$ e quindi $cd \leq mn$.

Nota 3.9. Un semigruppo che possiede un (necessariamente unico) elemento zero q (cioè tale che $qx = q$ per ogni $x \in X$) si chiama un *semigruppo con zero*.

In un semireticolo $(X, \leq)$ un elemento q è un elemento zero se e solo se q è l'elemento più piccolo di X.

Definizione 3.10. X e Y siano insiemi parzialmente ordinati e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. f si chiama:

(1) un *omomorfismo di insiemi parzialmente ordinati*, se $a \leq b$ in X implica $f(a) \leq f(b)$ in Y, gli omomorfismi di insiemi parzialmente ordinati sono quindi esattamente le applicazioni *monotone*;

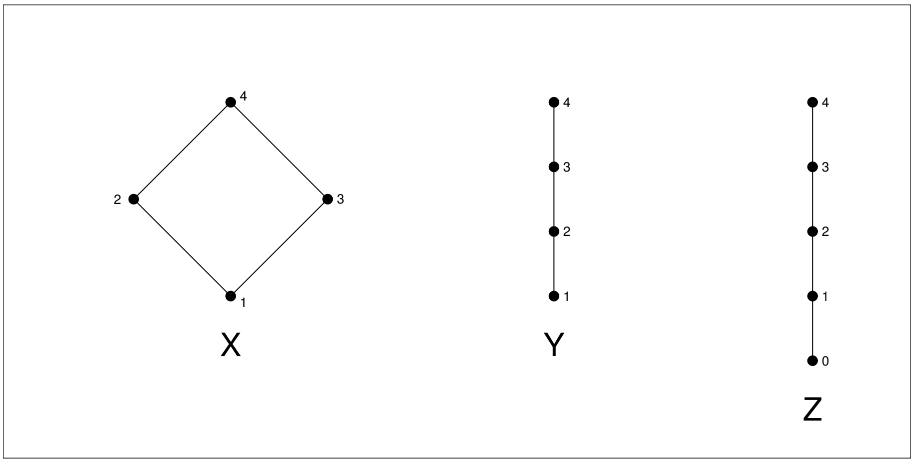
(2) un *omomorfismo di semigruppi* (o di semireticoli), se X e Y sono semireticoli e $f(ab) = f(a)f(b)$ per ogni $a, b \in X$;

(3) un *omomorfismo di semigruppi con zero*, se X e Y sono semireticoli con elementi più piccoli q ed r ed f è un omomorfismo di semigruppi tale che $f(q) = r$.

Osservazione 3.11. *X e Y siano semireticoli ed $f : X \longrightarrow Y$ un omomorfismo di semigruppi. Allora f è monotona.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in X$ tali che $a \leq b$. Allora $ab = a$, quindi, essendo f un omomorfismo di semireticoli, $f(a)f(b) = f(ab) = f(a)$ per cui $f(a) \leq f(b)$.

Nota 3.12. Siano $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Z = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con gli ordini parziali indicati nelle figure. $f : X \longrightarrow Y$ sia l'identità e $g : Y \longrightarrow Z$ l'inclusione. E' evidente che X, Y e Z sono semireticoli con zero (sono effettivamente reticoli completi). Allora f è monotona, ma non è un omomorfismo di semigruppi, e g è un omomorfismo di semigruppi, ma non è un omomorfismo di semigruppi con zero.



Lemma 3.13. *X e Y siano semireticoli ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione monotona. Allora $f(ab) \leq f(a)f(b)$ per ogni $a, b \in X$.*

Dimostrazione. Sia $x := ab$. La monotonia di f implica $f(x) \leq f(a)$ e $f(x) \leq f(b)$.

Dall'osservazione 3.7 segue $f(x) \leq f(a)f(b)$.

Proposizione 3.14. *X e Y siano semireticoli e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione biettiva e g la sua inversa. Allora sono equivalenti:*

(1) *f è un isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati, cioè sia f che g sono monotone.*

(2) *f è un omomorfismo di semigruppi.*

(3) *f è un isomorfismo di semigruppi, cioè sia f che g sono omomorfismi di semigruppi.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Siano $a, b \in X$ e $u := f(a), v := f(b)$. Allora $g(u) = a, g(v) = b$. Applicando il lemma 3.13 prima a g abbiamo $g(uv) \leq g(u)g(v) = ab$. Applicando la f si ha $f(a)f(b) = f(g(f(a)f(b))) \leq f(ab)$, e sempre per il lemma 3.13 si ha $f(ab) \leq f(a)f(b)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Con le stesse notazioni abbiamo: $g(uv) = g(f(a)f(b)) = g(f(ab)) = ab = g(u)g(v)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Chiaro.

Osservazione 3.15. *X sia un semigruppo con zero, Y un semigruppo e $f : X \longrightarrow Y$ un omomorfismo suriettivo di semigruppi. Allora anche Y è un semigruppo con zero e f è un omomorfismo di semigruppi con zero.*

Dimostrazione. q sia l'elemento zero di X. Dobbiamo dimostrare che $f(q)$ è l'elemento zero di Y. Sia $y \in Y$. Allora esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$, quindi $f(q)y = f(q)f(x) = f(qx) = f(q)$.

Proposizione 3.16. *X e Y siano semigruppi e $f : X \longrightarrow Y$ un omomorfismo suriettivo. Allora X/f è in modo naturale un semigruppo con la composizione ben definita*

$$[a][b] := [ab]$$

dove $[a] = \{x \in X \mid f(x) = f(a)\}$ denota la classe di equivalenza di $a \in X$, e f induce un isomorfismo naturale

$$\bigcirc_{[a]} f(a) : X/f \longrightarrow Y$$

Dimostrazione. Corso di Algebra.

Osservazione 3.17. *X sia un semireticolo e x un elemento fissato di X. Allora*

$$P(x) = \{a \in X \mid ax = a\}$$
$$S(x) = \{a \in X \mid ax = x\}$$

Inoltre

$$X \setminus P(x) = \{a \in X \mid ax < a\}$$
$$X \setminus S(x) = \{a \in X \mid ax < x\}$$

Proposizione 3.18. *X sia un semireticolo e x un elemento fissato di X. Per ogni $a \in X$ abbiamo $ax \in P(x)$. Possiamo perciò definire un'applicazione*

$$\pi_x := \bigcirc_a ax : X \longrightarrow P(x)$$

π_x è un omomorfismo suriettivo di semigruppi e induce quindi un isomorfismo naturale $X/\pi_x \cong P(x)$.

Inoltre π_x coincide con l'identità su $P(x)$, infatti

$$\{a \in X \mid \pi_x(a) = a\} = P(x)$$

<u>Dimostrazione.</u> L'ultima affermazione segue dall'osservazione 3.17 e implica la suriettività. Rimane da dimostrare che π_x è un omomorfismo. Siano $a, b \in X$. Allora, sfruttando la commutatività e l'idempotenza della moltiplicazione in un semireticolo, abbiamo $\pi_x(ab) = abx = axbx = \pi_x(a)\pi_x(b)$.

Lemma 3.19. *X sia un semireticolo e $a, x \in X$. Allora sono equivalenti:*

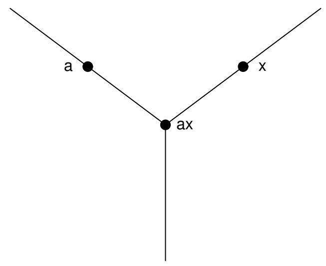
(1) Gli elementi a, x e ax sono tutti e tre distinti.
(2) $a \notin L(x)$.
(3) $ax < a$ e $ax < x$.

Ricordiamo che $L(x)$ è l'insieme degli elementi confrontabili con x.

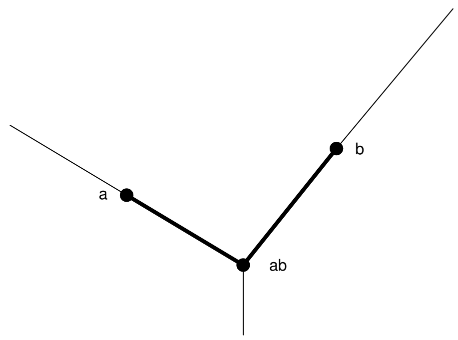
<u>Dimostrazione.</u> $(1) \implies (2)$: a, x e ax siano tutti e tre distinti. Allora $ax \neq a$ implica $a \notin P(x)$ e $ax \neq x$ implica $a \notin S(x)$. Da ciò segue $a \notin L(x)$.

$(2) \implies (3)$: Sia $a \notin L(x)$, allora $a \in X \setminus P(x)$, cioè $ax < a$, e $a \in X \setminus S(x)$, cioè $ax < x$.

$(3) \implies (1)$: Sia $ax < a$ e $ax < x$. Se a, x e ax non sono tutti e tre distinti, necessariamente $a = x$. Ma allora $ax = a^2 = a$.



Definizione 3.20. X sia un semireticolo. $\mathcal{C}(a,b) := [a, ab] \cup [ab, b]$ si chiama il *cammino* tra a e b.



Osservazione 3.21. *X sia un semireticolo e $a, b \in X$. Mentre $[a,b] \neq \emptyset$ se e solo se $a \leq b$, si ha sempre $a, b, ab \in \mathcal{C}(a,b)$.*

Dimostrazione. Infatti $a, ab \in [a, ab]$ e $b \in [ab, b]$.

Osservazione 3.22. *X sia un semireticolo e $a, b \in X$ con $a \leq b$.*

Allora $\mathcal{C}(a,b) = [a,b]$.

Osservazione 3.23. *X sia un semireticolo e $a, b \in X$. Allora*

$$\mathcal{C}(a,b) = (P(a) \cup P(b)) \cap S(ab).$$

In particolare si ha sempre

$\mathcal{C}(a,b) \subset P(a) \cup P(b)$

$\mathcal{C}(a,b) \subset S(ab)$

Osservazione 3.24. *X sia un semireticolo e $a, b \in X$.*

Allora $\mathcal{C}(a,b) \cap P(ab) = \{ab\}$.

Dimostrazione. Chiaramente $ab \in \mathcal{C}(a,b) \cap P(ab)$ (cfr. oss. 3.21).

Viceversa $\mathcal{C}(a,b) \cap P(ab) \subset S(ab) \cap P(ab) = \{ab\}$.

Definizione 3.25. Un sottoinsieme A di un semireticolo X si dice *fortemente convesso*, se vale la condizione

$$x, y \in A \implies \mathcal{C}(x,y) \subset A$$

Lemma 3.26. *X sia un semireticolo. Per un sottoinsieme $A \subset X$ sono allora equivalenti:*

(1) A è fortemente convesso.

(2) A è un sottosemigruppo convesso di X.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Siano $a, b \in A$. Se non vale $a \leq b$, allora $[a,b] = \emptyset \subset A$. Se invece $a \leq b$, allora $[a,b] = \mathcal{C}(a,b) \subset A$ per ipotesi. Quindi A è convesso.

Inoltre $ab \in \mathcal{C}(a,b) \subset A$.

(2) $\implies$ (1): Siano $a, b \in A$. Essendo A un sottosemigruppo, abbiamo $ab \in A$. Per ipotesi $\mathcal{C}(a,b) = [a, ab] \cup [ab, b] \subset A$.

Proposizione 3.27. *X sia un semireticolo e $a, b \in X$. Allora $\mathcal{C}(a,b)$ è fortemente convesso.*

Dimostrazione. Usiamo il lemma 3.26.

Dimostriamo che $\mathcal{C}(a,b)$ è un sottosemigruppo di X.

Per ogni $x \in X$, si ha

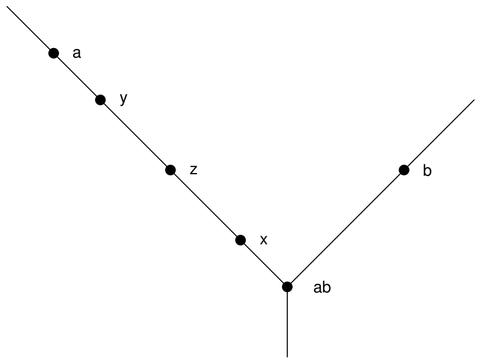
$$x(P(a) \cup P(b)) \subset P(a) \cup P(b),$$

quindi $P(a) \cup P(b)$ è un sottosemigruppo (infatti è un ideale, cfr. oss. 3.33).

Dall'osservazione 3.7 segue che anche $S(ab)$ è un sottosemigruppo, e siccome l'intersezione di due sottosemigruppi di un semigruppo è ancora un sottosemigruppo, l'osservazione 3.23 implica che $\mathcal{C}(a,b)$ è un sottosemigruppo.

Dimostriamo che $\mathcal{C}(a,b)$ è convesso.

Sia $x \leq z \leq y$ con $x, y \in \mathcal{C}(a,b)$. Allora $ab \leq x$ e, ad esempio, $y \leq a$. Ciò implica $ab \leq z \leq a$, per cui $z \in \mathcal{C}(a,b)$.



Osservazione 3.28. *C sia una catena di X. Allora sono equivalenti:*

(1) C è convessa.

(2) C è fortemente convessa.

Definizione 3.29. X sia un semireticolo e $f : X \longrightarrow X$ un'applicazione.

f si chiama una *traslazione*, se

$$f(ab) = af(b)$$

per ogni $a, b \in X$.

Lemma 3.30. *X sia un semireticolo. Per un'applicazione $f : X \longrightarrow X$ sono allora equivalenti:*

(1) f è una traslazione.

(2) f è un omomorfismo idempotente di semigruppi tale che

$$P(\mathrm{Imm}\, f) \subset \mathrm{Imm}\, f.$$

<u>Dimostrazione.</u> (1) $\Longrightarrow$ (2): f sia una traslazione.

Dimostriamo prima l'idempotenza. Per ogni $a \in X$ si ha

$f(a) = f(a^2) = af(a)$.

Quindi $f(f(a)) = f(af(a)) = f(a)f(a) = f(a)$.

Dimostriamo che f è un omomorfismo di semigruppi.

Siano $a, b \in X$. Allora

$f(ab) = f(f(ab)) = f(af(b)) = f(a)f(b)$.

Sia infine $a \leq f(b)$ con $b \in X$. Allora

$a = af(b) = f(ab) \in \operatorname{Imm} f$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Per $a, b \in X$ abbiamo $af(b) \leq f(b)$. Per ipotesi $af(b) \in \operatorname{Imm} f$, e l'idempotenza di f implica

$af(b) = f(af(b)) = f(a)f^2(b) = f(a)f(b) = f(ab)$

quindi f è una traslazione.

Definizione 3.31. X sia un semigruppo commutativo. Un *ideale* di X è un sottoinsieme non vuoto di X tale che $XI \subset I$.

In particolare allora $II \subset I$, quindi ogni ideale è un sottosemigruppo.

Osservazione 3.32. *X sia un semireticolo ed I un sottoinsieme non vuoto di X. Allora sono equivalenti:*

(1) I è un ideale di X.

(2) $P(a) \subset I$ per ogni $a \in I$.

Ciò implica in particolare che ogni ideale in un semireticolo X con zero contiene l'elemento più piccolo di X.

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Siano $a \in I$ ed $x \leq a$. Allora $x = xa \in XI \subset I$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Siano $a \in I$ ed $x \in X$. Allora $xa \in P(a) \subset I$.

Osservazione 3.33. *X sia un semigruppo commutativo, A un sottosemigruppo di X ed I un ideale di X. Allora $A \cup I$ è un sottosemigruppo di X.*

Dimostrazione. Infatti $(A \cup I)(A \cup I) \subset AA \cup I \subset A \cup I$.

Osservazione 3.34. *X sia un semigruppo commutativo ed α un insieme di ideali di X. Allora $\bigcup\limits_{I \in \alpha} I$ è un ideale di X.*

Dimostrazione. Infatti $X \bigcup_{I \in \alpha} I \subset \bigcup_{I \in \alpha} XI \subset \bigcup_{I \in \alpha} I$.

Osservazione 3.35. *X sia un semireticolo, A un sottosemigruppo e B un sottoinsieme di X.*

Allora $S(A) \cap P(B)$ è fortemente convesso.

Dimostrazione. Per i lemmi 1.15 e 3.26 è sufficiente dimostrare che $S(A) \cap P(B)$ è un sottosemigruppo di X.

Siano $x,\ y \in S(A) \cap P(B)$. E' chiaro che allora anche $xy \in P(B)$. Inoltre esistono $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \leq x$ e $a_2 \leq y$. Ciò implica $a_1 a_2 \leq xy$. Per ipotesi $a_1 a_2 \in A$, quindi $xy \in S(A)$.

Lemma 3.36. *X ed Y siano semireticoli ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione monotona tale che per $u, v \in X$ con $u \leq v$ si abbia sempre $[f(u), f(v)] \subset f([u,v])$. A sia un sottoinsieme fortemente convesso di X. Allora $f(A)$ è un sottoinsieme fortemente convesso di Y.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in A$. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{C}(f(a), f(b)) \subset f(A)$.

Per il lemma 3.13 abbiamo $f(ab) \leq f(a)f(b)$ e quindi $\mathcal{C}(f(a), f(b)) = [f(a)f(b), f(a)] \cup [f(a)f(b), f(b)] \subset [f(ab), f(a)] \cup [f(ab), f(b)]$.

Siccome $ab \leq a$, l'ipotesi del lemma implica $[f(ab), f(a)] \subset f([ab, a])$. A è fortemente convesso, perciò $[ab, a] \subset A$, per cui $f([ab, a]) \subset f(A)$.

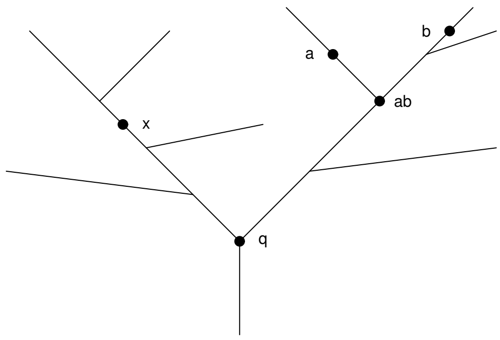
Nello stesso modo si dimostra che $[f(ab), f(b)] \subset f(A)$.

4. ALBERI CON INTERSEZIONE

Situazione 4.1. X sia un insieme parzialmente ordinato e $a, b, c, \dots \in X$.

Definizione 4.2. X si chiama un *albero con intersezione* se è un albero e allo stesso tempo un semireticolo.

In inglese il termine più usato è *tree semilattice*.



Nota 4.3. Diamo un esempio di un albero che non è un albero con intersezione.

Sia $X := [0, 1) \cup \{u, v\}$, dove u e v sono due elementi distinti tra loro che non appartengono all'intervallo reale $[0, 1)$. In $[0, 1)$ usiamo l'ordine $\leq$ numerico comune; inoltre poniamo $t \leq u$ e $t \leq v$ per ogni $t \in [0, 1)$. Allora $(X, \leq)$ è un albero, ma $P(u) \cap P(v) = [0, 1)$ non possiede un elemento massimo.

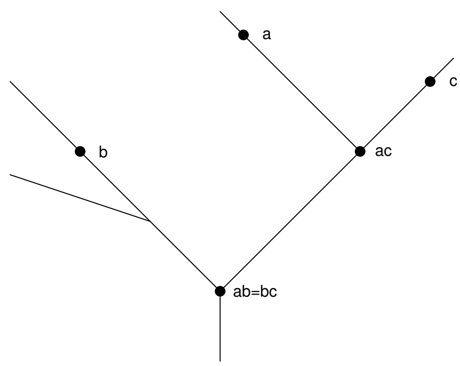
Lemma 4.4. *X sia un albero con intersezione. Allora almeno due degli elementi dell'insieme $\{ab, ac, bc\}$ sono uguali e predecessori del terzo. Dopo una permutazione di a, b, c si ha quindi sempre la situazione: $ab = bc \leq ac$.*

In particolare vediamo che $\{ab, ac, bc\}$ è sempre una catena.

Dimostrazione. ab e bc appartengono alla catena $P(b)$ e quindi ad esempio, $ab \leq bc$, per cui $abc = ab$.

ac e bc appartengono alla catena $P(c)$ e quindi $bc \leq ac$ oppure $ac \leq bc$.

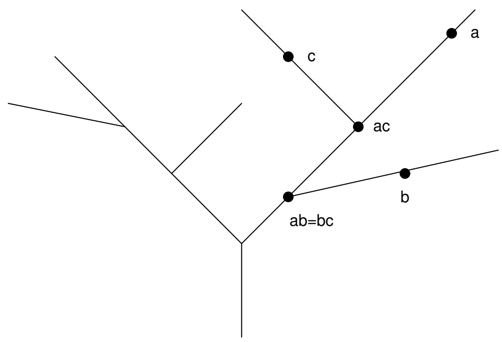
(1) Sia $bc \leq ac$. Allora $abc = bc$, per cui $ab = ba \leq ac$.
(2) Sia $ac \leq bc$. Allora $abc = ac$, per cui $ac = ab \leq bc$.



Lemma 4.5. *Se X è un albero con intersezione, allora*

$$ab < ac \implies bc = ab$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal lemma 4.4

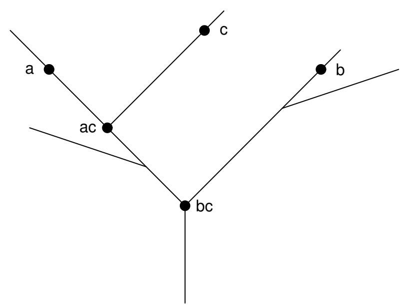


Osservazione 4.6. *X sia un albero con intersezione. Allora*

$$\max(ac, bc) = \max \mathcal{C}(a,b)c$$

Dimostrazione. $\{ac, bc\}$ e $\mathcal{C}(a,b)c$ sono sottoinsiemi di $P(c)$ e quindi catene. Siccome $a, b \in \mathcal{C}(a,b)$, è sufficiente dimostrare che per ogni $x \in \mathcal{C}(a,b)$ si ha $xc \leq ac$ oppure $xc \leq bc$.

Ma per $x \in \mathcal{C}(a,b)$ si ha ad esempio $x \leq a$, allora $xc \leq ac$.



Proposizione 4.7. *X sia un semireticolo con zero. Allora sono equivalenti:*

(1) X è un albero (e quindi un albero con intersezione).

(2) Per ogni $a, b, c \in X$ si ha sempre

$$abc \in \{ab, bc\} \cap \{ac, bc\} \cap \{ab, ac\}.$$

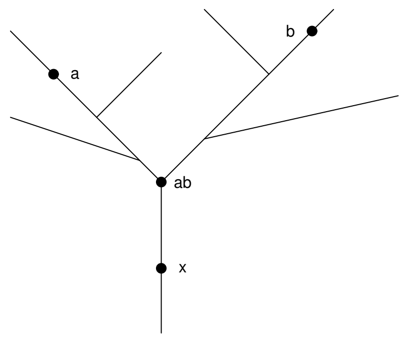
Dimostrazione. X sia un albero. Per il lemma 4.4 possiamo assumere che $ab = bc \leq ac$. Allora $abc = ab = bc$, e ciò implica la condizione (2).

Assumiamo che la (2) sia soddisfatta. Siano $a \in X$ e $x, y \in P(a)$. Per ipotesi si ha, ad esempio, $axy = ax$. Allora $xy = axy = ax = x$, per cui $x \leq y$.

Lemma 4.8. *X sia un albero con intersezione.*

Allora $x \leq a$ e $x \notin \mathcal{C}(a,b) \implies x < ab$.

Dimostrazione. ab e x appartengono alla catena $P(a)$. Perciò $ab \leq x$ oppure $x < ab$. Ma $ab \leq x$ implica $x \in [ab, a] \subset \mathcal{C}(a,b)$, una contraddizione.



Osservazione 4.9. *X sia un albero con intersezione. Allora*

$P(a) \cup P(b) \subset P(ab) \cup S(ab)$

Dimostrazione. Sia $x \in P(a)$. Allora x e ab appartengono entrambi alla catena $P(a)$, perciò $ab \leq x$ oppure $x \leq ab$.

Osservazione 4.10. *X sia un albero con intersezione. Allora*

$P(a) \cup P(b) = \mathcal{C}(a,b) \cup P(ab)$

Dimostrazione. Sia ad esempio $x \in P(a)$. Per l'osservazione 4.9 ciò implica $x \in P(ab)$ oppure $x \in S(ab)$.

Nel secondo caso abbiamo $x \in [ab, a] \subset \mathcal{C}(a,b)$.

Viceversa, $P(ab) \subset P(a) \cup P(b)$ (cfr. oss.1.8), mentre dall'osservazione 3.21 sappiamo anche che $\mathcal{C}(a,b) \subset P(a) \cup P(b)$.

Proposizione 4.11. *X sia un albero con intersezione. L'insieme $\{ax, ay, az, xyz\}$ è sempre una catena con al massimo tre elementi. Se gli elementi ax, ay, az non coincidono, allora xyz è uguale al più piccolo di essi; altrimenti $ax = ay = az \leq xyz$.*

Dimostrazione. L'insieme $\{ax, ay, az\}$ è una catena, perchè è un sottoinsieme della catena $P(a)$.

(1) Assumiamo prima che i tre elementi non siano tutti uguali. Allora abbiamo, a meno di una permutazione di x, y, z, ad esempio $ax \leq ay < az$ oppure $ax < ay \leq az$.

Nel primo caso, per il lemma 4.5, si ha $yz = ay$ e quindi

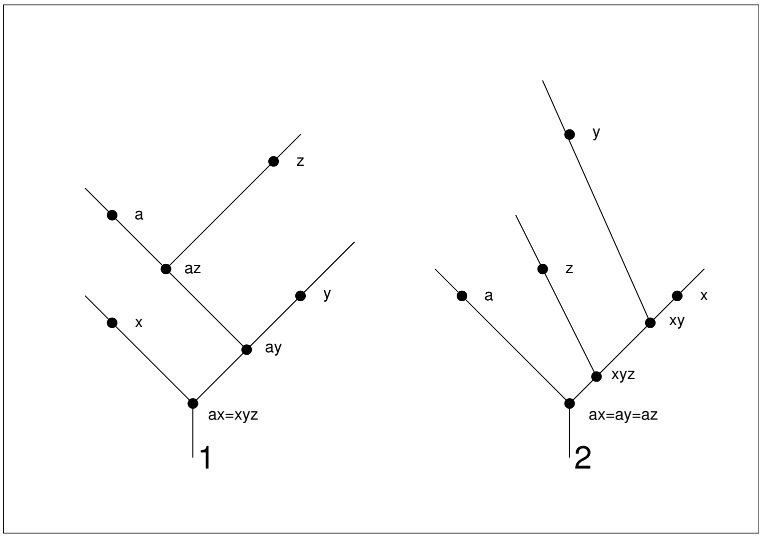
$xyz = axy = aaxay = ax$, perciò $xyz = \min(ax, ay, az)$.

Nel secondo caso, per il lemma 4.4, abbiamo $xy = ax$ e quindi

$xyz = axz = axaz = ax$,

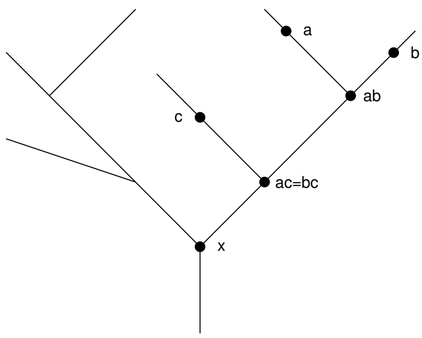
perciò anche in questo caso $xyz = \min(ax, ay, az)$.

(2) Sia $ax = ay = az$. Allora $ax = axayaz = axyz \leq xyz$.



Lemma 4.12. *X sia un albero con intersezione. Se $x < ab$ e $x < bc$, allora $x < ac$.*

<u>Dimostrazione.</u> Usiamo i lemmi 4.4 e 4.5. L'insieme $\{ab, ac, bc\}$ è una catena, quindi $ab \leq ac$ oppure $ac < ab$. Se $ab \leq ac$, allora $x < ac$. Se invece $ac < ab$, allora $ac = bc > x$.



Corollario 4.13. *X sia un albero con intersezione. Allora ogni unione di catene massimali di X è un ideale di X.*

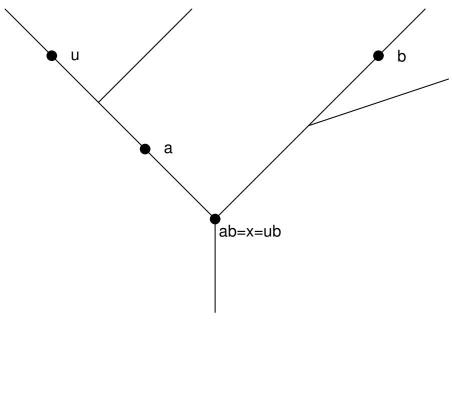
Dimostrazione. Per il lemma 2.2 e l'osservazione 3.32 ogni catena massimale di X è un ideale.

L'enunciato segue dall'osservazione 3.34.

Lemma 4.14. *X sia un albero con intersezione. Siano $a \in S^+(x)$ e $b \in X$ con $ab = x$ e sia $u \geq a$. Allora $ub = x$.*

Dimostrazione. $u \geq a$ implica $ub \geq ab = x$. Sia $ub > x$.

Siccome $au = a > x$, dal lemma 4.12 segue $ab > x$, una contraddizione.



Lemma 4.15. *X sia un albero ed A un sottoinsieme convesso di X. Se esiste* $\sup A$*, allora* $P(\sup A) \cap S(A) = A \cup \sup A$.

Dimostrazione. Poniamo $u := \sup A$. Allora $u \geq A$ e quindi $A \subset P(u)$, e siccome $A \subset S(A)$, abbiamo $A \subset P(u) \cap S(A)$.

Sia $x \in P(u) \cap S(A)$. Ciò implica che esiste un $a \in A$ tale che $a \leq x \leq u$. Se $x \geq A$, allora $x = u$ per la definizione di $\sup$.

Altrimenti esiste un $b \in A$ tale che $b \notin P(x)$. Ma x e b appartengono entrambi alla catena $P(u)$, perciò $x \leq b$, per cui $x \in [a, b] \subset A$ (perchè A è convesso), e quindi $x \in A$.

Corollario 4.16. *X sia un albero e A un sottoinsieme convesso di X. Se esiste* $\sup A$*, allora* $A \cup \sup A$ *è convesso.*

Dimostrazione. Ciò segue dai lemmi 4.15 e 1.15.

Lemma 4.17. *X sia un albero con intersezione ed A un sottoinsieme fortemente convesso di X. Se esiste* $\inf A$*, allora* $S(\inf A) \cap P(A) = A \cup \inf A$.

Dimostrazione. Poniamo $u := \inf A$. Allora $u \leq A$, perciò $A \subset S(u)$, e siccome $A \subset P(A)$, abbiamo $A \subset S(u) \cap P(A)$.

Sia $x \in S(u) \cap P(A)$. Ciò implica che esiste un $a \in A$ tale che $u \leq x \leq a$. Se $x \leq A$, allora $x = u$ per la definizione di $\inf$.

Altrimenti esiste un $b \in A$ tale che $x \notin P(b)$. La forte convessità di A implica che $ab \in A$, quindi x ed ab appartengono entrambi alla catena $P(a)$, perciò $x \leq ab$ oppure $ab \leq x$. Il primo caso implicherebbe la contraddizione $x \leq b$, cosicchè necessariamente $ab \leq x$. Ma allora $x \in [a, b] \subset A$ per la convessità di A.

Corollario 4.18. *X sia un albero con intersezione ed A un sottoinsieme fortemente convesso di X. Se esiste* $\inf A$*, allora* $A \cup \inf A$ *è fortemente convesso.*

Dimostrazione. Ciò segue dal lemma 4.17 e dall'osservazione 3.35.

5. ALGEBRA MEDIANA

Bibliografia. Bandelt/Hedlíková, Sholander, Isbell, van de Vel, Verheul.

Situazione 5.1. X sia un albero con intersezione e con origine q. Quando non indicato diversamente, $a, b, c, \dots, x, y, \dots \in X$.

Definizione 5.2. L'elemento

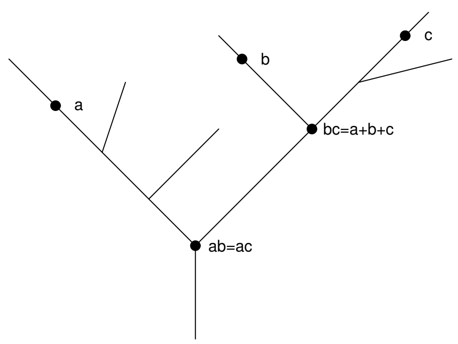
$$a + b + c := \max(ab, ac, bc)$$

univocamente determinato per il lemma 4.4, si chiama il *mediano* di a, b, c.

Nella letteratura questo elemento viene spesso denotato con $m(a, b, c)$; in questo modo è definita allora un'applicazione

$$m : X \times X \times X \longrightarrow X$$

La coppia (X, m) si chiama l' *algebra mediana* di X.



Osservazione 5.3. *Sia* $x \leq ab$. *Allora*

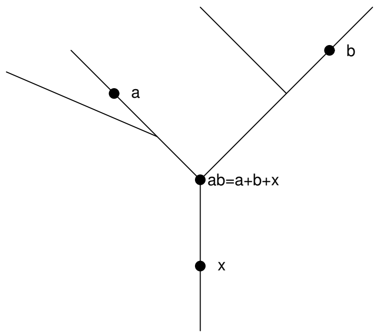
$$a + b + x = ab$$

In particolare

$a + b + q = a + b + ab = ab$

Dimostrazione. Per l'osservazione 3.7 si ha $ax \leq ab$ e $bx \leq ab$.

Perciò $\max(ab, ax, bx) = ab$.



Osservazione 5.4. *Sono equivalenti:*

(1) $ax = bx$

(2) $ax, bx \leq ab$

(3) $a + b + x = ab$

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) segue dal lemma 4.4, l'equivalenza tra (2) e (3) è una conseguenza immediata della definizione 5.2.

Osservazione 5.5. $S(a + b + c) = S(ab) \cap S(ac) \cap S(bc)$

Dimostrazione. Sia ad esempio $ab = bc \leq ac$.

Allora $S(ac) \subset S(ab) = S(bc)$ e quindi $S(a + b + c) = S(ac) = S(ab) \cap S(ac) \cap S(bc)$.

Osservazione 5.6. $a + b + c$ *è una funzione simmetrica di* a, b, c*, non cambia cioè se effettuiamo una permutazione degli argomenti.*

Proposizione 5.7. *$a+b+c$ è l'unico elemento dell'intersezione*

$$\mathcal{C}(a,b) \cap \mathcal{C}(a,c) \cap \mathcal{C}(b,c) = \{a+b+c\}$$

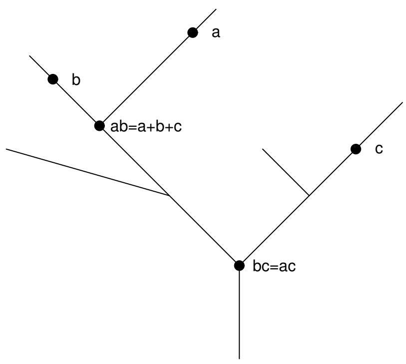
<u>Dimostrazione.</u> Sia $x := a+b+c$. Per il lemma 4.4 possiamo assumere che $ab = bc \leq ac = x$.

(1) Allora $ab \leq x \leq a$ e quindi $x \in \mathcal{C}(a,b), bc \leq x \leq c$ e quindi $x \in \mathcal{C}(b,c)$, infine $x = ac \in \mathcal{C}(a,c)$.

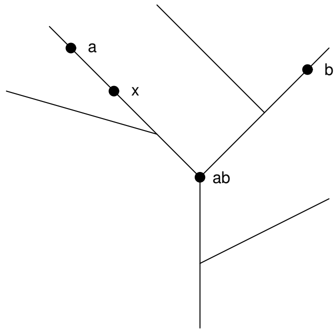
(2) Sia $y \in \mathcal{C}(a,b) \cap \mathcal{C}(b,c) \cap \mathcal{C}(a,c)$. Allora in particolare $y \in \mathcal{C}(a,c)$, per cui $x = ac \leq y$. L'ipotesi $y \in \mathcal{C}(a,b) \cap \mathcal{C}(b,c) \cap \mathcal{C}(a,c)$ implica che si verifica almeno una delle quattro situazioni:

$$y \leq a \text{ e } y \leq b$$
$$y \leq a \text{ e } y \leq c$$
$$y \leq b \text{ e } y \leq a$$
$$y \leq b \text{ e } y \leq c$$

Ciò significa però che $y \leq z$ per un elemento di $\{ab, ac, ba, bc\}$ e quindi $y \leq x$. Siccome $x \leq y$, ciò implica $x = y$.



Definizione 5.8. Diciamo che x si trova tra a e b, se $x \in \mathcal{C}(a,b)$.



La proposizione seguente dà un criterio algebrico perchè ciò accada.

Proposizione 5.9. $x \in \mathcal{C}(a,b) \iff a+b+x=x$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathcal{C}(a,b)$, ad esempio $ab \leq x \leq a$. Allora $ax = x, ab \leq x = ax, bx = bax \leq ab$, quindi $x = max(ab, bx, ax)$.

Sia viceversa $a+b+x=x$. Allora $\{x\} = \mathcal{C}(a,b) \cap \mathcal{C}(a,x) \cap \mathcal{C}(b,x)$, e quindi $x \in \mathcal{C}(a,b)$.

Osservazione 5.10. $x \in \mathcal{C}(a,y)$ *e* $y \in \mathcal{C}(a,x) \implies x = y$

Dimostrazione. Le ipotesi implicano $x = a+y+x = y$.

Corollario 5.11. $\mathcal{C}(a,x) = \mathcal{C}(a,y) \implies x = y$

Osservazione 5.12. *Sono equivalenti:*

(1) $u \in P(a) \cup P(b)$.
(2) L'insieme $\{ab, u\}$ *è una catena e* $a+b+u = \max(ab,u)$.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Sia ad esempio $u \in P(a)$. Allora $\{ab, u\}$ è un sottoinsieme della catena $P(a)$ e quindi è una catena.

Inoltre se $u \in P(a)$, si ha $a+b+u = \max(ab, au, bu) = \max(ab, u, bu) = \max(ab, u)$; se invece $u \in P(b)$ si ha ugualmente $a+b+u = \max(ab, au, bu) = \max(ab, au, u) = \max(ab, u)$.

(2) $\implies$ (1): Se $\{ab, u\}$ è una catena, abbiamo $ab \leq u$ oppure $u \leq ab$.

Nel primo caso abbiamo $a+b+u = u$. Dalla proposizione 5.9 segue $u \in \mathcal{C}(a,b) \subset P(a) \cup P(b)$ per l' osservazione 3.23. Se invece $u \in P(ab)$, allora $u \in P(a) \cap P(b)$, e quindi anche $u \in P(a) \cup P(b)$.

Definizione 5.13. Poniamo

$$a + b := \bigcirc_x a + b + x : X \longrightarrow X$$

$a + b$ è quindi un elemento di X^X, non un elemento di X.

Corollario 5.14. $\mathcal{C}(a, b) = Fix(a + b) = Imm(a + b)$.

Si ha inoltre

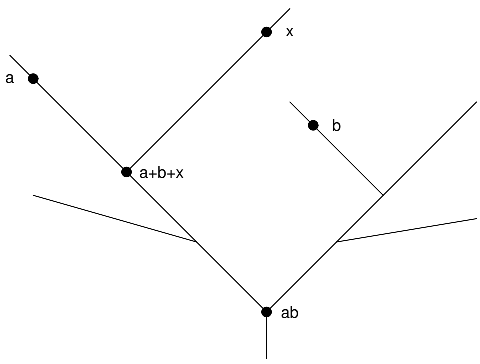
$$a + b + x = \max(ab, \mathcal{C}(a, b)x)$$

Per queste ragioni $a + b + x$ *può essere concepito come la proiezione di* x *su* $\mathcal{C}(a, b)$.

Dimostrazione. La prima uguaglianza segue dalla proposizione 5.9.

Inoltre si ha sempre $\mathrm{Fix}\,\varphi \subset \mathrm{Imm}\,\varphi$, e dalla proposizione 5.7 segue che $(a + b)x \in \mathcal{C}(a, b)$ per ogni $x \in X$.

L'ultima affermazione segue dall'osservazione 4.6, tenendo conto della definizione 5.2 e dell'osservazione 1.10.



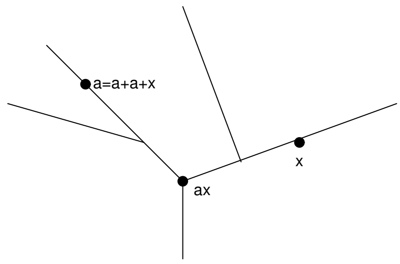
Corollario 5.15. *L'applicazione* $a + b$ *è idempotente, quindi*

$$a + b + (a + b + x) = a + b + x$$

Osservazione 5.16. *$a + a$ è l'applicazione costante $\underset{x}{\bigcirc}\, a$, cioè*

$a + a + x = a$

Dimostrazione. Ciò segue da $a + a + x = \max(a, ax, ax) = a$.



Definizione 5.17. Per $A, B, C \subset X$ sia

$A + B + C := \{a + b + c \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

Osservazione 5.18. *A sia un sottoinsieme di X. Allora*

$A \subset A + A + X$ (*)

Sono equivalenti:

(1) A è fortemente convesso.
(2) $A + A + X \subset A$.
(3) $A + A + X = A$.

Dimostrazione. Il corollario 5.14 implica la (*).

$(1) \implies (2)$: A sia fortemente convesso, $a, b \in A$ ed $x \in X$. Allora, per la proposizione 5.7, $a + b + x \in \mathcal{C}(a, b) \subset A$.

$(2) \implies (3)$: Segue dalla relazione (*).

$(3) \implies (1)$: Sia $A + A + X = A$. Siano $a, b \in A$ ed $x \in \mathcal{C}(a, b)$. Allora, per la proposizione 5.9, $x = a + b + x \in A + A + X \subset A$.

Lemma 5.19. *$a + b$ è un endomorfismo di $(X, \cdot)$, abbiamo cioè*

$$(a + b)uv = (a + b)u \cdot (a + b)v$$

oppure, equivalentemente,

$$a + b + uv = (a + b + u)(a + b + v)$$

Dimostrazione. Utilizzando l'osservazione 1.10 e il lemma 3.8 abbiamo

$$\begin{aligned}(a + b + u)(a + b + u) &= \max(ab, au, bu)\max(ab, av, bv)\\ &= \max(ab, abv, abv, abu, auv, abuv, abu, abuv, buv)\\ &= \max(ab, auv, buv)\\ &= (a + b + uv)\end{aligned}$$

Definizione 5.20. Un'applicazione $\varphi : X \longrightarrow X$ si chiama un *endomorfismo ternario*, se

$$\varphi(a + b + c) = \varphi a + \varphi b + \varphi c$$

per ogni $a, b, c \in X$.

Un endomorfismo ternario idempotente la cui immagine è fortemente convessa si chiama una *retrazione*.

Proposizione 5.21. *Per un'applicazione $\varphi : X \longrightarrow X$ sono equivalenti:*

(1) φ è una retrazione;

(2) $\varphi(a + b + x) = \varphi a + \varphi b + x$ per ogni $a, b, x \in X$;

(3) $\varphi \circ (a + b) = \varphi a + \varphi b$ per ogni $a, b \in X$.

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): φ sia una retrazione. Siano a, b e $x \in X$. Siccome l'immagine di φ è fortemente convessa, $\varphi a + \varphi b + x$ appartiene all'immagine (cfr. oss. 5.18), su cui φ, essendo idempotente, opera come l'identità. Perciò

$$\begin{aligned}\varphi a + \varphi b + x &= \varphi(\varphi a + \varphi b + x)\\ &= \varphi^2 a + \varphi^2 b + \varphi x\\ &= \varphi a + \varphi b + x\\ &= \varphi(a + b + x)\end{aligned}$$

$(2) \implies (1)$: Dimostriamo prima l'idempotenza:

$$\begin{aligned}\varphi^2 x &= \varphi(\varphi x + \varphi x + x) \\ &= \varphi x + \varphi^2 x + \varphi x = \varphi x\end{aligned}$$

Dimostriamo che φ è un omomorfismo ternario:

$$\begin{aligned}\varphi(a+b+c) &= \varphi^2(a+b+c) \\ &= \varphi(\varphi a + \varphi b + c) \\ &= \varphi a + \varphi^2 b + \varphi c \\ &= \varphi a + \varphi b + \varphi c\end{aligned}$$

Dimostriamo che l'immagine di φ è fortemente convessa. Ciò segue direttamente dall'osservazione 5.18 e dalla stessa ipotesi:

$\varphi a + \varphi b + x = \varphi(a+b+x)$

$(2) \iff (3)$: Chiaro.

Proposizione 5.22. *Ogni retrazione è un endomorfismo di* $(X, \cdot)$.

Dimostrazione. Siano $a, b \in X$. Allora

$\varphi(ab) = \varphi(a+b+q) = \varphi a + \varphi b + q = \varphi a \cdot \varphi b$

Lemma 5.23. $\varphi : X \longrightarrow X$ *sia un endomorfismo di* $(X, \cdot)$. *Allora* φ *è un endomorfismo ternario.*

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \varphi a \varphi b \\ \varphi(ac) &= \varphi a \varphi c \\ \varphi(bc) &= \varphi b \varphi c\end{aligned}$$

quindi

$\varphi\{ab, ac, bc\} = \{\varphi a \varphi b, \varphi a \varphi c, \varphi b \varphi c\}$

Per l'osservazione 3.11 φ è un'applicazione monotona e dall'osservazione 1.11 segue che

$$\begin{aligned}\varphi(a+b+c) &= \varphi \max(ab, ac, bc) \\ &= \max \varphi\{ab, ac, bc\} \\ &= \max(\varphi a\varphi b, \varphi a\varphi c, \varphi b\varphi c) \\ &= \varphi a + \varphi b + \varphi c\end{aligned}$$

Corollario 5.24. $a+b$ *è un endomorfismo ternario, quindi*

$$a+b+(x+y+z) = (a+b+x)+(a+b+y)+(a+b+z)$$

Dimostrazione. Dal lemma 5.19 sappiamo che $a+b$ è un endomorfismo di $(X, \cdot)$, e dal lemma 5.23 segue che $a+b$ è un endmorfismo ternario.

Corollario 5.25. $u(a+b+c) = ua+ub+uc$

Dimostrazione. Ciò segue dal corollario 5.24 perchè $\bigcirc_x ux = u+q$.

Teorema 5.26. $a+b$ *è una retrazione, abbiamo cioè*

$$(a+b)\circ(u+v) = (a+b)u+(a+b)v$$

oppure, equivalentemente,

$$a+b+(u+v+x) = (a+b+u)+(a+b+v)+x$$

Dimostrazione. $a+b$ è idempotente per il corollario 5.15.

$\mathrm{Imm}(a+b) = \mathcal{C}(a,b)$ è fortemente convessa per la proposizione 3.27.

Dal corollario 5.24 sappiamo che $a+b$ è un endomorfismo ternario.

Corollario 5.27. $(a+x+y)+(a+y+z)+(a+z+x) = a+x+(a+y+z)$

Dimostrazione. Poniamo $u := a+y+z$. Allora

$$\begin{aligned}(a+x+y)+(a+y+z)+(a+z+x) &= (a+x+y)+u+(a+z+x) \\ &= a+x+(y+u+z) \\ &= a+x+(y+(a+y+z)+z) \\ &= a+x+(a+y+z)\end{aligned}$$

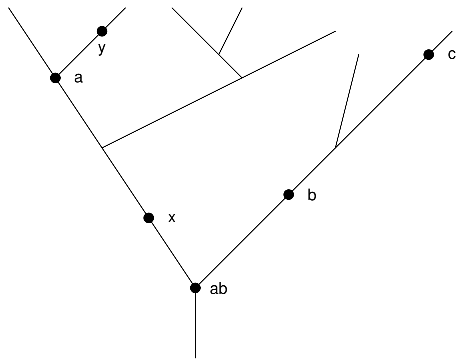
usando prima il teorema 5.26 e poi il corollario 5.15.

Osservazione 5.28. *Siano* $x \in \mathcal{C}(a,b), a \in \mathcal{C}(x,y)$ *e* $b \in \mathcal{C}(y,c)$. *Allora* $x \in \mathcal{C}(a,c)$.

<u>Dimostrazione.</u> Abbiamo

$$\begin{aligned} a+c+x &= (a+x+y)+c+(a+x+b) \\ &= a+x+(y+c+b) \\ &= a+b+x = x \end{aligned}$$

utilizzando il teorema 5.26.



Osservazione 5.29. *Sia* $x \in \mathcal{C}(a,b)$. *Allora*

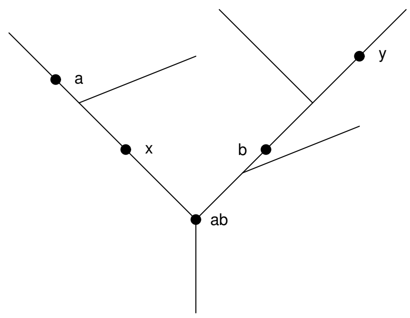
$\mathcal{C}(a,y) \cap \mathcal{C}(y,b) \subset \mathcal{C}(x,y)$

per ogni $y \in X$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $z \in \mathcal{C}(a,y) \cap \mathcal{C}(y,b)$. Allora

$$\begin{aligned} z &= z+z+x \\ &= (a+y+z)+(b+y+z)+x \\ &= y+z+(a+b+x) = y+z+x \end{aligned}$$

utilizzando ancora il teorema 5.26.



Osservazione 5.30. *$\varphi : X \longrightarrow X$ sia una retrazione. Allora*

$$\varphi x = x + \varphi x + \varphi u$$

per ogni $x, u \in X$.

Dimostrazione. Infatti $\varphi x = \varphi(x + x + u) = x + \varphi x + \varphi u$.

Lemma 5.31. *$\varphi, \psi : X \longrightarrow X$ siano due retrazioni tali che $\operatorname{Imm} \varphi \cap \operatorname{Imm} \psi \neq \emptyset$.*

Allora $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Più precisamente per ogni $a \in \operatorname{Imm} \varphi \cap \operatorname{Imm} \psi$ si ha

$$\varphi\psi x = \psi\varphi x = \varphi x + \psi x + a$$

per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Sia $a = \varphi u = \psi v$ un elemento di $\operatorname{Imm} \varphi \cap \operatorname{Imm} \psi$. Usando l'osservazione 5.30 e l'idempotenza di φ e ψ abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi\psi x &= \varphi(x + \psi x + a) \\ &= \varphi x + \psi x + \varphi a \\ &= \varphi x + \psi x + a \end{aligned}$$

L' enunciato segue per simmetria.

Proposizione 5.32. *Le applicazioni $a+u$ e $a+v$ commutano, si ha cioè*

$$(a+u)\circ(a+v) = (a+v)\circ(a+u)$$

Dimostrazione. Poichè $a \in \mathrm{Imm}(a+u) \cap \mathrm{Imm}(a+v)$, l'enunciato segue dal lemma 5.31.

Corollario 5.33. *L'espressione $a+x+(a+y+z)$ è simmetrica in x, y, z.*

Dimostrazione. Ciò segue sia dal corollario 5.24 che dalla proposizione 5.32.

Proposizione 5.34. *Sono equivalenti:*

(1) $(a+b)x = (a+b)y$.
(2) $(x+y)a = (x+y)b$.

Dimostrazione. Sia $z := a+b+x = a+b+y$. Allora

$$\begin{aligned} z &\in \mathrm{Imm}(a+x) \cap \mathrm{Imm}(b+y) \\ z &\in \mathrm{Imm}(b+x) \cap \mathrm{Imm}(a+y) \end{aligned}$$

Dal lemma 5.31 seguono

$$\begin{aligned} (a+x)\circ(b+y) &= (b+y)\circ(a+x) \\ (b+x)\circ(a+y) &= (a+y)\circ(b+x) \end{aligned}$$

Usando anche il corollario 5.33 abbiamo

$$\begin{aligned} a+x+y &= (a+x)\circ(b+y)y = (b+y)\circ(a+x)y \\ &= b+y+(a+x+y) = a+y+(b+x+y) \\ &= (a+y)\circ(b+x)y = (b+x)\circ(a+y)y \\ &= b+x+y \end{aligned}$$

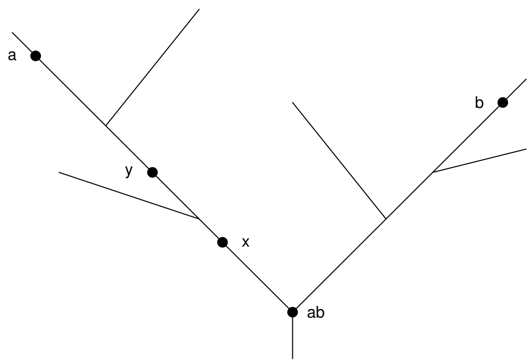
Corollario 5.35. *Siano $x \in \mathcal{C}(a,b)$ e $y \in \mathcal{C}(a,x)$.*
Allora $y \in \mathcal{C}(a,b)$ e $x \in \mathcal{C}(y,b)$.

Dimostrazione. Utilizzando il corollario 5.33 abbiamo

$$\begin{aligned} a+b+y &= a+b+(a+x+y) \\ &= a+y+(a+b+x) \\ &= a+y+x = y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y+b+x &= (a+x+y)+b+x \\ &= (a+b+x)+y+x \\ &= x+y+x = x \end{aligned}$$



Corollario 5.36. $x \in \mathcal{C}(a,b) \iff \mathcal{C}(a,x) \subset \mathcal{C}(a,b)$

Dimostrazione. Usiamo la proposizione 5.9 e il corollario 5.33. Sia $x \in \mathcal{C}(a,b)$. Dalla proposizione 3.27 segue $\mathcal{C}(a,x) \subset \mathcal{C}(a,b)$.

Viceversa $\mathcal{C}(a,x) \subset \mathcal{C}(a,b)$ implica $x \in \mathcal{C}(a,b)$ perchè $x \in \mathcal{C}(a,x)$ (cfr. oss. 3.21).

Proposizione 5.37. $\mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b) = \mathcal{C}(u,a+b+u)$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$. Allora $x+a+u = x+u+b = x$, quindi

$$u+(a+b+u)+x = u+(a+x+u)+b = u+x+b = x$$

Ciò implica che $x \in \mathcal{C}(u, a+b+u)$.

Viceversa abbiamo $x \in \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$ e $a+b+u \in \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$ per la proposizione 5.7. Dalla proposizione 3.27 segue

$$\mathcal{C}(u, a+b+u) \subset \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$$

Corollario 5.38. $u \in \mathcal{C}(a,b) \iff \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b) = \{u\}$

Dimostrazione. Ciò segue direttamente dalle proposizioni 5.37 e 5.9.

Corollario 5.39. *Sono equivalenti:*

(1) $\mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b) = \mathcal{C}(a,u)$.

(2) $a \in \mathcal{C}(u,b)$.

Dimostrazione. Per la proposizione 5.37 abbiamo

$$\mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b) = \mathcal{C}(u, a+b+u)$$

Ma dall'osservazione 5.10 sappiamo che $\mathcal{C}(u, a+b+u) = \mathcal{C}(a,u)$ è equivalente a $a+b+u = a$ e quindi a $a \in \mathcal{C}(u,b)$.

Osservazione 5.40.

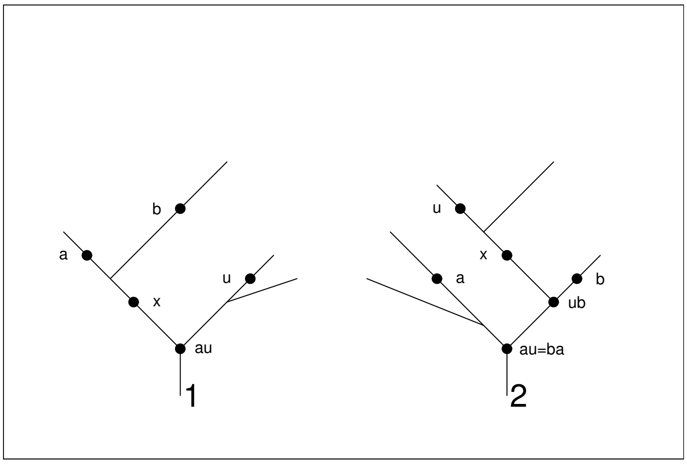
(1) $x \in [au, a]$ *e* $x \notin \mathcal{C}(a,b) \implies x \in \mathcal{C}(u,b)$

(2) $x \in \mathcal{C}(a,u)$ *e* $x \notin \mathcal{C}(a,b) \implies x \in \mathcal{C}(u,b)$

Dimostrazione.

(1) L'ipotesi implica $x \leq a$ e siccome $x \notin \mathcal{C}(a,b)$, dal lemma 4.8 segue $x < ab$ (e quindi anche $x \leq b$).
Abbiamo perciò $au \leq x < ab$, e il lemma 4.5 implica $ub = au$. Da ciò segue però $ub \leq x \leq b$, quindi $x \in [ub, b] \subset \mathcal{C}(u,b)$.

(2) Si ha $x \in [au, a] \cup [au, u]$ per ipotesi.
Se $x \in [au, a]$, l'enunciato segue direttamente dalla (1).
Sia invece $x \in [au, u]$ e supponiamo, per assurdo, che $x \notin \mathcal{C}(u,b)$.
Scambiando a con u nella (1) otteniamo $x \in \mathcal{C}(a,b)$, una contraddizione.



Corollario 5.41. $\mathcal{C}(a,b) \subset \mathcal{C}(a,u) \cup \mathcal{C}(u,b)$

Lemma 5.42. *A e B siano due sottoinsiemi fortemente convessi di X tali che $A \cap B \neq \emptyset$. Allora $A \cup B$ è fortemente convesso.*

Dimostrazione. Scegliamo $x \in A \cap B$. Siano $a, b \in A \cup B$.

Se $a, b \in A$ oppure $a, b \in B$, allora $\mathcal{C}(a,b) \subset A$ oppure $\mathcal{C}(a,b) \subset B$.

Assumiamo che $a \in A$ e $b \in B$. Allora $\mathcal{C}(a,x) \subset A$ e $\mathcal{C}(x,b) \subset B$. Dal corollario 5.41 sappiamo che $\mathcal{C}(a,b) \subset \mathcal{C}(a,x) \cup \mathcal{C}(x,b) \subset A \cup B$.

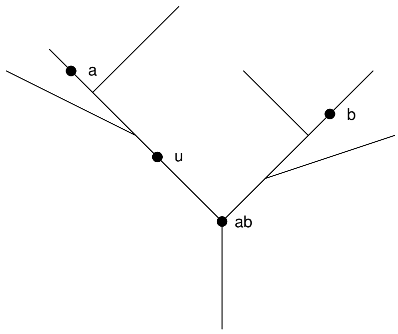
Proposizione 5.43. *Sono equivalenti:*

(1) $u \in \mathcal{C}(a,b)$
(2) $\mathcal{C}(a,u) \cup \mathcal{C}(u,b) = \mathcal{C}(a,b)$
(3) $\mathcal{C}(a,u) \cup \mathcal{C}(u,b) \subset \mathcal{C}(a,b)$
(4) $\mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b) = \{u\}$

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (4) segue dal corollario 5.38, l' equivalenza tra (1) e (3) dal corollario 5.36.

E' chiaro inoltre che (2) implica (3).

L'implicazione $(3) \implies (2)$, infine, segue dal corollario 5.41.



Proposizione 5.44. $(\mathcal{C}(a,u)\cup\mathcal{C}(u,b))\setminus\mathcal{C}(a,b) = (\mathcal{C}(a,u)\cap\mathcal{C}(u,b))\setminus \{a+b+u\}$

<u>Dimostrazione.</u> Sia prima $x \in (\mathcal{C}(a,u) \cup \mathcal{C}(u,b)) \setminus \mathcal{C}(a,b)$. Dall'osservazione 5.40 segue che $x \in \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$.

Sia $x = a+b+u$. Per la proposizione 5.7 ciò significa

$x \in \mathcal{C}(a,b) \cap \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$, una contraddizione.

Sia viceversa $x \in \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$. Ma $x \in \mathcal{C}(a,u) \cap \mathcal{C}(u,b)$ implica $x \in \mathcal{C}(a,u) \cup \mathcal{C}(u,b)$, allora sicuramente $x \in \mathcal{C}(a,u) \cup \mathcal{C}(u,b)$. Se inoltre $x \neq a+b+u$, di nuovo la proposizione 5.7 implica $x \notin \mathcal{C}(a,b)$.

Osservazione 5.45. *Siano* $x \in \mathcal{C}(a,b)$ *ed* $u \in \mathcal{C}(x,v)$.

Allora $x \in \mathcal{C}(a,v) \cup \mathcal{C}(u,b)$.

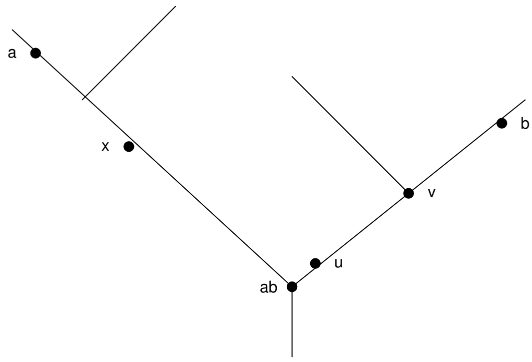
<u>Dimostrazione.</u> Assumiamo $x \notin \mathcal{C}(a,v)$ e $x \notin \mathcal{C}(u,b)$. Dal corollario 5.41 segue $\mathcal{C}(a,b) \subset \mathcal{C}(a,v) \cup \mathcal{C}(v,b)$, ciò implica $x \in \mathcal{C}(v,b)$.

Di nuovo per il corollario 5.41 abbiamo però

$\mathcal{C}(v,b) \subset \mathcal{C}(v,u) \cup \mathcal{C}(u,b)$

e quindi $x \in \mathcal{C}(v,u)$.

Ma $x \in \mathcal{C}(x,v)$, e dall'osservazione 5.10 vediamo che $x = u$ e quindi $u \notin \mathcal{C}(u,b)$, una contraddizione.



Proposizione 5.46. $a + x + (a + y + z) = \max(ax, ay, az, xyz)$

Dimostrazione. Utilizzando l'osservazione 1.10 e il proposizione 4.11 abbiamo

$$\begin{aligned} a + x + (a + y + z) &= \max(ax, a(a + y + z), x(a + y + z)) \\ &= \max(ax, a + ay + az, ax + xy + xz) \\ &= \max(ax, ay, az, ayz, axy, axz, xyz) \\ &= \max(ax, ay, az, xyz) \end{aligned}$$

Lemma 5.47. $a + x + (a + y + z)$ *coincide con* $a + x + y$ *oppure con* $a + x + z$.

Dimostrazione. Usando la proposizione 5.46, poniamo

$$\begin{aligned} u &:= a + x + (a + y + z) = \max(ax, ay, az, xyz) \\ v &:= a + x + y = \max(ax, ay, xy) \\ w &:= a + x + z = \max(ax + az + xz) \end{aligned}$$

Per la proposizione 4.7 abbiamo ad esempio $xy = xyz$. Da ciò segue $u = \max(ax, ay, az, xy)$ e quindi $v \leq u$.

Sia $v < u$. Allora si ha $u = az$ e $ax < az$, mentre dal lemma 4.5 segue che $xz = ax$. Quindi $w = \max(ax, az, xz) = az = u$.

Definizione 5.48. Per un elemento fissato $x \in X$ definiamo un'operazione binaria $\circ_x$ su X con

$$a \circ_x b := a + b + x$$

$\circ_x$ si chiama il *prodotto relativo ad* x in X.

Teorema 5.49. *$x \in X$ sia un elemento fissato. Allora $(X, \circ_x)$ è un albero con intersezione il cui elemento più piccolo è x.*

Dimostrazione. Scriviamo $\circ$ per $\circ_x$.

Dimostriamo prima che $(X, \circ)$ è un semireticolo.

Dobbiamo allora dimostrare le seguenti identità per ogni $a, b, c \in X$:

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= (a \circ b) \circ c \\ a \circ b &= b \circ a \\ a \circ a &= a \end{aligned}$$

Se scriviamo queste identità in termini dell'algebra mediana, esse diventano:

$$\begin{aligned} a + (b + c + x) + x &= (a + b + x) + c + x \\ a + b + x &= b + a + x \\ a + a + x &= a \end{aligned}$$

La prima è il corollario 5.33, la seconda l'osservazione 5.6, la terza l'osservazione 5.16. $(X, \circ)$ è quindi un semireticolo.

Siccome $a \circ x = a + x + x = x$ per ogni $a \in X$, vediamo che x è l'elemento più piccolo di $(X, \circ)$.

Rimane da dimostrare che $(X, \circ)$ è un albero.

Verifichiamo la condizione della proposizione 4.7.

Siano $a, b, c \in X$. Per il lemma 5.47 $a \circ b \circ c = a + (b + c + x) + x$ è uguale ad $a + x + b = a \circ b$ oppure a $a + x + c = a \circ c$, questo è esattamente quello che dovevamo dimostrare.

Corollario 5.50. *L'insieme $\{a + x + y, a + x + z, a + y + z\}$ possiede al massimo due elementi.*

Dimostrazione. Ciò segue applicando il lemma 4.4 all'albero $(X, \circ_a)$.

Teorema 5.51. *Il cammino da a a b in $(X, \circ_x)$ coincide con $\mathcal{C}(a, b)$.*

Dimostrazione. Denotiamo, per questa dimostrazione, con $\mathcal{C}_x(a, b)$ il cammino da a a b in $(X, \circ_x)$.

Per $u, v \in X$ scriviamo $u \leq_x v$ se $u \circ_x v = u,$ cioè se $u + v + x = u$.

(1) Sia $u \in \mathcal{C}_x(a, b)$ e ad asempio $a \circ_x b \leq_x u \leq_x a$. Allora

$$\begin{aligned} a + b + x &= (a + b + x) + u + x \\ u &= u + a + x \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} a + b + u &= a + b + (u + a + x) = a + u + (b + a + x) \\ &= a + u + ((a + b + x) + u + x) \\ &= (a + b + x) + u + (a + u + x) \\ &= (a + b + x) + u + u = u \end{aligned}$$

e quindi $u \in \mathcal{C}(a, b)$.

(2) Sia ora $u \in \mathcal{C}(a, b)$, cioè $a + b + u = u$. Allora

$$\begin{aligned} (a + b + x) + u + x &= (a + b + x) + (a + b + u) + x \\ &= a + b + (x + u + x) = a + b + x \end{aligned}$$

e quindi $a \circ_x b \leq_x u$. (*)

Rimane da dimostrare che $u = a + u + x$ oppure $u = b + u + x$.

Dal corollario 5.50 sappiamo che l'insieme

$$\{a + b + u, a + x + u, b + x + u\} = \{u, a + x + u, b + x + u\}$$

possiede al massimo due elementi.

Se $u = a + x + u$ o $u = b + x + u$, abbiamo la situazione desiderata.

Altrimenti $a + x + u = b + x + u$. Dalla proposizione 5.34 segue allora

$$a + b + x = a + b + u = u$$

e quindi $a+u+x = a+(a+b+x)+x = a+b+x = u$
Insieme con (*) ciò implica $u \in \mathcal{C}_x(a,b)$.
Teorema 5.52. *Il mediano di a, b, c in $(X, \circ_x)$ coincide con $a+b+c$.*

Dimostrazione. Ciò segue dalla proposizione 5.7 e dal teorema 5.51.

Corollario 5.53. *$\varphi : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione. Allora sono equivalenti:*

(1) φ è una retrazione.

(2) φ è una retrazione di $(X, \circ_x)$ per ogni $x \in X$.

(3) Esiste un $x \in X$ tale che φ sia una retrazione di $(X, \circ_x)$.

Dimostrazione. Ciò segue dal teorema 5.52, tenendo conto della caratterizzazione delle retrazioni nelle proposizione 5.21.

Osservazione 5.54. *$\varphi : X \longrightarrow X$ sia un'applicazione ed $x \in X$ tale che φ sia una traslazione di $(X, \circ_x)$. Allora $x \in \operatorname{Imm} \varphi$.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$x = x + x + \varphi x = x \circ_x \varphi x = \varphi(x \circ_x x) \in \operatorname{Imm} \varphi$$

Osservazione 5.55. *$\varphi : X \longrightarrow X$ sia una traslazione. Allora φ è una retrazione.*

Dimostrazione. Per il lemma 3.30 abbiamo $\varphi(ab) = \varphi a \varphi b = a \varphi b$ per ogni $a, b \in X$. Usando l'osservazione 1.11 abbiamo

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b+c) &= \varphi \max(ab, ac, bc) \\
&= \max(\varphi(ab), \varphi(ac), \varphi(bc)) \\
&= \max(\varphi a \varphi b, c\varphi a, c\varphi b) \\
&= \varphi a + \varphi b + c
\end{aligned}$$

Proposizione 5.56. *Per un'applicazione $\varphi : X \longrightarrow X$ sono equivalenti:*

(1) φ è una retrazione.
(2) φ è una traslazione di $(X, \circ_x)$ per ogni $x \in \operatorname{Imm} \varphi$.
(3) Esiste $x \in X$ tale che φ è una traslazione di $(X, \circ_x)$.

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sia $x \in \operatorname{Imm} \varphi$. Allora

$$\varphi(a \circ_x b) = \varphi(a + b + x) + a + \varphi b + \varphi x = a + \varphi b + x = a \circ_x \varphi b$$

(2) $\Longrightarrow$ (3): Chiaro, perchè $\operatorname{Imm} \varphi \neq \emptyset$, essendo $X \neq \emptyset$ per la definizione 2.1.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Ciò segue dall'osservazione 5.55 e dal corollario 5.53.

Osservazione 5.57. $x \leq a$, $y \leq b$ *e* $z \leq c$ *implica* $x+y+z \leq a+b+c$.

Dimostrazione. Dall'ipotesi seguono $xy \leq ab$, $xz \leq ac$ e $yz \leq bc$. Quindi $x + y + z = \max(xy, xz, yz) \leq \max(ab, ac, bc) = a + b + c$.

6. RAMIFICAZIONE NELL' ORIGINE

Situazione 6.1. X sia un albero con intersezione e con origine q. Quando non indicato diversamente, $a, b, c, \dots, x, y, \dots \in X$.

Si noti che per $a \in X$ si ha

$$a \neq q \iff a > q$$

Definizione 6.2. Un sottoinsieme A di X si chiama *indiviso* (in q), se

$$q \notin A^+A^+$$

In altre parole, si chiede che per $a, b \in A$ con $a > q$ e $b > q$ si abbia sempre $ab > q$.

Denotiamo con $\operatorname{Ind} X$ l'insieme dei sottoinsiemi indivisi di X e con

$$\mathcal{R}_q := \operatorname{Max} \operatorname{Ind} X$$

l'insieme dei sottoinsiemi indivisi massimali. Gli elementi di $\mathcal{R}_q$ verranno chiamati *rami* di X.

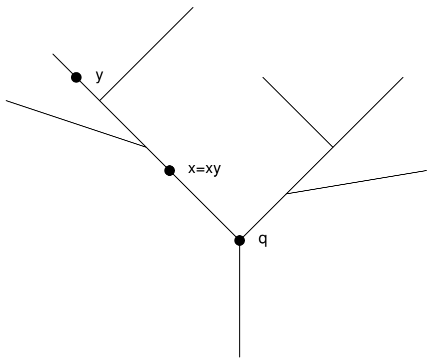
Osservazione 6.3.

(1) $a \in Ind\ X$ *per ogni* $a \in X$.

(2) *Siano* $A \in Ind\ X$ *e* $B \subset A$. *Allora* $B \in \operatorname{Ind} X$.

Osservazione 6.4. *C sia una catena di X. Allora* $C \in \operatorname{Ind} X$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in C^+$, ad esempio $x \leq y$. Allora $xy = x > q$.



Proposizione 6.5. *$L(a) \in \mathrm{Ind}\ X$ per ogni $a \neq q$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in L(a)$.

Se $x, y \leq a$ oppure $x \leq a \leq y$, allora $[x, y]$ è una catena e l'enunciato segue dall'osservazione 6.4.

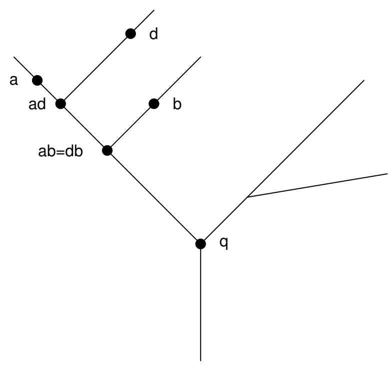
Altrimenti $x, y \geq a$ e quindi $xy \geq a > q$.

Lemma 6.6. *Siano $A, B, D \subset X$ con $A \cup D \in \mathrm{Ind}\ X, D \cup B \in \mathrm{Ind}\ X$. D contenga un elemento $\neq q$.*

Allora $A \cup B \in \mathrm{Ind}\ X$.

Dimostrazione. Siano $a \in A^+$ e $b \in B^+$.

Per ipotesi esiste $d \in D^+$. Allora $ad > q$ e $db > q$ e dal lemma 4.12 segue che $ab > q$.



Corollario 6.7. *Siano $A, B \in \mathrm{Ind}\ X$. $A \cap B$ contenga un elemento $\neq q$. Allora:*

(1) $A \cup B \in \mathrm{Ind}\ X$.

(2) Se $A \in \mathcal{R}_q$, allora $B \subset A$.

Dimostrazione. Il primo enunciato segue direttamente dal lemma 6.6 ponendo $D = A \cap B$.

Il punto (2) è una immediata conseguenza.

Corollario 6.8. *Siano* $A, B \in \text{Ind } X$. A *e* B *siano ideali con* $A \cap B \neq q$. *Allora:*

(1) $A \cup B \in \text{Ind } X$.

(2) Se $A \in \mathcal{R}_q$, *allora* $B \subset A$.

Corollario 6.9. *Siano* $A \in \text{Ind } X$ *ed* $a \in A^+$.

Allora $A \cup L(a) \in \text{Ind } X$.

Osservazione 6.10. *Siano* $A \in \text{Ind } X$ *ed* $a \in A$.

Allora $A \cup P(a) \in \text{Ind } X$.

Dimostrazione. Sia $a \in A$, allora $a \neq q$. Inoltre $P(a) \subset L(a)$, quindi $A \cup P(a) \subset A \cup L(a) \in \text{Ind } X$ per il corollario 6.9.

Proposizione 6.11. *Ogni ramo di* X *è un ideale.*

Dimostrazione. Usiamo l'osservazione 3.32.

Dalla proposizione 6.5 segue che $P(a) \subset L(a) \in \text{Ind } X$.

Dimostriamo che $P(a) \cap I \neq q$.

Sia $x \in P(a) \cap I$. Essendo $P(a) \cap I \in \text{Ind } X$ si ha $x \neq q$ e quindi dal corollario 6.7 segue che $P(a) \subset I$.

Proposizione 6.12. *Sia* $A \in \text{Ind } X$. *Allora esiste un ramo* I *di* X *con* $A \subset I$.

Dimostrazione. Siccome $A \in \text{Ind } X$, applichiamo il lemma di Zorn alla famiglia degli insiemi indivisi di X che contengono A. Questo insieme è non vuoto perchè contiene A.

$\mathcal{C}$ sia una catena di sottoinsiemi indivisi che contengono A.

Sia $I := \bigcup\limits_{B \in \mathcal{C}} B$

Dimostriamo che $I \in \text{Ind } X$.

Siano $a, b \in I^+$. Allora esistono $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ tali che $a \in B_1$ e $b \in B_2$. Ma $\mathcal{C}$ è una catena e abbiamo, ad esempio, $B_1 \subset B_2$, quindi $a, b \in B_2$, che per ipotesi è un insieme indiviso di X, quindi $ab > q$.

Osservazione 6.13. I *e* J *siano rami distinti di* X.

Allora $I \cap J = q = IJ$.

Dimostrazione. Sia $I \cap J \neq q$. Per il corollario 6.8 abbiamo $I \cup J \in \mathrm{Ind}\ X$. Dalla massimalità di I e J segue $I = J$, in contraddizione all' ipotesi.

Quindi $I \cap J = q$. Ma $IJ \subset I \cap J$, perchè I e J sono ideali.

Proposizione 6.14. *Sia $I \in \mathrm{Ind}\ X$. Allora sono equivalenti:*

(1) $I = q$ *oppure* $I \in \mathcal{R}_q$.

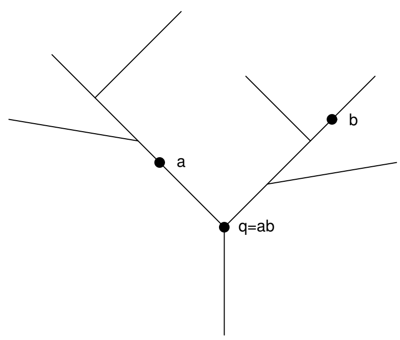
(2) *Per ogni* $a \in I^+$ *si ha* $L(a) \subset I$.

(3) *Per ogni* $a \in I$ *ed ogni* $b \in X \setminus I$ *si ha* $ab = q$.

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): Se $I = q$, non c'è niente da dimostrare. Assumiamo che $I \in \mathcal{R}_q$. Sia $a \in I^+$. Per il corollario 6.8 si ha $I \cup L(a) \in \mathrm{Ind}\ X$. Dalla massimalità di I segue che $L(a) \subset I$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Siano $a \in I, b \in X \setminus I$ ed $ab > q$, cioè $ab \in I^+$. Per ipotesi allora $L(ab) \subset I$. Ma $b \in L(ab)$, una contraddizione.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Assumiamo $I \neq q$. Sia $I \subset J$ con $J \in \mathrm{Ind}\ X$. Sia $b \in J \setminus I$. Scegliamo $a \in I^+$. Allora $a, b \in J \in \mathrm{Ind}\ X$ e quindi $ab > q$, in contraddizione all'ipotesi.



Osservazione 6.15. *I sia un sottoinsieme di X con le seguenti proprietà:*

(1) $q \in I$.

(2) $a \in I, b \in X \setminus I$ *implica* $ab = q$.

Allora I è un ideale di X.

Dimostrazione. La prima ipotesi implica che I non è vuoto.

Sia $a \in I$ e $b \in X$. Dobbiamo dimostrare che $ab \in I$. Sia $ab \notin I$. Allora $ab = aab = q \in I$, una contraddizione.

Osservazione 6.16. *A sia un sottoinsieme di X ed A^+ sia fortemente convesso. Allora $A \in \mathrm{Ind}\ X$.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in A^+$. Allora $\mathcal{C}(a, b) \subset A^+$, per cui $ab \neq q$.

Osservazione 6.17. *I sia un ramo di X.*

Allora I^+ è fortemente convesso.

Dimostrazione. Siano $a, b \in I^+$. Per l'osservazione 6.10 $I \cup P(a) \cup P(b) \in \mathrm{Ind}\ X$, quindi anche $I \cup \mathcal{C}(a, b) \in \mathrm{Ind}\ X$, perchè $\mathcal{C}(a, b) \subset P(a) \cup P(b)$; cfr. osservazione 6.3.

La massimalità di I implica $\mathcal{C}(a, b) \subset I$. Siccome I è indiviso, si ha $ab > q$ e quindi $q \notin \mathcal{C}(a, b)$.

Proposizione 6.18. *Per $I \subset X$ sono equivalenti:*

(1) I è un ramo di X.

(2) I è massimale nell'insieme dei sottoinsiemi A di X per i quali A^+ è fortemente convesso.

Dimostrazione. Ciò segue dalle osservazioni 6.16 e 6.17.

Definizione 6.19. Denotiamo con $\mathcal{M}_q$ l'insieme delle catene massimali di X. Siccome $C \cup q$ è una catena per ogni catena C, è chiaro che $q \in M$ per ogni $M \in \mathcal{M}_q$.

Osservazione 6.20. *Se $X \neq q$, allora ogni catena massimale di X contiene un punto diverso da q.*

Definizione 6.21. Per catene massimali M e N definiamo

$$M \sim_q N :\Longleftrightarrow M \cup N \in \mathrm{Ind}\, X$$

Dimostreremo adesso che $\sim_q$ è una relazione di equivalenza su $\mathcal{M}_q$ (e quindi diremo anche che M e N sono *equivalenti* se $M \sim_q N$) e denotiamo con $[M]_q$ la classe di equivalenza di M.

Proposizione 6.22. *$\sim_q$ è una relazione d'equivalenza su $\mathcal{M}_q$.*

Dimostrazione. Siano L, M, N catene massimali.

(1) $M \sim_q M$ segue dall'osservazione 6.4.

(2) E' chiaro che $\sim_q$ è una relazione simmetrica.

(3) Dimostriamo la transitività: siano $L \sim_q M$ ed $M \sim_q N$. Se $X = q$, l'enunciato è banalmente vero. Altrimenti M contiene un elemento $\neq q$.

Per ipotesi $L \cup M$ ed $M \cup N$ appartengono a $\mathrm{Ind}\, X$. Ciò implica $L \cup N \in \mathrm{Ind}\ X$ per il lemma 6.6, per cui $L \sim_q N$.

Proposizione 6.23. *M ed N siano catene massimali di X ed $X \neq q$. Allora*

$$M \sim_q N \iff M \cap N \neq q$$

Dimostrazione. Sia $M \sim_q N$. Per l'osservazione 6.20 esistono $a \in M^+$ e $b \in N^+$. Per ipotesi $ab > q$. Ma $ab \in M \cap N$.

Sia $M \cap N \neq q$. Dall'osservazione 6.4 segue che $M, N \in \mathrm{Ind}\ X$, e per il corollario 6.8 si ha $M \cup N \in \mathrm{Ind}\ X$.

Corollario 6.24. *M ed N siano catene massimali non equivalenti di X. Allora*

$$M \cap N = q = MN$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 6.23 segue $M \cap N = q$. Per il corollario 4.13 M ed N sono ideali, per cui $MN \subset M \cap N$.

Proposizione 6.25. *Siano M ed N catene massimali di X. Allora sono equivalenti:*

(1) $M \sim_q N$.

(2) $(M \cup N)^+$ *è fortemente convesso.*

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2): Assumiamo che $a \in M^+$ e $b \in N^+$.

Usando il lemma 2.2 abbiamo $\mathcal{C}(a, b) \subset P(a) \cup P(b) \subset M \cup N$. Per ipotesi $ab > q$, per cui $\mathcal{C}(a, b) \subset (M \cup N)^+$. Nello stesso modo si trattano i casi $a, b \in M^+$ rispettivamente $a, b \in N^+$.

(2) $\implies$ (1): Per l'osservazione 6.16 abbiamo $M \cup N \in \mathrm{Ind}\ X$.

Osservazione 6.26. *Siano M ed N catene massimali equivalenti ed I, J rami di X con $M \subset I, N \subset J$. Allora $I = J$.*

Dimostrazione. L'enunciato è banale per $X = q$. Altrimenti $M \cap N \neq q$, anche quindi $I \cap J \neq q$. L'enunciato segue dall'osservazione 6.13.

Corollario 6.27. *Ogni catena massimale di X è contenuta in esattamente un ramo di X.*

Dimostrazione. Dall' osservazione 6.4 e dalla proposizione 6.12 segue che ogni catena è contenuta in un ramo di X che, per una catena massimale, è unico per l'osservazione 6.26.

Corollario 6.28. *M ed N siano catene massimali entrambe contenute in uno stesso ramo di X. Allora M ed N sono equivalenti.*

Dimostrazione. Ciò è una conseguenza immediata dell'osservazione 6.3.

Osservazione 6.29. *Per ogni ramo I di X esiste una catena massimale M con $M \subset I$.*

Dimostrazione. L'enunciato è banale per $X = q$. Sia $X \neq q$.

Allora esiste un elemento $a \in I^+$. Per il corollario 1.5 esiste una catena massimale M con $a \in M$. Allora $I \cap M \neq q$ e dal corollario 6.8 segue che $M \subset I$.

Corollario 6.30. *Ogni elemento di X è contenuto in un ramo di X:*

$$X = \bigcup_{I \in \mathcal{R}_q} I$$

Dimostrazione. L'enunciato segue dall'osservazione 6.29, perchè ogni elemento di X è contenuto in una catena massimale.

Osservazione 6.31. *Sappiamo che i rami di X sono ideali e che per rami distinti I e J si ha $I \cap J = q$. Per il corollario 6.30 X è l'unione dei suoi rami. Nella terminologia della teoria dei semigruppi X è quindi la somma 0-diretta dei suoi rami.*

Proposizione 6.32. *Esiste una biiezione naturale*

$$\mathcal{M}_q / \sim_q \longrightarrow \mathcal{R}_q$$

che manda ogni classe di equivalenza $[M]_q$ nell'unico ramo che contiene M.

<u>Dimostrazione.</u> Segue dal corollario 6.27 e dalle osservazioni 6.26 e 6.29.

Definizione 6.33. Per una catena massimale M sia

$$R(M) := \bigcup_{N \in [M]_q} N$$

Proposizione 6.34. *M sia una catena massimale. Allora $R(M)$ è un ramo di X.*

<u>Dimostrazione.</u> Dimostriamo prima che $R(M)$ è un insieme indiviso.

Siano $a, \ b \in R(M)^+$. Allora esistono due catene massimali L ed N equivalenti ad M con $a \in L^+$ e $b \in N^+$. Per la transitività della relazione d'equivalenza si ha che L ed N sono equivalenti e quindi $ab > q$.

Per dimostrare che $R(M) \in \mathcal{R}_q$ usiamo la proposizione 6.14.

Possiamo assumere $X \neq q$.

Siano $a \in R(M)$ e $b \in X \setminus R(M)$. Dobbiamo dimostrare che $ab = q$. Esistono catene massimali $N \sim_q M$ con $a \in N$ e K con $b \in K$. K ed N non sono equivalenti, perchè altrimenti K sarebbe equivalente anche ad M e quindi $b \in R(M)$. Dal corollario 6.24 segue $ab = q$.

Corollario 6.35. *La biiezione $\mathcal{M}_q / \sim_q \longrightarrow \mathcal{R}_q$*

della proposizione 6.32 è data da $[M]_q \mapsto R(M)$.

Corollario 6.36. *M ed N siano catene massimali. Allora*

$$R(M) = R(N) \iff M \sim_q N$$

Definizione 6.37. Poniamo:

$$E(q) := \{(a, b) \in X \times X \mid ab > q\}$$

E' chiaro che $E(q) \subset X^+ \times X^+$.

Osservazione 6.38. *$E(q)$ è una relazione d'equivalenza su X^+.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $a, b, c \in X^+$.

$a^2 = a > q$, quindi $(a, a) \in E(q)$.

$ab = ba$, e vediamo che $E(q)$ è simmetrica.

$ab > q$ e $bc > q$ implica $ac > q$ per il lemma 4.12.

Osservazione 6.39. *Per $a, b \in X^+$ sono equivalenti:*

(1) $(a, b) \in E(q)$.

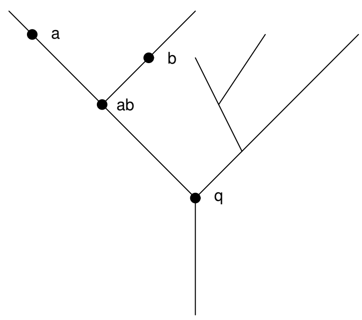
(2) $ab > q$.

(3) *a e b si trovano nello stesso ramo di X.*

Dimostrazione. (1) $\iff$ (2): Per definizione.

(2) $\implies$ (3): Per il corollario 6.30 sia a che b si trovano in qualche ramo di X. Se questi rami fossero distinti, dall'osservazione 6.13 si avrebbe che $ab = q$.

(3) $\implies$ (2): Ogni ramo è un insieme indiviso.



Definizione 6.40. Per $a \in X$ sia $a_q := \{b \in X \mid ab > q\}$.

E' chiaro che $a_q \subset X^+$ e che per $a \neq q$ l'insieme a_q è proprio la classe di equivalenza di a rispetto ad $E(q)$.

Invece $q_q = \emptyset$.

Osservazione 6.41. *Sia $a \in X^+$. Allora $a_q \cup q$ è un ramo di X.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $a_q \cup q \in \text{Ind } X$.

Siano $u, v \in (a_q \cup q)^+ = a_q$. Ciò implica $au > q$ e $av > q$, allora dal lemma 4.12 segue $uv > q$.

Rimane da dimostrare la massimalità.

Sia $a_q \cup q \subset I \in \mathrm{Ind}\ X$. Assumo che esista $b \in I$ con $b \notin a_q$, cioè con $ab = q$. Ma $a, b \in I$, una contraddizione.

Proposizione 6.42. *Sia $X \neq q$. Allora esiste una biiezione naturale*

$$X^+/E(q) \longrightarrow \mathcal{R}_q$$

data da

$$a_q \mapsto a_q \cup q$$

<u>Dimostrazione.</u> Questa applicazione è ben definita per le osservazioni 6.41 e 6.39.

Se $X \neq q$, ogni ramo contiene un elemento $\neq q$ e vediamo che l'applicazione è anche suriettiva.

7. PUNTI DI RAMIFICAZIONE

Situazione 7.1. X sia un albero con intersezione e con origine q. Quando non indicato diversamente, $a, b, c \cdots \in X$.

x sia un punto fissato di X.

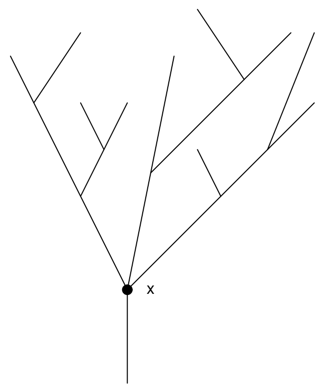
Useremo spesso il fatto che $S(x)$ è un albero con intersezione e con origine x a cui applicheremo i risultati del capitolo precedente.

Per $x = q$ naturalmente $S(x) = X$.

Definizione 7.2. $\mathcal{M}_x$ sia l'insieme delle catene massimali di $S(x)$. Ciò è in accordo con la definizione 6.19 in cui abbiamo definito $\mathcal{M}_q$.

Per il corollario 1.5 $\mathcal{M}_x \neq \emptyset$.

Definizione 7.3. Denotiamo con $\mathcal{R}_x$ l'insieme dei rami di $S(x)$. Gli elementi di $\mathcal{R}_x$, cioè i rami di $S(x)$, si chiamano anche *rami* di X in x.



Proposizione 7.4. *Per $I \subset S(x)$ sono equivalenti:*

(1) I è un ramo di X in x.

(2) I è massimale nell'insieme dei sottoinsiemi A di $S(x)$ per i quali $S^+(x)$ è fortemente convesso.

Dimostrazione. Proposizione 6.18.

Definizione 7.5. Per catene massimali $M, N \in \mathcal{M}_x$ definiamo

$$M \sim_x N \iff M \cup N \in \operatorname{Ind} S(x)$$

Per la proposizione 6.22 $\sim_x$ è una relazione di equivalenza su $\mathcal{M}_x$; denoteremo con $[M]_x$ la classe di equivalenza di M.

Proposizione 7.6. *M ed N siano catene massimali di $S(x)$ ed $S(x) \neq x$. Allora*

$$M \sim_x N \iff M \cap N \neq x$$

Dimostrazione. Proposizione 6.23.

Proposizione 7.7. *Siano $M, N \in \mathcal{M}_x$. Allora sono equivalenti:*

(1) $M \sim_x N$.

(2) $(M \cup N) \setminus x$ *è fortemente convesso.*

Dimostrazione. Proposizione 6.25.

Proposizione 7.8. *Esiste una biiezione naturale*

$$\mathcal{M}_x / \sim_x \longrightarrow \mathcal{R}_x$$

che manda ogni classe di equivalenza $[M]_x$ nell'unico ramo in x che contiene M.

Dimostrazione. Proposizione 6.32.

Definizione 7.9. Poniamo $E(x) := \{(a, b) \in X \times X \mid ab > x\}$

E' chiaro che $E(x) \subset S^+(x) \times S^+(x)$.

Osservazione 7.10. *$E(x)$ è una relazione di equivalenza su $S^+(x)$.*

Dimostrazione. Osservazione 6.38.

Osservazione 7.11. *Per $a, b > x$ sono equivalenti:*

(1) $(a, b) \in E(x)$.

(2) $ab > x$.

(3) *a e b si trovano nello stesso ramo in x.*

Dimostrazione. Osservazione 6.39.

Definizione 7.12. Per $a \in X$ sia $a_x := \{b \in X \mid ab > x\}$.

E' chiaro che $a_x \subset S^+(x)$ e che per $a > x$ l'insieme a_x è proprio la classe di equivalenza di a rispetto ad $E(x)$.

Invece $x_x = \emptyset$.

Osservazione 7.13. *Sia $a > x$. Allora $a_x \cup x$ è un ramo di X.*

Dimostrazione. Osservazione 6.41.

Proposizione 7.14. *Sia $S(x) \neq x$. Allora esiste una biiezione naturale*

$$S^+(x)/E(x) \longrightarrow \mathcal{R}_x$$

data da $a_x \mapsto a_x \cup x$.

Dimostrazione. Proposizione 6.42.

Definizione 7.15. x si dice un *punto di ramificazione*, se $|\mathcal{R}_x| \geq 2$, cioè se X possiede almeno due rami distinti in x.

Altrimenti, cioè se $|\mathcal{R}_x| = 1$, x si chiama un punto *semplice*.

x si dice di ramificazione finita, se X possiede un numero finito di rami in x.

Denotiamo con $\mathcal{R}(X)$ l'insieme dei punti di ramificazione di X.

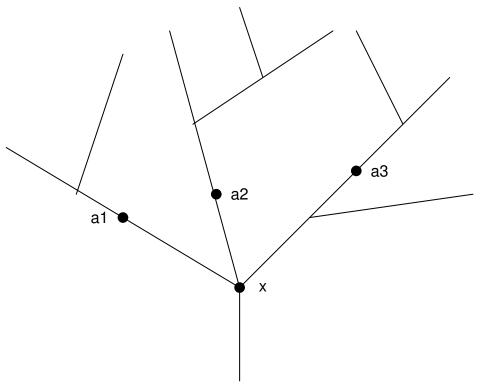
Proposizione 7.16. *Sia $m \geq 2$. Allora sono equivalenti:*

(1) $|\mathcal{R}_x| \geq m$.

(2) Esistono $a_1, \ldots, a_m \in S^+(x)$ tali che $a_i a_j = x$ ogni volta che $i \neq j$.

Dimostrazione. Proposizione 7.14 e osservazione 7.11.

Il caso $S(x) = x$ è ovvio, perchè allora $S^+(x) = \emptyset$ e quindi la (2) non può essere soddisfatta.

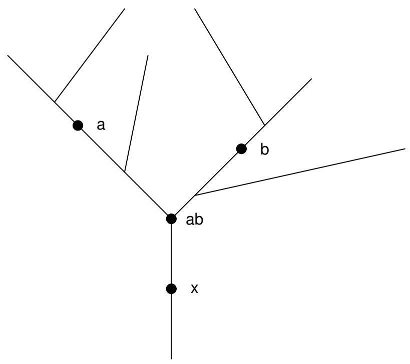


Proposizione 7.17. *Sono equivalenti:*

(1) x *è un punto semplice.*

(2) $a, b \in S^+(x)$ *implica* $ab > x$.

Dimostrazione. Questa è una riformulazione della proposizione 7.16.



Proposizione 7.18. *Sono equivalenti:*

(1) $|\mathcal{R}_x| \leq 2$.

(2) $a, b, c \in S^+(x)$ *implica* $a + b + c > x$.

(3) $S^+(x)$ *è una sottoalgebra ternaria di* X.

Dimostrazione. Il caso $S(x) = x$ è banale. Supponiamo che $S(x) \neq x$.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Sia $| \mathcal{R}_x | \leq 2$.

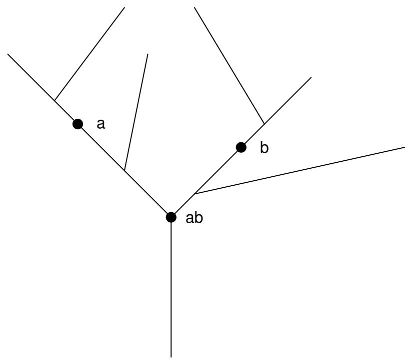
Per la proposizione 7.14 e l'osservazione 7.11 ad esempio $(a, b) \in E(x)$, cioè $ab > x$. Quindi $a + b + c = \max(ab, ac, bc) > x$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Siano $a, b, c \in S^+(x)$. Per ipotesi $a + b + c > x$, quindi ad esempio $ab > x$. Dall'osservazione 7.11 segue che a, b si trovano sullo stesso ramo. Vediamo così che $| \mathcal{R}_x | \leq 2$.

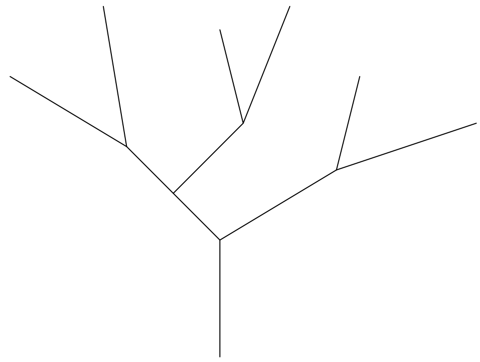
(2) $\Longleftrightarrow$ (3): Chiaro.

Osservazione 7.19. *Sia $a \notin L(b)$. Allora ab è un punto di ramificazione.*

Dimostrazione. Infatti allora $a > ab$ e $b > ab$, quindi $a, b \in S^+(ab)$. L'enunciato segue dalla proposizione 7.16. Cfr. lemma 3.19.



Definizione 7.20. X si dice una ramificazione binaria o un albero binario, se $|\mathcal{R}_x| \leq 2$ per ogni $x \in X$. Un *albero binario* è quindi un albero con intersezione che in ogni punto possiede al massimo due rami.



Definizione 7.21. Una catena convessa che non contiene punti di ramificazione si chiama una *fase* di X.

Una fase si dice *massimale* se non è contenuta in un'altra fase.

Osservazione 7.22. *Ogni intervallo di X che non contiene punti di ramificazione è una fase.*

Dimostrazione. Un intervallo è convesso (cfr. def. 1.7) e, in un albero, anche una catena.

Lemma 7.23. *F e G siano fasi di X tali che $F \cap G \neq \emptyset$. Allora $F \cup G$ è una fase.*

Dimostrazione. $F \cup G$ non contiene punti di ramificazione perchè F e G sono fasi di X.

Siano $x \in F \cap G$, $a \in F$ e $b \in G$. Allora $x \in L(a) \cap L(b)$, quindi si verifica una delle seguenti situazioni:

(1) $a \leq b \leq x$ e quindi $[a,b] \subset F$;

(2) $b \leq a \leq x$ e quindi $[b,a] \subset G$;

(3) $a \leq x \leq b$ e quindi $[a,b] = [a,x] \cup [x,b] \subset F \cup G$, dove usiamo il lemma 2.7;

(4) $b \leq x \leq a$ e quindi, come si vede nello stesso modo, $[b,a] \subset F \cup G$;

(5) $x \leq a \leq b$ e quindi $[a,b] \subset [x,b] \subset G$;

(6) $x \leq b \leq a$ e quindi $[b,a] \subset [x,a] \subset F$;

(7) $x \leq a, b$ con $a \notin L(b)$.

L'ultimo caso però non è possibile; infatti per l' osservazione 7.19 ab sarebbe un punto di ramificazione e siccome $ab \in [x,a] \subset F$, si avrebbe una contraddizione all'ipotesi che F non contiene punti di ramificazione.

Ciò mostra che $F \cup G$ è una catena convessa.

Proposizione 7.24. *β sia una catena di fasi di X. Allora $\bigcup\limits_{F\in\beta} F$ è una fase.*

Dimostrazione. Sia $D := \bigcup\limits_{F\in\beta} F$. Come nella dimostrazione della proposizione 1.4 si vede che D è una catena.

Rimane da dimostrare che l'insieme D è convesso.

Siano a , $b \in D$ con $a \leq b$. Allora esistono F , $G \subset \beta$ tali che $a \in F$ e $b \in G$. Essendo β una catena, si ha, ad esempio, $F \subset G$. Allora a , $b \in G$ e quindi $[a,b] \subset G \subset D$.

Proposizione 7.25. *Ogni fase non vuota è contenuta in un'unica fase massimale.*

Dimostrazione. L'unicità segue dal lemma 7.23, l'esistenza dal lemma di Zorn, utilizzando la proposizione 7.24.

Definizione 7.26. x non sia un punto di ramificazione. Allora x è una fase non vuota, per cui x è contenuto in un'unica fase massimale che denotiamo con $V(x)$. $V(x)$ si chiama la *vita* di x.

Proposizione 7.27. *Sia data una successione infinita di fasi $F_1, F_2, \ldots$, tale che $F_n \cap F_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni n.*

Allora $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ è una fase.

Dimostrazione. Definiamo

$$\begin{aligned} G_1 &:= F_1 \\ G_2 &:= F_1 \cup F_2 \\ G_3 &:= F_1 \cup F_2 \cup F_3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Quindi $G_{n+1} = G_n \cup F_{n+1}$ e siccome $G_n \cap F_{n+1} \supset F_n \cap F_{n+1} \neq \emptyset$, dal lemma 7.23 segue che G_n è una fase per ogni n (per $n = 1$ abbiamo $G_1 = F_1$).

Però $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \ldots$ e dalla proposizione 7.24 segue che $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ è una fase.

Osservazione 7.28. *F sia una fase massimale.*

(1) Se $\sup F$ esiste e non è un punto di ramificazione, allora $\sup F \in F$ e quindi $\sup F = \max F$.

(2) Se $\inf F$ esiste e non è un punto di ramificazione, allora $\inf F \in F$ e quindi $\inf F = \min F$.

Dimostrazione. (1) Per l'osservazione 1.16 e il corollario 4.16 $F \cup \sup F$ è una catena convessa che per ipotesi non contiene punti di ramificazione e quindi è una fase. Dalla massimalità di F segue $F \cup \sup F = F$.

(2) La catena convessa F è anche fortemente convessa per l'osservazione 3.28, perciò dall'osservazione 1.16 e dal corollario 4.18 segue che $F \cup \inf F$ è una catena convessa che per ipotesi non contiene punti di ramificazione e quindi è una fase. Ma F è una fase massimale e quindi $F \cup \inf F = F$.

Osservazione 7.29. *L'insieme vuoto è una fase massimale se e solo se ogni punto di X è un punto di ramificazione.*

8. EVOLUZIONE TEMPORALE

Situazione 8.1. A partire dall'osservazione 8.5 $(X, \leq, \tau)$ sia uno spazio con evoluzione temporale.

$a, b, \dots, u, x, y, \dots \in X$ e $t, s \in [0, \infty)$, quando non indicato diversamente.

Definizione 8.2. X sia un insieme, $\leq$ un ordine parziale su X e $\tau : X \longrightarrow [0, \infty)$ un'applicazione. Gli elementi di X si chiamano *osservazioni*.

Siano $x, y \in X, A \subset X$ e $t \in [0, \infty), U \subset [0, \infty)$. Poniamo:

$$\begin{aligned} A_t &:= \{x \in A \mid \tau(x) = t\} = A \cap X_t \\ P_t(x) &:= P(x) \cap X_t \\ S_t(x) &:= S(x) \cap X_t \end{aligned}$$

Gli elementi di X_t si chiamano osservazioni al tempo t.

Denotiamo con τ_A l'applicazione

$$\begin{aligned} \tau_A : A &\longrightarrow \tau(A) \\ a &\mapsto \tau(a) \end{aligned}$$

Osservazione 8.3. *X sia un insieme, $\leq$ un ordine parziale su X e $\tau : X \longrightarrow [0, \infty)$ un'applicazione. Assumiamo che sia soddisfatta la seguente condizione:*

$$x < y \implies \tau(x) < \tau(y)$$

Allora

$$x \leq y \implies \tau(x) \leq \tau(y)$$

e quindi (per ogni $x, y \in X$)

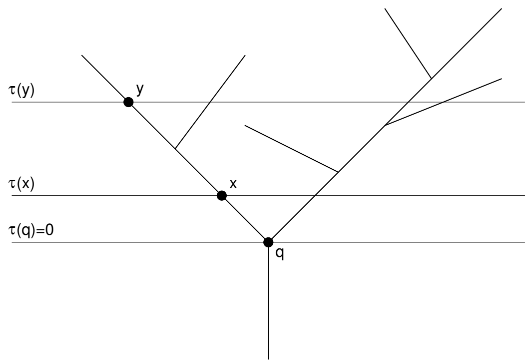
$$\tau([x, y]) \subset [\tau(x), \tau(y)]$$

Definizione 8.4. $(X, \leq)$ sia un albero con intersezione e con origine q, $\tau : X \longrightarrow [0, \infty)$ un'applicazione. Chiamiamo allora la tripla $(X, \leq, \tau)$ uno *spazio con evoluzione temporale*, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $x < y \implies \tau(x) < \tau(y)$.

(2) Se $x \leq y$, allora $[\tau(x), \tau(y)] \subset \tau([x, y])$.

(3) $\tau(q) = 0$.



La condizione (1) implica, come abbiamo visto nell'osservazione precedente, in particolare la monotonia di τ; perciò, combinando le condizioni (1) e (2) si ha:

$$x \leq y \implies [\tau(x), \tau(y)] = \tau([x, y])$$

Osservazione 8.5. *C sia una catena di X. Allora τ è iniettiva su C e quindi τ_C è una biiezione.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in C$ con $y \neq x$. Allora ad esempio $x < y$ e quindi $\tau(x) < \tau(y)$.

Osservazione 8.6. *Sia $x \leq y$. Allora l'applicazione*

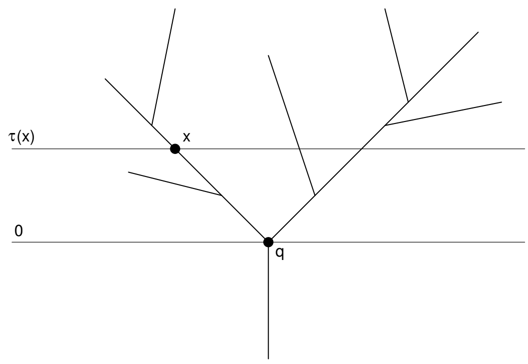
$\tau_{[x,y]} : [x, y] \longrightarrow [\tau(x), \tau(y)]$ *è una biiezione.*

Dimostrazione. Segue dall'osservazione 8.3 e dalla definizione 8.4.

Corollario 8.7.

(1) $\tau(P(x)) = [0, \tau(x)]$.

(2) L'applicazione $\tau_{P(x)} : P(x) \longrightarrow [0, \tau(x)]$ *è una biiezione.*



Proposizione 8.8. *C sia una catena di X. Allora τ_C è un isomorfismo di insiemi quasi ordinati.*

Dimostrazione. Dall'osservazione 8.5 e dalla definizione 8.4 segue che τ_C è biiettiva e monotona, quindi per il lemma 1.17 τ_C è un isomorfismo di insiemi quasiordinati.

Lemma 8.9. *A sia un sottoinsieme fortemente convesso e non vuoto di X, ad esempio una catena convessa non vuota di X. Allora $\tau(A)$ è un sottoinsieme convesso non vuoto di $[0, \infty)$ e quindi, per il lemma 1.14, un intervallo.*

Dimostrazione. Segue dal lemma 3.36.

Proposizione 8.10. *Siano A un sottoinsieme fortemente convesso e non vuoto di X ed $s_1 := \inf \tau(A), s_2 := \sup \tau(A)$. Allora si verifica esattamente uno dei seguenti casi:*

$$\tau(A) = [s_1, s_2]$$
$$\tau(A) = [s_1, s_2)$$
$$\tau(A) = (s_1, s_2]$$
$$\tau(A) = (s_1, s_2)$$

Nel caso particolare che A sia una catena convessa non vuota, τ induce una biiezione tra A e l'intervallo corrispondente.

Naturalmente $s_1 \in [0, \infty)$ ed $s_2 \in [0, \infty)$.

Dimostrazione. Segue dal lemma 1.14 e dall'osservazione 8.5.

Lemma 8.11. *A sia un sottoinsieme non vuoto di X ed $s_1 := \inf \tau(A)$, $s_2 := \sup \tau(A)$.*

(1) Se esiste $u \leq A$ con $\tau(u) = s_1$, allora $u = \inf(A)$.

(2) Se esiste $v \geq A$ con $\tau(v) = s_2$, allora $v = \sup A$.

Dimostrazione. (1) Sia $x \in X$ con $x \leq A$. Allora $\tau(x) \leq \tau(A)$ e quindi $\tau(x) \leq \tau(u)$.

Siccome A non è vuoto, esiste un elemento $a \in A$. Allora u ed x appartengono entrambi alla catena $P(a)$ e ciò implica $x \leq u$.

(2) Sia $y \in X$ con $y \geq A$. Allora $vy \geq A$, per cui $\tau(v) \geq \tau(vy) \geq \tau(A)$. Da ciò segue $\tau(vy) = \tau(v)$.

Però $vy \leq v$ e quindi $vy = v$, per cui $v \leq y$.

Proposizione 8.12. *A sia un sottosemigruppo non vuoto di X. Allora $\inf A$ esiste e si ha $\tau(\inf A) = \inf(\tau A)$.*

Dimostrazione. Sia $s_1 := \tau(A)$. Per ipotesi esiste un elemento $a \in A$. Allora $s_1 \leq \tau(a)$, per cui esiste $u \in P(a)$ tale che $\tau(u) = s_1$. Per il lemma 8.11 è sufficiente dimostrare che $u \leq A$.

Sia $b \in A$. Allora $ab \in A$, perchè A è un sottosemigruppo di X. Quindi $\tau(u) \leq \tau(ab)$. Ma ab e u appartengono entrambi alla catena $P(a)$ e quindi $u \leq ab \leq b$.

Proposizione 8.13. *C sia un sottoinsieme non vuoto di X. Assumiamo che esista un punto $x \in X$ tale che $x \geq C$. Allora:*

(1) C è una catena.

(2) $\sup C$ esiste e si ha $\tau(\sup C) = \sup \tau(C)$.

Dimostrazione. C è contenuta nella catena $P(x)$ e quindi è una catena.

Sia $s_2 := \sup \tau(C)$. L'ipotesi implica $\tau(a) \leq \tau(x)$ per ogni $a \in C$, per cui $s_2 \leq \tau(x)$.

Per la condizione (2) della definizione 8.4 esiste un $v \leq x$ tale che $\tau(v) = s_2$. Per il lemma 8.11 è sufficiente dimostrare che $v \geq C$.

Sia $a \in C$. Allora a e v appartengono entrambi alla catena $P(x)$ e siccome $\tau(a) \leq \tau(v)$, necessariamente $a \leq v$.

Osservazione 8.14. *C sia una catena convessa non vuota di X. Allora $\inf C =: u$ esiste per la proposizione 8.12. Inoltre:*

(1) Se esiste $\sup C =: v$, allora C coincide con uno degli intervalli $[u, v], [u, v), (u, v]$ e (u, v).

(2) Se $\sup C$ non esiste, allora C coincide con $S(u)$ oppure con $S^+(u)$.

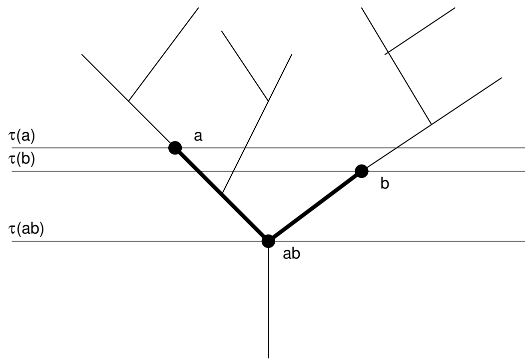
9. LA METRICA

Situazione 9.1. $(X, \leq, \tau)$ sia uno spazio con evoluzione temporale.

$a, b, \cdots, u, x, y, \cdots \in X$ e $t, s \in [0, \infty)$ quando non indicato diversamente.

Definizione 9.2. Per $a, b \in X$ sia

$$d(a, b) := \tau(a) + \tau(b) - 2\tau(ab)$$



Dimostreremo adesso alcune proprietà fondamentali di d, da cui seguirà in particolare che d è una metrica su X.

Osserviamo comunque subito che

$$d(a, b) = d(b, a)$$

Osservazione 9.3. $d(a, b) \geq 0$

Dimostrazione. Infatti $ab \leq a$ e quindi

$\tau(a) \geq \tau(ab)$ e nello stesso modo

$\tau(b) \geq \tau(ab)$,

quindi

$$d(a, b) = \tau(a) - \tau(ab) + \tau(b) - \tau(ab) \geq 0$$

Osservazione 9.4. *Sia* $a \leq b$. *Allora* $d(a,b) = \tau(a) - \tau(b)$.

Dimostrazione. In questo caso $ab = a$, quindi

$d(a,b) = \tau(a) + \tau(b) - 2\tau(a) = \tau(b) - \tau(a)$

Osservazione 9.5. $d(a,b) = d(a,ab) + d(ab,b)$

Dimostrazione. Per l'osservazione 9.4
$d(a,ab) + d(ab,b) = \tau(a) - \tau(ab) + \tau(b) - \tau(ab) = d(a,b)$

Corollario 9.6. $d(a,ab) \leq d(a,b)$

Lemma 9.7. $d(a,b) = d(a,a+b+u) + d(a+b+u,b)$

Dimostrazione. (1) Supponiamo $ab \leq bu \leq au$, allora $a+b+u = au$ e quindi:

$$\begin{aligned} d(a,a+b+u) + d(a+b+u,b) &= d(a,au) + d(au,b) \\ &= \tau(a) + \tau(au) - 2\tau(au) + \tau(au) + \tau(b) - 2\tau(aub) \\ &= \tau(a) + \tau(b) - 2\tau(ab) = d(a,b) \end{aligned}$$

(2) Siano $ab \leq au \leq bu$, allora $a+b+u = bu$ e quindi:

$$\begin{aligned} d(a,a+b+u) + d(a+b+u,b) &= d(a,bu) + d(bu,b) \\ &= \tau(a) + \tau(bu) - 2\tau(abu) + \tau(bu) + \tau(b) - 2\tau(bu) \\ &= \tau(a) + \tau(b) - 2\tau(ab) = d(a,b) \end{aligned}$$

Proposizione 9.8. $d(a,u) + d(u,b) = d(a,b) + 2d(u,a+b+u)$

Dimostrazione. Usando l'osservazione 9.5 abbiamo:

$$\begin{aligned} d(a,b) + 2d(u,a+b+u) &= d(a,a+b+u) + a(a+b+u,b) + 2d(u,a+b+u) \\ &= d(a,a+b+u) + d(a+b+u,u) + d(u,a+b+u) + d(a+b+u,b) \\ &= d(a,u) + d(u,b) \end{aligned}$$

Proposizione 9.9. d *è una metrica su* X.

Dimostrazione. Per il corollario 9.6 si ha:

$d(a,u) + d(u,b) = d(a,b) + 2d(u, a+b+u) \geq 0,$

essendo $2d(u, a+b+u) \geq 0$.

Le altre proprietà seguono dall'osservazione 9.3 e dalla definizione 9.2.

Nota 9.10. X è quindi anche uno spazio topologico e possiamo parlare di intorni, aperti, chiusi ecc.

Definizione 9.11. Per $x \in X$ e $\delta > 0$ sia

$U(x,\delta) := \{a \in X \mid d(x,a) < \delta\}.$

Lemma 9.12. *Sia* $x \leq y$ *con* $\tau(y) - \tau(x) < \delta$. *Allora*

$[x,y] \subset U(x,\delta) \cap U(y,\delta).$

Dimostrazione. Sia $a \in [x,y]$. Allora $\tau(x) \leq \tau(a) \leq \tau(y)$, per cui

$$\begin{aligned} d(x,a) &= \tau(a) - \tau(x) \leq \tau(y) - \tau(x) < \delta \\ d(y,a) &= \tau(y) - \tau(a) \leq \tau(y) - \tau(x) < \delta \end{aligned}$$

Definizione 9.13. Poniamo

$L(x,\delta) := \{y \in L(x) \mid \tau(x) - \delta < \tau(y) < \tau(x) + \delta\}$

Lemma 9.14. $a \in U(x,\delta) \implies ax \in L(x,\delta)$

Dimostrazione. Sia $a \in U(x\delta)$. Per il corollario 9.6 abbiamo

$\tau(x) \leq \tau(ax) = d(a,ax) \leq d(a,x) < \delta$ e quindi

$\tau(x) - \delta < \tau(ax) \leq \tau(x).$

Osservazione 9.15.

(1) Sia $y \leq x$. *Allora* $y \in L(x,\delta) \iff \tau(x) - \delta < \tau(y)$.

(2) Sia $x \leq y$. *Allora* $y \in L(x,\delta) \iff \tau(y) < \tau(x) + \delta$.

Lemma 9.16. *Sia* $y \in L(x)$. *Allora*

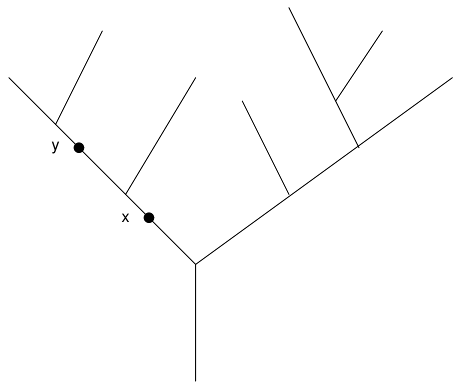
$y \in U(x,\delta) \iff y \in L(x,\delta).$

Dimostrazione. (1) Sia $y \leq x$. Allora $d(x,y) = \tau(x) - \tau(y)$ e

$$\begin{aligned} d(x,y) < \delta &\iff \tau(x) - \tau(y) < \delta \\ &\iff \tau(x) - \delta < \tau(y) \\ &\iff y \in L(x,\delta) \end{aligned}$$

(2) Sia $x \leq y$. Allora $d(x,y) = \tau(y) - \tau(x)$ e

$$\begin{aligned} d(y,x) < \delta &\iff \tau(y) - \tau(x) < \delta \\ &\iff \tau(y) < \tau(x) + \delta \\ &\iff y \in L(x,\delta) \end{aligned}$$



Corollario 9.17. $L(x,\delta) = U(x,\delta) \cap L(x)$

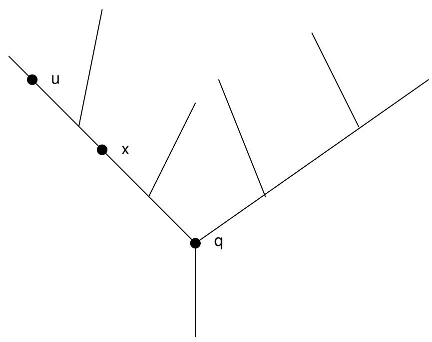
10. RAMIFICAZIONE IN UNO SPAZIO CON EVOLUZIONE TEMPORALE.

Situazione 10.1. $(X, \leq, \tau)$ sia uno spazio con evoluzione temporale. $a, b, \ldots, x, y, \cdots \in X$ e $t \in [0, \infty)$, quando non indicato diversamente. $\delta > 0$ sia un numero reale positivo.

Lemma 10.2. *Sia $u \in X$. Assumiamo che $\mathcal{R}(X)$ sia chiuso in X. Se u non è un punto di ramificazione ed $u > q$, allora esiste $x < u$ tale che $[x, u]$ è una fase.*

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{R}(X)$ è chiuso, esiste $\delta > 0$ tale che $U(u, \delta) \cap \mathcal{R}(X) = \emptyset$. Inoltre $\tau(u) > 0$ e possiamo assumere che $\tau(u) - \delta > 0$.

Per la condizione (2) della definizione 8.4 esiste $x \in P(u)$ con $\tau(x) = \tau(u) - \frac{\delta}{2}$. Allora $0 < \tau(u) - \tau(x) = \frac{\delta}{2}$. Ciò implica $x < u$. Per il lemma 9.12 $[x, u] \subset U(u, \delta)$, e quindi $[x, u] \cap \mathcal{R}(X) = \emptyset$.



Proposizione 10.3. *Assumiamo che $\mathcal{R}(X)$ sia chiuso in X. F sia una fase massimale non vuota ed $u := \inf F$. Se u non è un punto di ramificazione, allora $u = q$.*

Dimostrazione. Sia $u > q$. Per il lemma 10.2 esiste $x < u$ tale che $[x, u]$ è una fase.

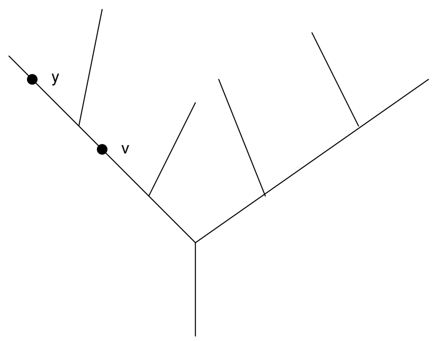
Per il lemma 7.23 $F \cup [x, u]$ è una fase.

Ma $x \notin F$, perchè $x < u = \inf F$, e questa è una contraddizione alla massimalità di F.

Lemma 10.4. *Sia $v \in X$. Assumiamo che $\mathcal{R}(X)$ sia chiuso in X. Se v non è un punto di ramificazione e v non è un elemento massimale di X, allora esiste $y > v$ tale che $[v, y]$ è una fase.*

<u>Dimostrazione.</u> Siccome $\mathcal{R}(X)$ è chiuso, esiste $\delta > 0$ tale che $U(v, \delta) \cap \mathcal{R}(X) = \emptyset$. Per ipotesi v non è massimale, perciò esiste $a > v$ e possiamo assumere che $\tau(v) + \delta < \tau(a)$.

Per la condizione (2) della definizione 8.4 esiste $y \in [v, a]$ con $\tau(y) = \tau(v) + \frac{\delta}{2}$. Allora $d(y, v) = \frac{\delta}{2}$. Per il lemma 9.12 $[y, v] \subset U(v, \delta)$ e ciò implica $[v, y] \cap \mathcal{R}(X) = \emptyset$.



Proposizione 10.5. *$\mathcal{R}(X)$ sia chiuso in X. F sia una fase massimale non vuota. Assumiamo che esista $v := \sup F$. Se v non è un punto di ramificazione, allora v è un elemento massimale di X.*

<u>Dimostrazione.</u> Per il lemma 10.4 esiste $y > v$ tale che $[v, y]$ è una fase.

Per il lemma 7.23 $F \cup [v, y]$ è una fase.

Ma $y \notin F$, poichè $y > v = \sup F$, e questa è una contraddizione all'ipotesi che F sia una fase massimale.

Proposizione 10.6. *Assumiamo che $\mathcal{R}(X)$ sia chiuso in X. F sia una fase massimale non vuota. Sia $u := \inf F$.*

(1) *u sia un punto di ramificazione.*
Se $v := \sup F$ esiste ed è un punto di ramificazione, allora $F = (u, v)$; altrimenti $F = S^+(u)$.

(2) *u non sia un punto di ramificazione. Allora $u = q$. Inoltre se $v := \sup F$ esiste ed è un punto di ramificazione, allora $F = [q, v)$; altrimenti $F = X$.*

Dimostrazione. L'enunciato segue dall'osservazione 8.14 e dalle proposizioni 10.3 e 10.5.

Lemma 10.7. *Sia $\tau(a) = \tau(b)$. Se $a \neq b$, allora $a \notin L(b)$ e quindi ab è un punto di ramificazione.*

Dimostrazione. Sia ad esempio $a < b$. Allora $\tau(a) < \tau(b)$ in contraddizione all'ipotesi. Perciò $a \notin L(b)$ e l'osservazione 7.19 implica che ab è un punto di ramificazione.

Definizione 10.8. x si dice *δ-separabile* se $U(x, \delta) \cap \mathcal{R}(X) \subset \{x\}$

Lemma 10.9. *Sia $L(x, \delta) \cap \mathcal{R}(X) \subset \{x\}$. Allora $U(x, \delta) = L(x, \delta)$.*

Dimostrazione. Per il corollario 9.17 è sufficiente dimostrare che $U(x, \delta) \subset L(x)$.

Sia $a \in U(x, \delta) \setminus L(x)$. Per l'osservazione 7.19 allora $ax \in \mathcal{R}(x)$. Però $ax \in L(x, \delta)$ per il lemma 9.14 e l'ipotesi implica $ax = x$.

Ma allora $a \in L(x)$, una contraddizione.

Corollario 10.10. *Sono equivalenti:*

(1) *x è δ-separabile.*

(2) $U(x, \delta) \cap \mathcal{R}(X) \subset \{x\}$.

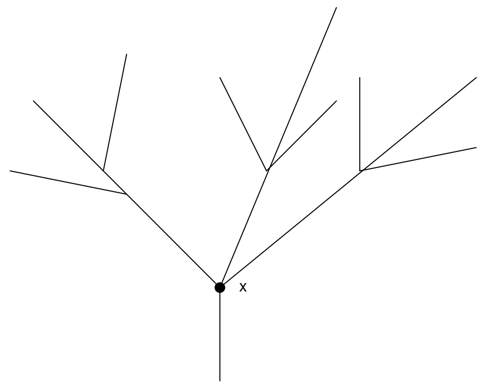
(3) $L(x, \delta) \cap \mathcal{R}(X) \subset \{x\}$.

Proposizione 10.11. *x sia δ-separabile e di ramificazione finita.*
Allora $| S_t(x) | \leq | \mathcal{R}_x |$ per ogni $t \in [\tau(x), \tau(x) + \delta]$.

Dimostrazione. Poniamo $m := | \mathcal{R}_x |$. Sia $\tau(x) \leq t \leq \tau(x) + \delta$ e assumiamo che esistano $m + 1$ punti distinti $a_1, \ldots, a_{m+1}$ in $S_t(x)$.

Sia $i \neq j$. Per la proposizione 7.16 $a_i a_j$ è un punto di ramificazione con $\tau(x) \leq \tau(a_i a_j) < t \leq \tau(x) + \delta$. Per ipotesi ciò implica $a_i a_j = x$.

Ciò significherebbe, con le notazioni della definizione 7.9, che $(a_i a_j) \notin E(x)$ per $i \neq j$, e dalla proposizione 7.14 seguirebbe che gli a_i determinano $m + 1$ rami distinti in x, contrariamente all'ipotesi che $| \mathcal{R}_x | \leq m$.



Corollario 10.12. *X sia un albero binario e x δ-separabile. Allora $\mid S_t(x) \mid \leq 2$ per ogni $t \in [\tau(x), \tau(x)+\delta]$.*

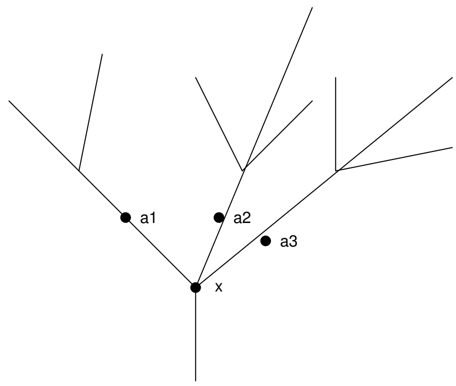
Osservazione 10.13. *Sia $\mid S_t(x) \mid \geq 2$. Allora esiste $u \in \mathcal{R}(X) \cap S(x)$ con $\tau(u) \leq t$.*

<u>Dimostrazione.</u> Siano $a, b \in S_t(x)$ con $a \neq b$. Allora $a \notin L(b)$ e il lemma 10.7 implica $ab \in \mathcal{R}(X)$. Ma $x \leq ab \leq a$, quindi $\tau(x) \leq \tau(ab) \leq \tau(a) = t$.

Proposizione 10.14. *Siano $m \in \mathbb{N}$ ed $\mid \mathcal{R}_x \mid \geq m$. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\mid S_t(x) \mid \geq m$ per ogni $t \in (\tau(x), \tau(x)+\varepsilon)$.*

<u>Dimostrazione.</u> L'enunciato è banale per $m \leq 1$; sia $m \geq 2$. Per la proposizione 7.16 esistono $a_1, \ldots, a_m > x$ con $a_i a_j = x$ ogni volta che $i \neq j$. Poniamo $\varepsilon := \min(\tau(a_1), \ldots, \tau(a_m))$. Allora $\varepsilon > 0$.

Sia $\tau(x) < t < \tau(x)+\varepsilon$. Per la condizione (2) della definizione 8.4 per ogni i esiste $b_i \in [x, a_i] \cap S_t(x)$. Allora $b_i b_j = x$ per $i \neq j$; ciò implica che i b_i sono tutti distinti tra di loro.



Corollario 10.15. *Sia $m \in \mathbb{N}$. Allora sono equivalenti:*

(1) $\mid \mathcal{R}_x \mid = m$.

(2) Esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\mid S_t(x) \mid = m$ per ogni $t \in (\tau(x), \tau(x) + \varepsilon)$.

Dimostrazione. $(1) \implies (2)$: Per la proposizione 10.11 abbiamo $\mid S_t(x) \mid \leq m$ per ogni $t \in [\tau(x), \tau(x) + \delta]$.

Per la proposizione 10.14 esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mid S_t(x) \mid \geq m$ per ogni $t \in (\tau(x), \tau(x) + \varepsilon)$. Se scegliamo $\varepsilon \geq \delta$, otteniamo l'enunciato (2).

$(2) \implies (1)$: Dalla proposizione 10.11 segue $\mid \mathcal{R}_x \mid \geq m$. L'ipotesi per la proposizione 10.14 implica $\mid \mathcal{R}_x \mid \leq m$.

BIBLIOGRAFIA

H. Bandelt/J. Hedlíková: Median algebras.
Discrete Math. 45 (1983), 1-30.

B. Davey/H. Priestley: Introduction to lattices and order.
Cambridge UP 2002.

M. Erné: Einführung in die Ordnungstheorie. Bibl. Inst. 1982.

R. Gatenby/P. Maini: Cancer summed up - mathematical oncology.
Nature 421 (2003), 321.

J.Isbell: Median algebra. Trans. AMS 260 (1980), 319-326.

M. Novak: Teory is available light.
Current Biology 14/11 (2004), R 406-407.

M. Novak/R. May: Virus dynamics. Oxford UP 2000.

M. Sholander: Trees, lattices, order and betweenness.
Proc. AMS 3 (1952), 369-381.

M. Sholander: Medians and betweenness.
Proc. AMS 5 (1954), 801-807.

M. Sholander: Medians, lattices and trees.
Proc. AMS 5 (1954), 808-812.

M. van de Val: Theory of convex structures. North-Holland 1993.

E. Verheul: Multimedians in metric and normed spaces. CWI 1993.